ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLI

1954

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XVII

(2° semestre 1954)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1954

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1954 - Luglio–agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Meccanica. — *A proposito del secondo principio di reciprocità.* Nota (*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

In due Note recentemente pubblicate nei «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences» (21 e 28 settembre 1953) io ho formulata una espressione generale della reciprocità tra differenti stati di equilibrio di un corpo, nella quale è espressamente contemplata la coesistenza di stati di deformazione dovuti a date forze esterne e di stati di coazione preesistenti nello stato naturale del corpo o comunque non determinati da forze esterne.

Ed ho messo in evidenza il fatto che quella espressione generale comprende come casi particolari:

a) il teorema di Betti che notoriamente esprime la reciprocità tra gli stati di deformazione determinati da due diversi sistemi di forze esterne;

b) il secondo principio di reciprocità che mette in relazione lo stato di deformazione dovuto ad un dato sistema di forze esterne con lo stato di coazione determinato da un dato sistema di deformazioni impresse;

c) il teorema che esprime la reciprocità tra due differenti stati di coazione, ovvia generalizzazione di un noto teorema di Volterra sulle distorsioni.

Scrivevo allora testualmente:

« Le fait que ces trois théorèmes soient des cas particuliers et tout à fait indépendants de la formule générale que je viens d'établir, n'est pas sans importance: il mérite au contraire d'être souligné ne fût–ce que pour mettre fin, une fois pour toutes, aux vains efforts de déduire ces théorèmes l'un de l'autre à l'aide d'artifices plus ou moins ingénieux ».

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1954.

L'antico tentativo di Albenga di presentare il secondo principio di reciprocità (nella forma incompleta ed inesatta dovuta al Land) come una conseguenza del teorema di Betti, viene invece ripreso da Zanaboni (« L'Ingegnere », giugno 1954) il quale, dopo di avere ricordato, forte dell'autorità di Belluzzi, esser « cosa nota e dichiarata che il secondo teorema di reciprocità sia una conseguenza di quello di Betti » va più in là ed afferma che a suo avviso « esso viene addirittura ad immedesimarsi nell'altro ».

Per arrivare a questa conclusione Zanaboni immagina applicata a due sezioni vicinissime di una trave due forze eguali e contrarie capaci di produrre, per deformazione elastica del tronco infinitesimo compreso tra esse, quello spostamento relativo delle due sezioni che notoriamente caratterizza una distorsione di Volterra.

Ma è chiaro che si tratta di un artificio, e di un artificio assai discutibile, sia perché vale solo nell'ambito del particolare problema della trave – né si vede come potrebbe facilmente estendersi a casi più generali – sia perché implica l'ipotesi che a quel tronco di lunghezza piccolissima sia applicabile la teoria di De Saint Venant che è invece notoriamente valida solo quando il tronco di trave ha una lunghezza molto grande rispetto alle sue dimensioni trasversali.

L'artificio appare poi non solo discutibile ma controproducente se ci si pone dal punto di vista della chiara comprensione dei due teoremi e della loro indiscutibilmente diversa funzione nella economia del pensiero scientifico; per la quale è assolutamente essenziale tenere ben distinte due categorie di fenomeni che hanno origini fisiche così diverse: le forze esterne nel caso delle deformazioni della teoria classica, le deformazioni impresse nel caso degli stati di coazione.

Con riferimento poi a quelle che sono le applicazioni correnti dei due teoremi nella Scienza delle Costruzioni, non sarà mai detto abbastanza chiaramente che, mentre il teorema di Betti *operando nello stretto ambito della teoria classica* ci consente di interpretare come linee di influenza certe deformate dovute all'azione di opportuni sistemi di forze esterne, il secondo principio di reciprocità ci offre invece la possibilità di interpretare come linee di influenza certe deformate dovute all'intervento di opportuni sistemi di deformazioni impresse, *utilizzando e mettendo al servizio della teoria classica metodi e risultati che sono propri della moderna teoria delle coazioni.*

Chimica biologica. — *Formazione di acido urico dall'acido dialurico ecc. e dall'uracile nel fegato isolato e sopravvivente di piccione (Columba Livia)* [*]. Nota [**] del Corrisp. ANTONINO CLEMENTI.

Nel 1902 Wiener [1] rilevò, che in seguito alla somministrazione ai polli per via parenterale di quantità elevate di urea e per via orale di acidi organici tricarboniosi aumenta la quantità dell'acido urico escreto coll'urina.

Poiché Behrend e Roosen [2] avevano ottenuto l'acido urico per sintesi *in vitro* condensando l'urea con l'acido isodialurico e avevano preparato l'acido isodialurico per sintesi a partire dall'etere acetico e dall'urea, Wiener credette giustificato spiegare tale aumento dell'acido urico escreto ammettendo, che nell'organismo dei polli l'urea prima si condensi con un acido tricarbonico per formare acido dialurico e successivamente si condensi con l'acido dialurico stesso per formare acido urico.

Nel 1929 e nel 1930 [3] potei dimostrare, che l'urea iniettata per via intramuscolare in dosi moderate e refratte nelle 12 ore ai polli si ritrova tutta quantitativamente nell'urina, mentre la quantità dell'acido urico escreto non aumenta e resta immodificata; l'aumento dell'acido urico escreto ha luogo solamente, quando le dosi dell'urea iniettata sono molto elevate, poiché in questo caso una parte di essa viene escreta dalle ghiandole dall'apparecchio digerente nel lume del tubo gastro–enterico, dove subisce una parziale fermentazione ammoniacale dando luogo alla liberazione di ammoniaca; non l'urea quindi, ma l'ammoniaca così formata e assorbita dall'intestino viene trasformata nel fegato in acido urico. Formulai perciò un nuovo schema riguardante il meccanismo dell'uricosintesi negli uccelli diverso da quello di Wiener; secondo tale ipotesi a partire dall'ammoniaca e dall'acido carbonico si attuerebbe prima la sintesi dell'acido dialurico e, successivamente, per condensazione di quest'ultimo con l'ammoniaca e con l'acido carbonico avrebbe luogo la formazione dell'acido urico. L'incapacità dell'organismo degli uccelli a trasformare l'urea in acido urico da me così per la prima volta dimostrata e confermata dalle ricerche successive mie, dei miei allievi e di tutti gli altri ricercatori anche recentissimi determinò nel campo biochimico l'attuale tendenza, a rigettare integralmente la teoria di Wiener, e cioè a ritenere, che né l'urea né l'acido dialurico siano metaboliti intermedii nel processo dell'uricosintesi; sicché alcuni ricercatori [4] [5]

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Catania.

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) WIENER, « Beitr. Chem. Physiol. u. Path », *2*, 42 (1902).

(2) BEHREND e ROOSEN, « Liebig. Ann. Chem. », *251*, 235 (1899).

(3) A. CLEMENTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », *4*, 503 (1929); « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », *4*, 1062 (1929); « Arch. Sc. Biol. », *14*, 451 (1930).

(4) SCHULER e REINDL, « Klin. Woch. », *12*, 1479 (1933).

(5) BENZINGER e KREBS, « Klin. Woch. », *12*, 1906 (1933).

furono indotti ad identificare il problema della biosintesi dell'acido urico nell'organismo degli uccelli con quello della biosintesi dell'anello purinico delle basi nucleiniche in genere nella cellula vivente; questi due problemi invece sono secondo me da considerare come due problemi distinti [6].

Allo stato attuale delle ricerche, mentre fervono in America le esperienze col metodo degli isotopi sul problema della sintesi degli anelli purinico e pirimidinico nel piccione, non esiste finora alcun dato sperimentale, che dia la dimostrazione della trasformazione nell'organismo degli uccelli dell'anello pirimidinico dell'acido dialurico e delle pirimidine in genere nell'anello purinico dell'acido urico.

Ho giudicato perciò di fondamentale importanza intraprendere lo studio del problema della trasformazione delle pirimidine in acido urico nel fegato di piccione impiegando uno dei metodi d'indagine più fruttuosi della tecnica fisiologica e biochimica classica e cioè il metodo della circolazione artificiale del fegato isolato e sopravvivente. Sono stato indotto ad applicare questo metodo in quanto dalle ricerche eseguite recentemente da me in collaborazione con G. Ricceri [7] è stato dimostrato, che non sempre i risultati ottenuti col metodo delle fettine sopravviventi di fegato concordano con quelli ottenuti col metodo della perfusione del fegato isolato evidentemente per effetto di particolari cause di errore, che possono in alcuni casi intervenire, quando vengano impiegati insieme con la tecnica delle fettine sopravviventi i metodi microchimici. Infatti da queste esperienze è risultato, che, contrariamente a quanto sembravano dimostrare le precedenti ricerche eseguite col metodo delle fettine [4, 5] il fegato di piccione isolato, sebbene privo di xantinossidasi, è capace di attuare la sintesi dell'acido urico a partire dall'ammoniaca come il fegato degli altri uccelli.

L'ostacolo apparentemente insormontabile che s'incontra, quando si voglia realizzare la circolazione artificiale del fegato di piccione isolato, è rappresentato sia dalle piccole dimensioni di questo organo (il cui peso medio oscilla tra g. 8 e g. 11), come dalla impossibilità di disporre di una quantità di sangue di piccione così elevata quale è quella richiesta dai comuni apparecchi finora usati per attuare la perfusione del fegato dei vertebrati di grandi dimensioni. Io e G. Ricceri [7] siamo riusciti a superare questa difficoltà mediante la modificazione dell'ordinaria apparecchiatura, allestendo cioè un semimicroapparecchio, il quale, grazie alle sue piccole dimensioni, permette di attuare la circolazione artificiale del fegato di piccione attraverso la vena porta sotto una pressione di 30 cm. di acqua con l'impiego di una quantità di liquido di perfusione di soli 100 cc. Anche le presenti esperienze sono state eseguite con tale apparecchio e con la stessa tecnica: è stato impiegato in ogni esperimento di circolazione il sangue defibrinato, che è possibile di ottenere per dissanguamento da 3 o da 4 piccioni corrispondente a circa 30 cc.; esso veniva portato al volume di 100 cc.

(6) A. Clementi, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », *26*, 391 (1950).

(7) A. Clementi e G. Ricceri, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », *27*, 868 (1951).

con l'aggiunta di liquido di Tyrode glucosato. Per tutta la durata della circolazione (ore 1 o 1,15') il liquido di perfusione veniva moderatamente ossigenato e mantenuto alla temperatura di 40–41° C. Il fegato e il sangue erano prelevati da piccioni domestici (Columba livia) adulti tenuti a digiuno da circa 16 ore e sacrificati per dissanguamento immediatamente prima dell'esperimento.

Il dosaggio dell'acido urico nel liquido di perfusione veniva eseguito col micrometodo di Blauch e Koch [8]. Questo consiste, com'è noto, nel praticare col micrometodo di Folin due dosaggi nel liquido in esame, rispettivamente prima e dopo l'azione dell'uricasi: essendo l'azione dell'enzima strettamente specifica, questo metodo dà l'assoluta garanzia, che la sostanza riducente dosata per differenza è sicuramente acido urico e corrisponde alla quantità di acido urico effettivamente presente, cioè di acido urico vero (true uric acid).

Per stabilire se il fegato di piccione è capace di trasformare in acido urico l'acido dialurico e l'uracile sono stati eseguiti tre gruppi di esperienze. Nel primo gruppo fu determinata la quantità di acido urico, che si estraformava nel fegato di piccione isolato nelle condizioni sperimentali suddescritte, quando al liquido di perfusione non veniva aggiunta alcuna sostanza azotata. Col secondo e col terzo gruppo fu determinata la quantità di acido urico, che si extraformava nel fegato di piccione isolato, quando venivano aggiunti al liquido di perfusione l'acido dialurico o l'uracile; furono impiegati acido dialurico della Ch. Fabrik Theodor Schuchardt e uracile della Estman Kodak Company.

Credo opportuno rilevare, che la tecnica delle esperienze di perfusione del fegato di piccione è assai indaginosa, anche perché, a causa di ragioni anatomiche non precisabili, spesso dopo l'introduzione della cannula nella vena porta il liquido di perfusione non circola o circola con enorme difficoltà; in questo caso l'esperienza deve essere scartata. Nel massimo numero delle esperienze eseguite la circolazione aveva luogo solo nel grande lobo.

Dai dati analitici esposti nella tabella I risulta confermato quanto è stato dimostrato dalle precedenti esperienze eseguite in collaborazione con Ricceri [7], e cioè, che nel fegato di piccione isolato e perfuso con sangue di piccione diluito con liquido di Tyrode glucosato, al quale non è stata aggiunta alcuna sostanza azotata, ha luogo la extraformazione di acido urico in una quantità, che oscilla nelle condizioni sperimentali nelle nostre esperienze tra mg. 0,60 e mg. 0,90 ma non supera tale valore.

Dai dati analitici esposti nella tabella II e nella tabella III risulta, che la quantità di acido urico extraformato dal fegato di piccione isolato e sopravvivente e sottoposto alla circolazione artificiale con sangue di piccione diluito con liquido di Tyrode, al quale era stato aggiunto l'acido dialurico o l'uracile, era superiore alla quantità di acido urico, che si extraformava

(8) BLAUCH e KOCH, « J. Biol. Chem. », *130*, 443 (1939).

quando a tale liquido di perfusione non era stata aggiunta alcuna sostanza azotata (*).

TABELLA I.

Estraformazione di acido urico nel fegato di piccione isolato e sottoposto a circolazione artificiale con sangue di piccione diluito con liquido di Tyrode glucosato senza aggiunta di sostanze azotate.

		mg. di acido urico (micrometodo di Folin modificato da Blauch – metodo all'uricasi)						Estraformazione dell'acido urico
		Prima della perfusione			Dopo la perfusione			
		Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	aumento assoluto mg.
Sangue defibrinato di piccione cc. 33 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato).	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,110	0,036		0,145	0,038		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	2,20	0,72	1,48	2,90	0,76	2,14	0,66
Sangue defibrinato di piccione cc. 30 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode).	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,088	0,048		0,133	0,048		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	1,76	0,96	0,80	2,66	0,96	1,70	0,90
Sangue defibrinato di piccione cc. 42 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode).	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,108	0,074		0,160	0,080		
	Nel volume totale del liquido di perfusione .	2,16	1,48	0,68	3,20	1,60	1,60	0,92

In base ai risultati ottenuti credo di potere affermare, che il fegato di piccione isolato ha la capacità di extraformare acido urico sia dall'acido dialurico come dall'uracile, cioè ha la capacità di attuare la sintesi dell'acido urico sia a partire dall'acido dialurico come a partire dall'uracile.

(*) L'aumento della extraformazione dell'acido urico in alcune esperienze non si è constatato; ciò potrebbe dipendere o da una spiccata particolare lentezza propria di questo processo di sintesi o da eventuali cause perturbatrici (in parte dipendenti dalla tecnica impiegata e non facilmente individualizzabili, in parte dipendenti forse della possibile coniugazione con l'acido solforico dell'acido isobarbiturico con dell'acido isodialurico).

TABELLA II.

Estraformazione di acido urico nel fegato di piccione isolato e sottoposto a circolazione artificiale con sangue di piccione diluito con liquido di Tyrode glucosato e con aggiunta di acido dialurico.

		mg. di acido urico (micrometodo di Folin modificato da Blauch e Koch – metodo all'uricasi)						Estraformazione dell'acido urico
		Prima della perfusione			Dopo la perfusione			
		Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	aumento assoluto mg.
Sangue defibrinato di piccione cc. 30 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di mg. 50 di acido Dialurico.	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,088	0,060		0,160	0,068		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	1,76	1,20	0,56	3,20	1,36	1,84	1,28
Sangue defibrinato di piccione cc. 25 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di di mg 50 di acido Dialurico	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,055	0,034		0,171	0,042		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	1,10	0,68	0,42	3,42	0,84	2,58	2,16
Sangue defibrinato di piccione cc. 35 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di mg. 50 di acido Dialurico.	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,148	0,031		0,210	0,034		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . . .	2,96	0,62	2,34	4,20	0,68	3,52	1,18
Sangue defibrinato di piccione cc. 35 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di mg. 40 di acido Dialurico e di mg. 2 di NH_3.	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,125	0,047		0,195	0,055		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	2,50	0,94	1,56	3,90	1,10	2,80	1,24

TABELLA III.

Estraformazione di acido urico nel fegato di piccione isolato e sottoposto a circolazione artificiale con sangue di piccione diluito con liquido di Tyrode glucosato e con aggiunta di uracile.

		mg. di acido urico (micrometodo di Folin modificato da Blauch e Koch – metodo all'uricasi)						Estraformazione dell'acido urico
		Prima della perfusione			Dopo la perfusione			
		Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	Prima dell'azione dell'uricasi	Dopo l'azione dell'uricasi	Acido urico (vero)	aumento assoluto mg.
Sangue defibrinato di piccione cc 41 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di mg. 50 di Uracile	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,250	0,061		0,320	0,065		
	Nel volume totale del liquido di perfusione . .	5,00	1,22	3,78	6,40	1,30	5,10	1,32
Sangue defibrinato di piccione cc. 30 (portato a cc. 100 con liquido di Tyrode glucosato) con aggiunta di mg. 30 di Uracile.	In cc. 5 del liquido di perfusione	0,064	0,052		0,130	0,060		
	Nel volume totale di liquido di perfusione . . .	1,28	1,04	0,24	2,60	1,20	1,40	1,16

Evidentemente l'acido dialurico si trasforma in acido urico in quanto si condensa con una parte di quella frazione dell'azoto ammoniacale (N pool), che normalmente può venire utilizzato per l'extraformazione dell'acido urico dal fegato di piccione isolato, quando al sangue perfuso non è aggiunta alcuna sostanza azotata. D'altra parte, poiché l'uracile, secondo le classiche ricerche di Cerecedo [9], viene trasformato nell'organismo dei mammiferi prima in acido isobarbiturico, quindi in acido isodialurico, poi in acido ossalurico, e infine in urea e in acido ossalico è giustificato ammettere, che nell'organismo degli uccelli esso venga prima trasformato in acido isodialurico e che questo, successivamente venga trasformato in acido urico per condensazione dell'azoto ammoniacale (N pool) con un acido monocarbonioso (acido carbonico o acido formico) (fig. 1). L'acido dialurico quindi si può considerare come un normale metabolita intercalato nel processo

(9) CERECEDO, « J. Biol. Chem. », *75*, 661 (1927); *88*, 693 (1930); *93*, 269 (1931); *93*, 275 (1931).

del catabolismo dell'uracile e della sua trasformazione in acido urico nel fegato del piccione. È evidente il grande interesse, che presenta questo fatto, non solo in rapporto al metabolismo delle pirimidine, ma anche in rapporto al problema del meccanismo dell'uricosintesi in generale nei vertebrati uricotelici. Infatti la genesi dell'acido urico a partire dall'acido dialurico, che in questi vertebrati appare come un fenomeno metabolico fisiologico, fu

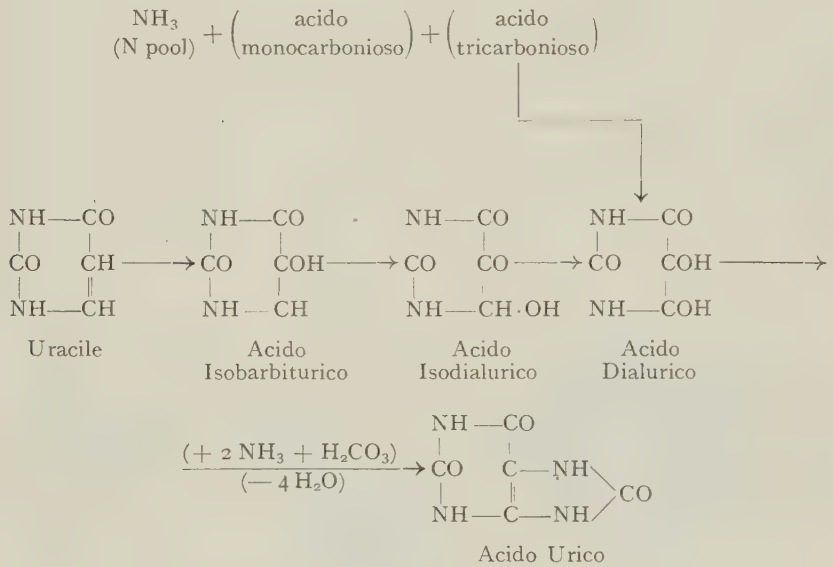


Fig. 1. – Trasformazione dell'uracile in acido dialurico e dell'acido dialurico in acido urico nel fegato di piccione (secondo le presenti ricerche) e formazione dell'acido dialurico dall'ammoniaca (secondo l'ipotesi formulata nel 1929).

da me prospettata come la seconda fase ipotetica del processo generale dell'uricosintesi secondo lo schema formulato nel 1929 [3]. Tengo però a rilevare, che tale schema, il quale appare assai suggestivo, non sembra accordarsi facilmente con le vedute prospettate dalle attuali ricerche [10, 11, 12] sulla genesi sintetica dell'anello purinico nei microorganismi e nel piccione, e che manca finora la dimostrazione della formazione sintetica dell'acido dialurico a partire dall'ammoniaca nell'organismo degli uccelli. Le nostre ricerche frattanto continuano anche in rapporto a quest'ultimo problema.

(10) BUCHANAN, SONNE e DELLUVA, « J. Biol. Chem. », *166*, 395 (1946); *173*, 81 e 169 (1948).

(11) SHIVE e Al., « Am. Chem. Sc. », *69*, 725 (1947).

(12) GREENBERG, « J. Biol. Chem. », *190*, 611 (1951).

Patologia. — *Il potere germinale dei tessuti somatici nei vegetali illustrato 30 anni fa in «Ginkgo biloba» L. conifera superstite del periodo carbonifero.* Nota preliminare (*) del Socio ACHILLE RUSSO.

In Note precedenti (1) si è dimostrato che, oltre alla riproduzione sessuale, un *potere germinale* è latente nelle cellule dei tessuti degli organismi animali e vegetali e che a tale potere è legata la causa dell'origine dei tumori. La formazione del neoplasma fu documentata da fenomeni diversi, osservati nel regno animale e, per analogia, riferiti a quello vegetale, tenendo presente sopratutto le comuni *pratiche agrarie*, con le quali si producono nuovi individui da alcuni tessuti della pianta madre.

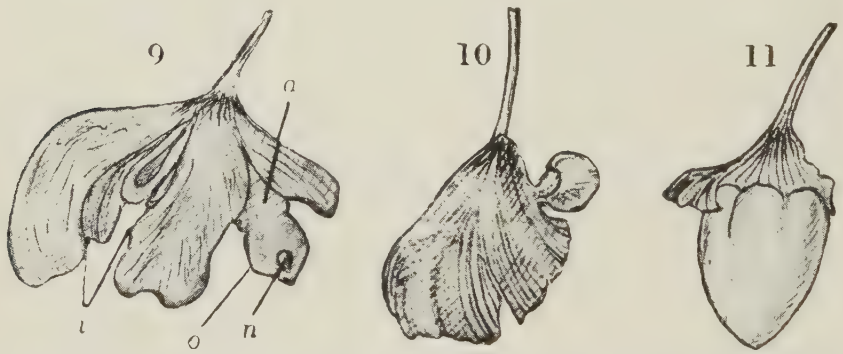


Fig. 1. — Rapporti tra elementi foliari del soma in Ginkgo e lo sviluppo di elementi germinali.

9 = Foglia con ovulo marginale longitudinalmente sezionato: *o*, ovulo, *a*, arillo, *n*, nucella, *i*, tre ispessimenti.
10 = Foglia provvista di un giovane seme marginale.
11 = Foglia con seme maturo.
(Dalle figure a p. 14 della Memoria di Trotter citata nel testo).

Poiché tale semplice conoscenza non è documento sufficiente a dimostrare l'identità e la comunanza del *potere germinale* nei due regni della natura, assume particolare interesse uno studio dettagliato di Alessandro Trotter (2) sopra un individuo di sesso femminile di *Ginkgo biloba* dell'Orto botanico della Scuola superiore di Agricoltura in Portici.

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1954.

(1) A. RUSSO, *Etiologia dei tumori ed i due fattori che vi collaborano, ecc.* «Atti Accad. Gioenia», Catania 1951–52; *Ipotetica potenza ritenuta causa dei tumori identificata con il potere germinale dei tessuti somatici, ecc.* Ibidem, 1952–953; *Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosa, ecc.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1954.

(2) A. TROTTER, *Intorno ad alcuni eccezionali fenomeni d'interesse morfologico e fisiologico in «Aesculus e Ginkgo».* – Parte II. *Produzione di ovuli e di semi sulle foglie di «Ginkgo».* « Annali della R. Scuola sup. di Agricoltura in Portici », ser. II, vol. XVIII (1923).

Rimandando al lavoro originale per complete notizie, si riferisce solo che nell'*Orto della Scuola* ed in tutto il territorio circostante manca l'individuo maschile [3] e che, a Primavera, l'individuo femminile [4], dopo la fioritura, manifesta il *potere germinale* e presenta al margine delle giovani foglie degli ispessimenti lineari, che preludono allo sviluppo di formazioni noduliformi con carattere di *ovuli* e di *semi* rudimentali, atti a germogliare.

Gli *ovuli* e le loro trasformazioni nelle foglie furono rappresentati nelle figure, che qui si riproducono dal lavoro di Trotter, per mostrare i rapporti tra la lamina fogliare ed i nuovi elementi sessuali derivati dal soma.

Tralasciando le considerazioni, che l'osservazione dei fenomeni singolari ha suggerito all'autore, si riportano le parole conclusive (p. 20), con le quali si fa cenno ai problemi biologici fondamentali ancora oggi in discussione. « *Meglio di ogni altro esempio conosciuto nel mondo delle piante, questo degli ovuli fogliari di Ginkgo ci dimostra la possibilità di esistenza di un plasma germinale, in senso weismaniano, tra gli elementi del soma, anzi di un plasma gametico e non di carattere semplicemente vegetativo, come nel noto esempio della Begonia* ».

Da quanto si è cennato risulta che il *potere germinale* dei tessuti somatici, essendo comune al regno animale ed a quello vegetale, dà ad una delle manifestazioni fondamentali della vita, un carattere di universalità, che conferma sempre più i *blastomi* non siano legati solo, come per lungo tempo ritennero i patologi, agli *agenti cancerogeni*, variabili per il numero, ma a potenza unica permanente negli esseri viventi, il *potere germinale*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Topologia. — *Omologia delle dilatazioni.* Nota [*] di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata dal Socio B. SEGRE.

In una serie di Memorie importanti, B. Segre ha introdotto e studiato le *dilatazioni* di varietà algebriche [1]. Ci riferiamo a questi lavori per le definizioni, e ricordiamo soltanto che una dilatazione è una corrispondenza birazionale di una varietà non singolare V in una V', biunivoca all'infuori di una sottovarietà P della V che supponiamo non singolare, la quale trasforma P in uno spazio fibrato P', di base P, la fibra essendo uno

(3) Un individuo maschile era nell'Orto botanico di Napoli distante da Portici in linea d'aria circa 10 km.

(4) TROTTER con il suo studio conferma l'individualità a l'indipendenza del sesso femminile, dimostra inoltre che il *potere germinale* è anche nelle *Gimnosperme*.

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 giugno 1954.

(1) B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche.* « Annali di Mat. » (4), *33*, 1–48 (1952). *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche.* « Ann. di Mat. », (4), *35*, 1–128 (1953), *Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche.* « Ann. di Mat. » (4), *37* (1954).

spazio proiettivo complesso S_r di una certa dimensione r. L'algebra d'omologia $H^*(S_r)$ formata da tutti i gruppi di omologia $H_s(S_r)$ è generata da un elemento z_{2r-2} associato ad un iperpiano S_{r-1} di S_r. I gruppi $H_{2k+1}(S_r)$ sono vuoti, e gli $H_{2k}(S_r)$, $k = 1, \cdots, r$, sono abeliani liberi ad *un* generatore, il generatore di $H_{2k}(S_r)$ essendo rappresentato da un S_k di S_r.

Prendiamo ora un punto $p \in P$, e consideriamo lo spazio $S_r(p)$ corrispondente a p nella dilatazione, ed un $S_k(p)$ in $S_r(p)$. Quest'ultimo essendo una sottovarietà algebrica di P', la sua classe d'omologia in P' non è lo zero [2]. Per dualità, questo risultato vale anche in coomologia. Detta i la corrispondenza d'immersione identica di $S_r(p)$ in P', si vede che l'omomorfismo associato [3], i^*, di $H_s(P')$ in $H_s(S_r(p))$ è un omomorfismo di $H_s(P')$ *sopra* $H_r(S)$, il che val quanto dire che la fibra è *totalmente non omologa allo zero* in P' [4]. Segue allora da un teorema del Leray [4] che i gruppi di coomologia (e anche quelli di omologia) di P' sono isomorfi a quelli del prodotto diretto $P \times S_r$; quest'isomorfismo non è in generale compatibile con le moltiplicazioni che si possono definire fra classi d'omologia, ma è soltanto un isomorfismo nei riguardi dell'operazione di addizione.

Risulta anche dal teorema del Leray sopra citato che l'omomorfismo π^* associato alla *proiezione* π, la quale associa a tutti i punti di una fibra il punto della base corrispondente, è un *isomorfismo* di $H_s(P)$ in $H_s(P')$, e che $i^* \pi^* = 0$. Prendiamo ora la P' e la P in uno spazio proiettivo di dimensione abbastanza elevata. La forma esterna quadratica associata alla metrica di questo spazio induce la forma esterna quadratica fondamentale [5] $\omega(P')$ della P', come anche quelle $\omega(P)$ ed $\omega(S_r)$ di P e di S_r. Si ha conseguentemente

$$\omega(P') = \pi^* \omega(P) + i^{*-1} \omega(S_r),$$

$$i^* \pi^* \omega(P) = 0,$$

e si vede che la metrica che si ottiene sopra P' cangiando la ω da forma esterna in forma hermitiana è una metrica localmente riducibile [6]. Con ciò si esprime il fatto seguente: Si introducano in una porzione di P' coordinate complesse, prendendo le coordinate $z_1, \cdots, z_r$ in $S_r(p)$, e le coordinate $\zeta_{r+1}, \cdots, \zeta_{r+s}$ in un intorno di p in P. Allora la metrica si scompone:

$$ds^2 = \Sigma g_{ik}(z_i, \bar{z}_k)\, dz^i\, d\bar{z}^k + \Sigma g_{r+i, r+k}(\zeta, \bar{\zeta})\, d\zeta^{r+i}\, d\bar{\zeta}^{r+k},$$

(2) B. Eckmann, *Quelques propriétés globales des variétés kählériennes.* «C. R.», *229*, 577–579 (1949).

(3) Cfr. per esempio S. Eilenberg–N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*. Princeton 1953, p. 10.

(4) J. Leray, «Journal de math. pures appl.», *29*, 1–139 (1950); A. Borel, «Séminaire de topologie algébrique», E. P. F., 1951, IX.

(5) H. Guggenheimer, «Comm. math. helv.», *25*, 257–297 (1951).

(6) Cfr. per esempio A. Lichnerowicz, *Sur les formes harmoniques des variétés riemanniennes localement réductibles.* «C. R.», *232*, 1634–1636 (1951).

onde il tensore di Riemann può al più avere come componenti non nulle soltanto le $R_{i\bar{k}l\bar{m}}$ $(i, k, \cdots \leq r)$ e le $R_{r+i\,\overline{r+u}\,r+l\,\overline{r+m}}$. Dalle formole del Chern per le classi di Chern espresse col tensore di Riemann [7], segue che *queste classi* $c_k(P')$ *sono precisamente quelle del prodotto:*

$$c_k(P') = \sum_{q=0}^{k} c_{k-q}(P) \cup c_q(S_r).$$

Geometria differenziale. — *Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali.* Nota [*] di CARLO FELICE MANARA, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

1. Nel presente lavoro si dà una caratterizzazione integrale di una classe di superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali, classe che comprende i piani e le sfere dello spazio euclideo, i piani, le sfere, le orisfere e le ipersfere dello spazio della geometria non euclidea.

Per il caso dello spazio euclideo l'argomento ha formato oggetto delle ricerche di varii Autori, tra i quali ricordiamo W. Scherrer [1], H. Geppert [2], A. Signorini [3], B. Segre [4], D. Gallarati [5], P. Scherk [6].

Nel presente lavoro si riconosce che, detto T un certo invariante legato ai punti di una curva, che si riduce alla torsione di questa se la varietà di immersione si riduce allo spazio euclideo, la condizione che sia $\oint T\,ds = 0$ per qualunque curva chiusa tracciata su una superficie Σ caratterizza le superfici aventi linee di curvatura indeterminate.

2. Siano y^1, y^2, y^3 le coordinate di un punto in una varietà riemanniana tridimensionale V_3 e sia

$$ds^2 = g_{ik}\,dy^i\,dy^k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

la metrica (definita positiva) di V_3.

Fissata una curva in V_3, assegnando le coordinate y^i in funzione dell'arco s, mediante le equazioni

$$y^i = y^i(s) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(7) S.-S. CHERN, *Characteristic classes of hermitian manifolds*, « Ann. of Math. », *47*, 85-121 (1946).

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1954.

(1) « Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich », *85* (1940). « Beiblatt », n. 32, pp. 40-46.

(2) « Annali di Mat. » (20), 56 (1941).

(3) Ibid. (20), 211 (1941).

(4) « Rend. Lincei » (83), *3*, 420-422 (1947_2).

(5) Ibid. (8), *13*, 238-241 (1952).

(6) « Boll. U.M.I. », (3), *9*, 38-40 (1954).

è noto che le tre quantità

$$\lambda^i = \frac{dy^i}{ds} \tag{2}$$

dànno le componenti controvarianti del versore tangente alla Γ, avendosi

$$\lambda^i \lambda_i = 1. \tag{3}$$

Poniamo ora

$$\mu^i = \lambda^i_{/k}\, \lambda^k \tag{4}$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho^2} = \mu^i \mu_i . \tag{5}$$

Le tre quantità

$$\nu^i = \rho \mu^i$$

forniscono le componenti del versore normale principale alla curva, avendosi

$$\nu^i \lambda_i = 0.$$

È noto che le equazioni

$$\mu^i = 0$$

caratterizzano le geodetiche di V_3 e che gli invarianti c e ρ definiti dalla (5) si riducono alla flessione ed al raggio di prima curvatura rispettivamente, quando V_3 sia uno spazio euclideo.

Infine le funzioni

$$\beta^i = \varepsilon^i_{pq}\, \lambda^p \nu^q \ (7)$$

dànno le componenti controvarianti del vettore binormale alla Γ, e si ha inoltre

$$\beta^i_{/k} \lambda^k = T \nu^i$$

essendo T un invariante che si riduce alla torsione della curva se V_3 si riduce ad uno spazio euclideo.

Si verifica facilmente che si ha

$$T = -\rho^2 \varepsilon_{ikm} \lambda^i \mu^k \mu^m_{/p} \lambda^p, \tag{6}$$

formula che, quando V_3 si riduce ad uno spazio euclideo, si riduce alla nota relazione

$$T = -\rho^2 \left(\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2 P}{ds^2} \wedge \frac{d^3 P}{ds^3} \right).$$

3. Sia data in V_3 una superficie Σ, assegnando le coordinate y^1, y^2, y^3 di punto in V_3 come funzioni regolari di due coordinate x^1, x^2:

$$y^i = y^i (x^1, x^2). \tag{7}$$

(7) Per il significato delle notazioni tensoriali che usiamo cfr. per esempio il trattato di B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale ed applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Nel seguito indicheremo con lettere greche (α , β , γ , ρ , $\sigma \cdots$) degli indici che possono assumere soltanto i valori 1 e 2, riservando le lettere latine (i , k , m , n , p , q , r , $\cdots$) per gli indici che possono assumere i valori 1 , 2 , 3. Porremo inoltre brevemente

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = y^i_\alpha .$$

In forza delle (7) si ha

$$dy^i = y^i_\alpha \, dx^\alpha \tag{8}$$

e la metrica (1) della V_3 subordina sulla Σ una metrica bidimensionale

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \tag{9}$$

avendosi

$$a_{\alpha\beta} = g_{ik} \, y^i_\alpha \, y^k_\beta .$$

Come è ovvio, le y^i_α calcolate per una stessa coppia di valori $x^1 = x^1_0$, $x^2 = x^2_0$ forniscono le componenti di due vettori tangenti alla superficie Σ nel punto P_0 corrispondente ai valori $x^1 = x^1_0 , x^2 = x^2_0$ delle coordinate superficiali.

Indichiamo con N^i le componenti del versore normale alla superficie nello stesso punto; si ha allora

$$N^i N_i = 1 \tag{10}$$

$$N_i \, y^i_\alpha = 0. \tag{11}$$

Le N^i e le loro derivate sono legate alle y^i_α ed alle loro derivate dalle note formule fondamentali [8]

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \left\{ \overline{\begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix}} \right\} y^i_\gamma + b_{\alpha\beta} N^i - \left\{ \begin{matrix} i \\ rk \end{matrix} \right\} y^r_\alpha \, y^k_\beta \tag{12}$$

$$\frac{\partial N^i}{\partial x^\alpha} = - b^\gamma_\alpha \, y^i_\gamma - N^k \, y^r_\alpha \left\{ \begin{matrix} i \\ kr \end{matrix} \right\} \tag{13}$$

nelle quali $b_{\alpha\beta}$ sono le componenti del secondo tensore fondamentale della superficie ed il simbolo di Christoffel $\left\{ \overline{\begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix}} \right\}$ si intende calcolato relativamente alla metrica (9) della Σ.

4. Sia ora Γ una curva sulla superficie Σ, data assegnando le coordinate superficiali x^1 , x^2 in funzione dell'arco, nella forma

$$x^\alpha = x^\alpha (s) . \tag{14}$$

(8) Cfr. per esempio L. BIANCHI, *Geometria Differenziale* (3ª ed.) (Zanichelli, Bologna), vol. II, § 449.

Indichiamo con λ^α e μ^α le quantità analoghe alle λ^α e μ^i date dalla (2) e dalla (4), calcolate rispetto alla metrica (9) della superficie, cioè poniamo

$$\lambda^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

$$\bar{\mu}^\alpha = \lambda^\alpha{}_{/\beta}\,\bar{\lambda}^\beta = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta}\lambda^\beta + \lambda^\beta \lambda^\gamma \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}}$$

intendendo che la derivata covariante, qui e nel seguito, quando sia eseguita su tensori che portano indici greci, venga calcolata rispetto alla metrica (9) di Σ.

Si ha chiaramente, in forza delle (8)

$$\lambda^\alpha y^i_\alpha = \lambda^i \tag{15}$$

ed inoltre

$$\lambda^\alpha \lambda_\alpha = 1$$

$$\bar{\lambda}^\alpha \bar{\mu}_\alpha = 0\,. \tag{16}$$

Ora le formule fondamentali (12) (13) permettono di legare le $\bar{\lambda}^\alpha$ e $\bar{\mu}^\alpha$ qui definite alle λ^i e μ^i relative alla curva, considerata immersa in V_3. A tal fine, ricordiamo che, dette u^i le componenti controvarianti di un vettore funzione dei punti della curva Γ, si ha

$$u^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{du^i}{ds} + \lambda^k u^r \left\{ \begin{matrix} i \\ r\,k \end{matrix} \right\}$$

e quindi in particolare, se Γ è tracciata sulla Σ,

$$u^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k u^r \left\{ \begin{matrix} i \\ r\,k \end{matrix} \right\}. \tag{17}$$

Applicando la (17) al vettore di componenti λ^i si ha, ricordando la (15),

$$\lambda^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^\alpha}\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k \lambda^r \left\{ \begin{matrix} i \\ r\,k \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}^\beta + y^i_\gamma \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\alpha}\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k \lambda^r \left\{ \begin{matrix} i \\ k\,r \end{matrix} \right\},$$

ossia, applicando la formula fondamentale (12),

$$\lambda^i{}_{/k}\,\lambda^k = \bar{\lambda}^\alpha \bar{\lambda}^\beta \left[\overline{\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} y^i_\gamma + b_{\alpha\beta}\,\mathrm{N}^i - \left\{ \begin{matrix} i \\ r\,k \end{matrix} \right\} y^r_\alpha\, y^k_\beta \right] +$$

$$+ y^i_\gamma \frac{\partial \lambda^\gamma}{\partial x^\alpha}\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k \lambda^r \left\{ \begin{matrix} i \\ k\,r \end{matrix} \right\} = y^i_\gamma\, \bar{\lambda}^\gamma{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\lambda}^\beta\, b_{\alpha\beta}\,\mathrm{N}^i\,;$$

ossia in definitiva

$$\mu^i = y^i_\gamma\, \bar{\mu}^\gamma + \mathrm{B}\mathrm{N}^i, \tag{18}$$

essendo B l'invariante definito dalla

$$\mathrm{B} = b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha \bar{\lambda}^\beta.$$

La (18) fornisce la scomposizione del vettore di componenti μ^i nella somma di un vettore superficiale $y^i_\gamma\,\bar{\mu}^\gamma$ e di un vettore $\mathrm{B}\mathrm{N}^i$ normale alla superficie. Ricordando le (10) e (11) si ha facilmente

$$\mu^i \mu_i = g_{ik}\,\mu^i \mu^k = c^2 = \mathrm{B}^2 + \mathrm{G}^2, \tag{19}$$

essendo

$$G^2 = a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta\,. \tag{20}$$

Indichiamo ora con $\bar{\varepsilon}_{\rho\varrho}$ le componenti del tensore ε di Ricci bidimensionale, relativo alla superficie Σ ed alla sua metrica (9). Si ha chiaramente, in forza delle (16) e (20),

$$\bar{\mu}^\alpha = G\,\bar{\varepsilon}^\alpha{}_\beta\,\bar{\lambda}^\beta\,. \tag{21}$$

Inoltre la equazione differenziale (del 1° ordine e di grado 2) delle linee di curvatura di Σ (considerata immersa in V_3) è data da

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,b^\beta_\gamma\,\bar{\lambda}^\gamma = 0\ ^{(8)}. \tag{22}$$

Questa stessa equazione, in forza delle (21), può esser scritta nella forma

$$b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta = 0;$$

si ha infatti

$$b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta = G\,\bar{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\,\bar{\lambda}^\varrho\,b^\sigma_\gamma\,\bar{\lambda}^\gamma\,. \tag{23}$$

Sussistono inoltre, in base a note proprietà del tensore di Ricci, le seguenti relazioni, cui faremo ricorso in seguito

$$G = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta \tag{24}$$

$$\frac{dG}{ds} = G_{/\sigma}\,\bar{\lambda}^\sigma = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta{}_{/\sigma}\,\bar{\lambda}^\sigma. \tag{25}$$

5. Applichiamo ora al calcolo del vettore $\mu^i{}_{/k}\,\lambda^k$ un procedimento analogo a quello usato nel precedente paragrafo per il calcolo di $\lambda^i{}_{/k}\,\lambda^k$. Ricordando la (17) ed in forza delle formule fondamentali (12) e (13) si ottiene, con calcoli analoghi a quelli eseguiti nel precedente paragrafo per giungere alla formula (18),

$$\mu^i{}_{/k}\,\lambda^k = y^i_\gamma\,[\bar{\mu}^\gamma{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha - B b^\gamma_\alpha\,\bar{\lambda}^\alpha] + N^i\left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta\right], \tag{24}$$

formula analoga alla (18), che ci dà il vettore $\mu^i{}_{/k}\,\lambda^k$ scomposto in una parte superficiale $y^i_\gamma\,[\bar{\mu}^\gamma{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}_\alpha - B b^\gamma_\alpha\,\bar{\lambda}^\alpha]$ ed in un vettore normale $N^i\left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}^\beta\right]$.

Le formule (15), (18), (24) dànno le componenti dei vettori λ^i, μ^i, $\mu^i{}_{/k}\,\lambda^k$ per la curva Γ, data dalle (14), tracciata sulla Σ, e quindi permettono il calcolo dell'invariante T, legato ai punti di Γ, mediante la (6).

Per semplificare il calcolo assumiamo la metrica (1) di V_3 in forma geodetica, assumendo come linee coordinate y^3 le linee della congruenza di geodetiche normali alla superficie Σ. Pertanto in questo caso particolare la Σ viene rappresentata dalle equazioni

$$y^1 = x^1 \quad ; \quad y^2 = x^2 \quad ; \quad y^3 = 0. \tag{25}$$

Si hanno poi per le componenti del tensore fondamentale le relazioni

$$g_{13} = g_{23} = 0 \quad , \quad g_{33} = 1, \tag{26}$$

e per il tensore fondamentale della metrica (9) le relazioni

$$a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(y^1, y^2, 0). \tag{27}$$

Come conseguenze facili delle (25) e (26) si hanno le

$$y^i_\alpha = g^i_\alpha$$

$$N^i = g^i_3$$

e di conseguenza le (15) (18) (24) assumono rispettivamente le forme

$$\lambda^i = g^i_\alpha \bar{\lambda}^\alpha \tag{15}'$$

$$\mu^r = g^r_\beta \bar{\mu}^\beta + g^r_3 B \tag{18}'$$

$$\mu^k_{/\rho} \lambda^\rho = g^k_\gamma [\bar{\mu}^\gamma_{/\beta} \bar{\lambda}^\beta - B b^\gamma_\beta \bar{\lambda}^\beta] + g^k_3 \left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta} \bar{\lambda}^\alpha \mu^\beta\right]. \tag{24}'$$

Pertanto la (6) assume, per note proprietà del tensore di Ricci, la forma

$$-c^2 T = \varepsilon_{\alpha 3 \gamma} B [\lambda^\alpha \bar{\mu}^\gamma_{/\beta} \bar{\lambda}^\beta - B b^\gamma_\beta \bar{\lambda}^\beta \bar{\lambda}^\alpha] + \varepsilon_{\alpha\beta 3} \left[\bar{\lambda}^\alpha \bar{\mu}^\beta \frac{dB}{ds} + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\mu}^\beta b_{\varrho\sigma} \bar{\lambda}^\varrho \bar{\mu}^\sigma\right].$$

Osserviamo ora che, nel sistema di riferimento che abbiamo adottato, in forza delle (26) e (27) le componenti $\varepsilon_{\alpha\beta 3}$ del tensore di Ricci coincidono con le componenti $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ del tensore di Ricci bidimensionale, calcolato in relazione alla metrica di Σ.

Abbiamo quindi

$$-c^2 T = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left[- B \lambda^\alpha \mu^\beta_{/\gamma} \lambda^\gamma + B^2 \bar{\lambda}^\alpha b^\beta_\gamma \bar{\lambda}^\gamma + \bar{\lambda}^\alpha \mu^\beta \frac{dB}{ds} + \lambda^\alpha \bar{\mu}^\beta b_{\varrho\sigma} \bar{\lambda}^\varrho \mu^\sigma\right]$$

e quindi, ricordando le (19), (24), (25),

$$-(B^2 + G^2) T = - B \frac{dG}{ds} + G \frac{dB}{ds} + \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} [B^2 \lambda^\alpha b^\beta_\gamma \bar{\lambda}^\gamma + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\mu}^\beta b_{\varrho\sigma} \bar{\lambda}^\varrho \bar{\mu}^\sigma],$$

e in definitiva

$$T\, ds = d \operatorname{arctg} G/B + \bar{\varepsilon}_{\beta\alpha} [B^2 \bar{\lambda}^\alpha b^\beta_\gamma \bar{\lambda}^\gamma + \lambda^\alpha \mu^\beta b_{\varrho\sigma} \bar{\lambda}^\varrho \bar{\mu}^\sigma] ds$$

ossia, ricordando le (23) e (24),

$$T\, ds = d \operatorname{arctg} G/B - (B^2 + G^2)(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \bar{\lambda}^\alpha b^\beta_\gamma \bar{\lambda}^\gamma) ds \tag{29}$$

6. La formula (29) a cui siam giunti alla fine del precedente paragrafo ci permette di enunciare il seguente

TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale curvilineo*

$$\oint T\, ds$$

calcolato lungo una qualunque linea chiusa tracciata su una superficie Σ *sia nullo è che ogni linea di* Σ *sia linea di curvatura.*

La dimostrazione è immediata solo che si osservi che la (29) scompone l'elemento differenziale $T\,ds$ nella somma di due addendi; l'addendo d arctg G/B dà contributo nullo se integrato lungo una qualunque linea chiusa della superficie, perché non esistono su Σ dei punti nei quali sia contemporaneamente $B = G = 0$ e ciò in base alla (20). L'altro addendo è identicamente nullo lungo le linee di curvatura, in base alla (22).

Poniamo ora che V_3 sia in particolare uno spazio tridimensionale a curvatura costante S_3. Rappresentato S_3 con il classico modello proiettivo dato da uno spazio lineare in cui è assegnata una quadrica assoluto $Q = 0$, chiamiamo sfere (generalizzate) di S_3 le superfici che appartengono ai fasci definiti dalla quadrica assoluto e da un piano generico contato due volte. Si verifica facilmente che tali sfere in S_3 sono caratterizzate dall'avere le linee di curvatura indeterminate e ciò ricorrendo ad una delle classiche forme a cui si può ridurre la metrica di S_3. Si ha quindi immediatamente il

COROLLARIO. – *La condizione*

$$\oint T\,ds = 0$$

per qualunque linea della superficie caratterizza le sfere di uno spazio a curvatura costante.

Astronomia. — *Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Le isofote coronali.* Nota II di MASSIMO CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Facendo seguito ad una mia Nota, già apparsa (1) su questi « Rendiconti », sopra l'eclisse totale di Sole, che ho potuto osservare a Khartoum il 25 febbraio 1952 con la spedizione organizzata dall'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, passo ora ad occuparmi delle isofote coronali, che ho potuto tracciare nelle mie fotografie *fino alla distanza di due diametri solari.*

4. Per quanto riguarda la parte ottico–meccanica, il tracciatore di isofote (la cui parte elettrica è stata descritta al n. 3 della precedente Nota) consiste essenzialmente in un carrello, dotato di due movimenti microme-

(*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Cfr. M. CIMINO, *Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare, durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952*, in « Rend. Lincei », 1953 sem. II, vol. XV. Cfr. anche M. CIMINO, *La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario a Khartoum*, id., 1952, sem. II, vol. XIII; come pure M. CIMINO, *Osservazioni sopra la forma della corona e dei raggi coronali*, ecc. in « Atti XI Convegno Volta » Acc. Naz. dei Lincei, 1953.

trici ortogonali tra loro e portante un portalastre sul quale possono essere fissate due lastre; la prima col fotogramma da esaminare e l'altra vergine. La prima lastra è aperta dalle due faccie, in modo che la luce possa attraversarla; l'altra invece è aperta soltanto da una faccia e protetta dalla luce esterna.

Solidali con la parte fissa dell'apparecchio sono due proiettori; il primo di essi contiene una lampadina elettrica, alimentata da un accumulatore che illumina un piccolo diaframma (del diametro di circa 0,5 mm.) il quale, a sua volta, viene proiettato sul fotogramma in esame per mezzo di un obbiettivo da microscopio a piccolo ingrandimento; l'altro proiettore contiene invece una lampada al neon, che illumina un analogo diaframma, proiettato anche esso con analogo microscopio sulla lastra vergine. Le immagini dei due diaframmi sulle rispettive lastre hanno un diametro di circa 3 centesimi di millimetro. Al di sopra del fotogramma in esame, ed in asse col primo proiettore, si trova la cella fotoelettrica. In tal modo, allorché il punto luminoso del primo proiettore passa in una zona del fotogramma che abbia una densità prefissata, la lampada al neon si accende ed impressiona la lastra vergine in un punto. Essendo le due lastre solidali allo stesso carrello, rimane assicurata una perfetta rispondenza tra esplorazione e restituzione dell'immagine.

Aggiungerò che, poiché l'apparato sopra descritto ha subìto, durante la sua costruzione, diverse modifiche e messe a punto, il tracciamento delle isofote è stato effettuato in massima parte adoperando il microfotometro registratore di Moll di dotazione dell'Osservatorio di Monte Mario, con un metodo del quale riferirò in altro lavoro.

5. Isofote della corona media ed esterna. – Le isofote della corona media ed esterna rappresentate nella fig. 1 sono state ricavate, principalmente, dalla pellicola n. 5, mentre la n. 6 è servita piuttosto come controllo. Non sono state tracciate le isofote della zona immediatamente vicina al bordo solare (corona interna), essendo l'immagine solare troppo piccola – sulla pellicola il diametro solare essendo di appena 3 mm. – e anche perché la zona vicina al bordo è risultata sovraesposta, come era da attendersi, dato che le fotografie furono eseguite avendo di mira lo studio della corona esterna e dei pennacchi.

Le isofote sono state tracciate fino a due diametri solari dal bordo; sebbene il grande pennacchio a NE abbia una punta *sottilissima*, che sulla negativa si segue fino ad oltre 3 diametri, la luce diffusa del cielo impedisce praticamente di eseguire tracciati fotometrici oltre la distanza massima da noi raggiunta. L'intervallo tra le isofote è di *una grandezza stellare*, ma sono state tracciate anche due isofote intermedie che, nella figura, sono tratteggiate. Mancando una calibrazione assoluta delle pellicole, i numeri scritti accanto alle isofote sono convenzionali, e soltanto la loro differenza rappresenta *differenze di grandezze stellari*. I piccoli cerchi disegnati nelle direzioni NS e EW rappresentano valori ricavati dai tracciati microfotometrici nelle

due direzioni (come è stato spiegato al n. 3 della precedente Nota); il loro accordo coi punti delle isofote tracciate con l'altro metodo è soddisfacente nei limiti degli errori che possiamo aspettarci in questo genere di misure, onde è sembrato sufficiente limitare il controllo soltanto a queste due direzioni. Il trattino in basso a destra dà la scala sulla pellicola. La proiezione sulla sfera celeste dell'asse polare solare è indicato dai due tratti P.N. e P.S.

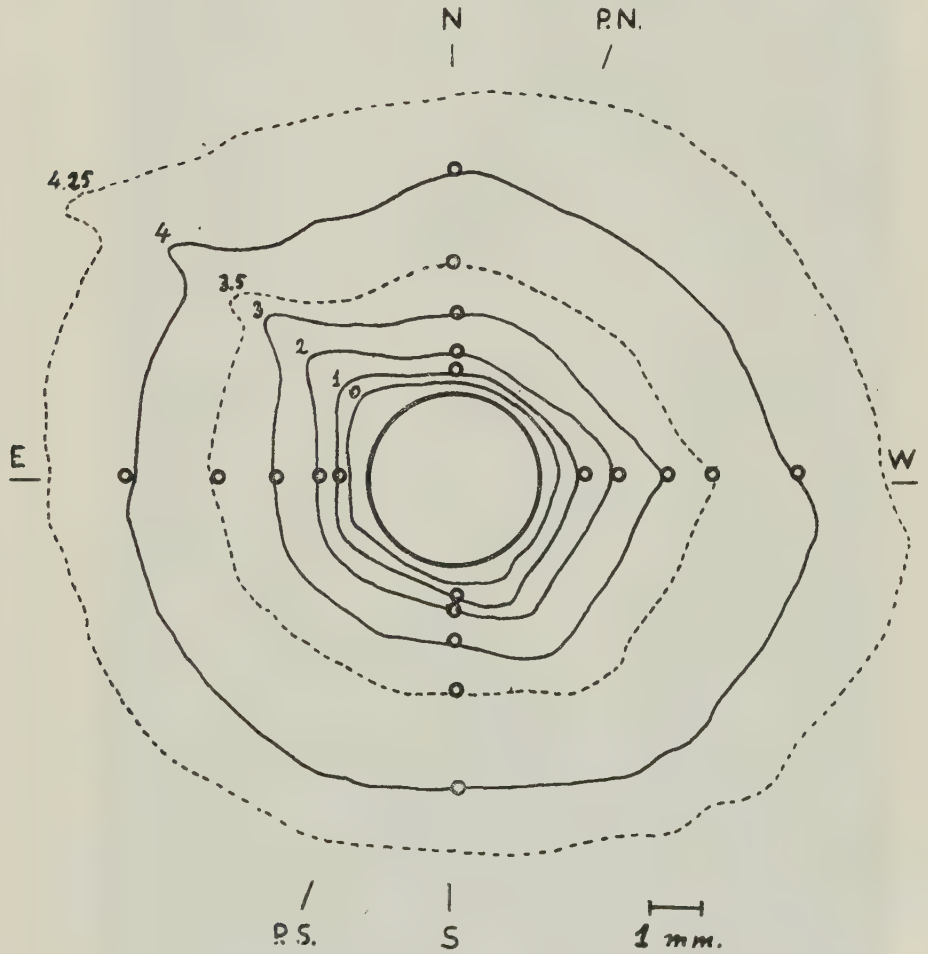


Fig. 1. – Isofote della corona solare del 25 febbraio 1952. L'intervallo tra le curve a tratto pieno è di una grandezza stellare.

Alcune riproduzioni delle fotografie della corona da me ottenute a Khartoum si trovano nei lavori citati al n. 1 della precedente Nota. Ma, per avere un'idea più completa della forma della corona e dei pennacchi riproduco nella fig. 2 un *disegno* che è stato tratto dallo studio di tutte le mie fotografie.

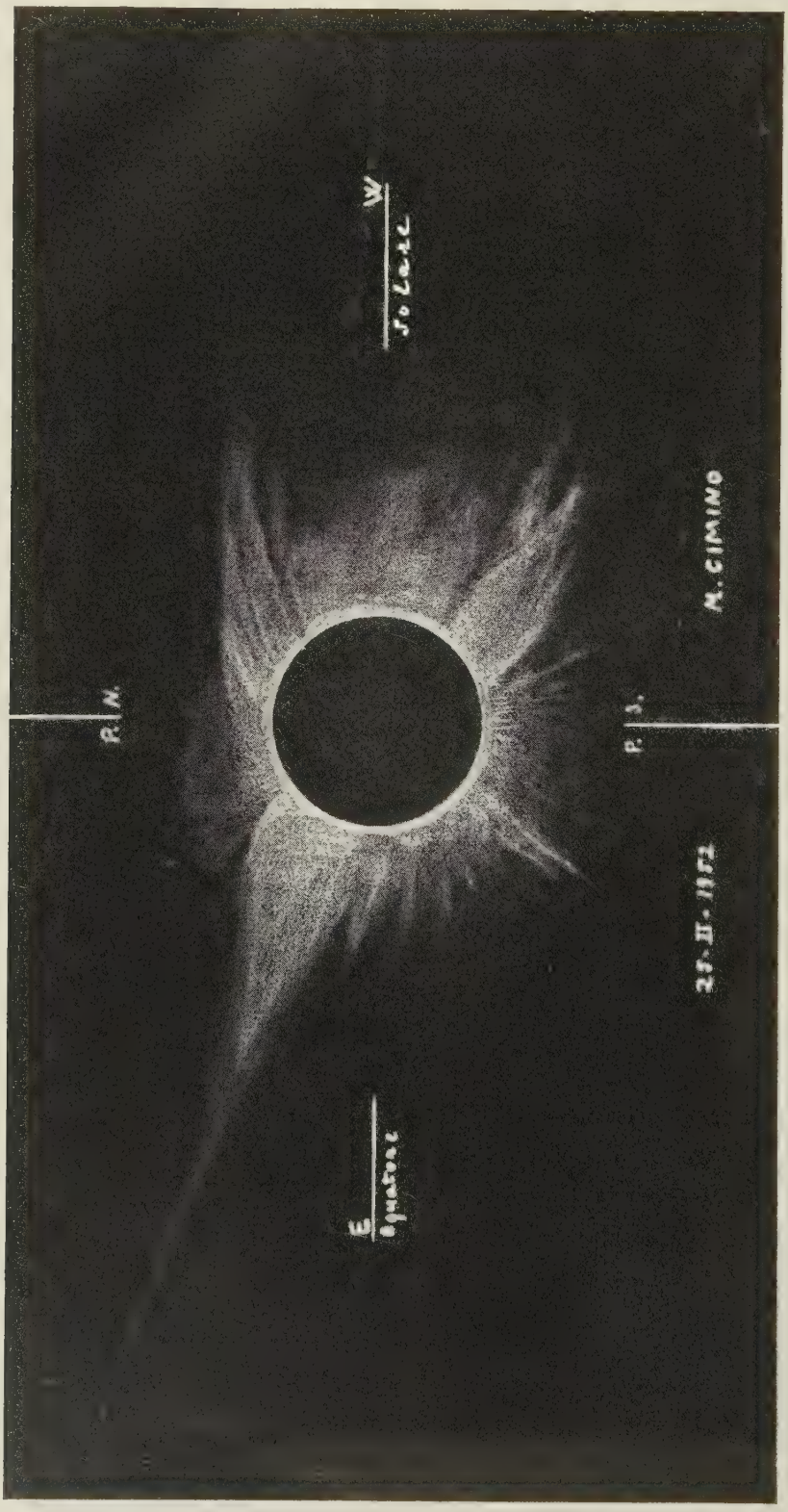


Fig. 2. – La corona solare osservata a Khartoum il 25 febbraio 1952.
Disegno tratto dalle fotografie.

Nella fig. 3, infine, è rappresentata in un grafico la variazione della brillanza media della corona del 25 febbraio 1952 in funzione della distanza dal bordo solare, espressa in raggi solari $R_\odot$. Sulle ascisse sono rappresen-

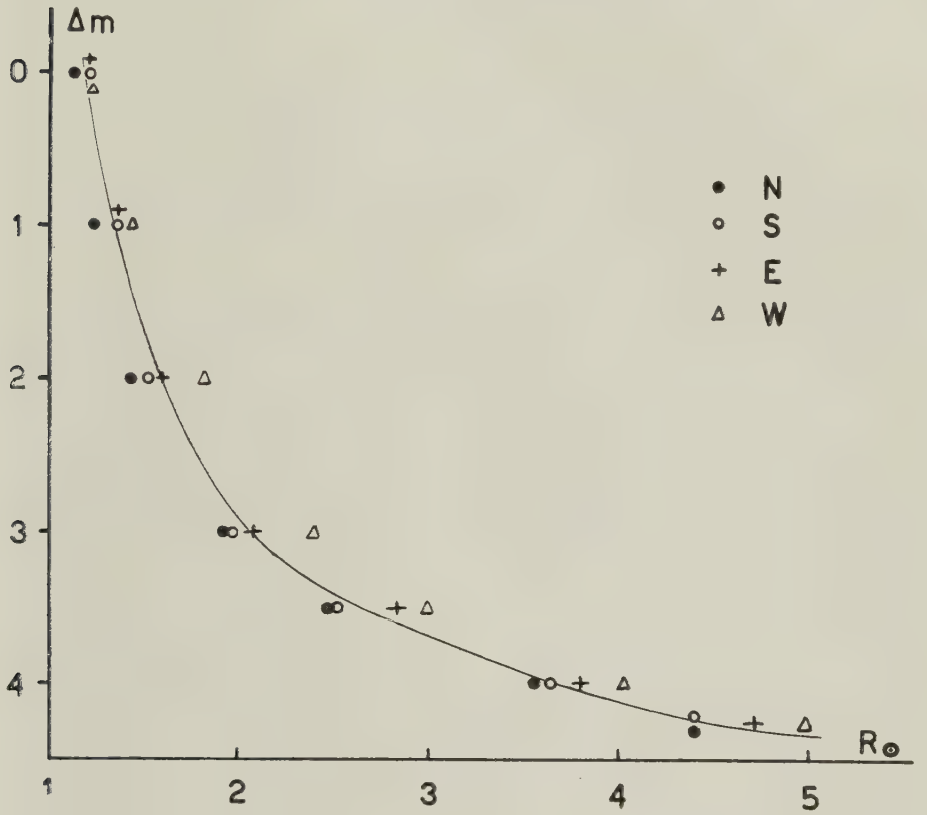


Fig. 3. – Variazione della brillanza media della corona del 25 febbraio 1952 in funzione della distanza del bordo solare.

tate *differenze di grandezza stellare* Δm. Sono state scelte 4 direzioni; dal centro verso est, ovest, nord e sud; la curva rappresenta la variazione media in queste 4 direzioni, le quali risultano tra le *meno* influenzate dai pennacchi.

In una prossima Nota darò i risultati delle misure polarimetriche.

Geodesia. — *Per una più precisa definizione delle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide.* Nota [*] di BENIAMINO GULOTTA, presentata dal Socio C. MINEO.

1. Condizione prima affinché si possa parlare di *deviazioni locali* del Geoide dall'Ellissoide, è, com'è ovvio, che si sia stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti delle due superficie, in modo che alle coordinate astronomiche di un punto del Geoide, determinabili con le osservazioni, si possano far corrispondere quelle ellissoidiche, effettivamente calcolabili nel punto corrispondente dell'Ellissoide.

Noi possiamo far sì che Geoide ed Ellissoide abbiano un punto iniziale comune M_0 ed ivi la stessa normale (la verticale del punto M_0 coincide quindi con la normale all'Ellissoide nello stesso punto), come in effetti si usa fare. E potremo qui, per semplicità, limitarci a supporre che ci si muova e si operi idealmente sul Geoide, pure sconoscendone la natura geometrica [1], e ammettere che, per mezzo dei più progrediti metodi astronomico–geodetici si possa determinare sul Geoide una rete di triangoli geodetici (con misure di base e di angoli) e determinare astronomicamente latitudine l e longitudine λ d'ogni vertice della rete stessa.

Le coordinate x^*, y^*, z^* (rispetto a un prefissato riferimento cartesiano) di un punto M* del Geoide, in un conveniente intorno del punto iniziale M_0, sono quindi da considerarsi come funzioni *sconosciute* (essendo, appunto, sconosciuta la superficie su cui si opera) di due parametri l, λ, numericamente determinabili, astronomicamente, in cgni punto M*.

Ma come faremo per far corrispondere al punto M* del Geoide un *ben determinato* punto M dell'Ellissoide, del quale punto si possano effettivamente calcolare le coordinate geografiche φ e ω?

Qui sta la difficoltà, peraltro già da tempo notata da vari autori [2]. Con i metodi pratici, in fondo, la corrispondenza che si viene a stabilire tra i punti del Geoide e quelli dell'Ellissoide dipende dal modo col quale la

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1954.

(1) Nel caso reale, si sa come le misure compiute sulla superficie fisica della Terra si riducano, con metodi più o meno approssimati, al Geoide.

(2) Si veda, per esempio, E. KOHLSCHÜTTER, *Die Definition der ellipsoidischen Koordinaten*, «Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme», Berlin 1931–32, Heft 2. Questo Autore riporta le definizioni di deviazione totale della verticale di HELMERT (*Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lothabweichungen mit Rücksicht auf Lothkrümmung*, «Sitzungsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften», Band 42, Berlin 1900) e di PIZZETTI (*Höhere Geodäsie*, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. VI, 1, Leipzig, 1906–1925), notando che il punto dell'Ellissoide corrispondente al punto fisico della superficie terrestre (nel quale si compiono le osservazioni astronomico–geodetiche) non è determinato e a rigore non se ne possono calcolare le coordinate geografiche.

rete geodetica, misurata e calcolata sul Geoide, si distende sull'Ellissoide; il che val quanto dire che quella corrispondenza resta indeterminata.

Non è forse inutile insistere su questo punto, per quanto evidente esso sia. Consideriamo un triangolo geodetico, della rete geoidica, $M_0 M_1^* M_2^*$, avente, per semplicità, un vertice nel punto iniziale M_0, *e supponiamo addirittura che se ne siano misurati non soltanto i tre angoli, ma anche i tre lati*, attraverso tre particolari reti (come si usa per la misura e lo sviluppo delle basi). Per avere il corrispondente punto M_1 dell'Ellissoide si può fare così: si può fare uscire dal punto M_0 dell'Ellissoide un arco di geodetica ellissoidica di azimut A_{01} (supponiamo di aver misurato quest'azimut sull'orizzonte del punto M_0 del Geoide) e avente la stessa lunghezza dell'arco geoidico $M_0 M_1^*$. Il punto M_1 è, così, perfettamente determinato, e se ne possono calcolare le coordinate geografiche φ_1 e ω_1 (e anche le coordinate cartesiane rispetto a un dato sistema di assi). Il punto corrispondente al punto M_2^* si può determinare allo stesso modo, perché di M_2^* si conoscono, sul Geoide, la distanza geodetica $M_0 M_2^*$ dal punto M_0 e l'azimut A_{02} di $M_0 M_2^*$ (essendo stato misurato l'angolo $M_1^* M_0 M_2^*$). Ma si potrebbe scegliere come corrispondente di M_2^* quel punto dell'Ellissoide che si ottiene facendo uscire dal punto M_1 già rappresentato un arco geodetico formante con $M_1 M_0$ un angolo uguale a $M_0 M_1^* M_2^*$ e di lunghezza uguale a $M_1^* M_2^*$. E allora si otterrebbe come corrispondente un ben altro punto dell'Ellissoide e si perderebbe ogni nozione di corrispondenza tra le due superficie, giacché tra l'altro si verrebbe ad ammettere che a ogni geodetica del Geoide corrisponda una geodetica dell'Ellissoide (il che avviene soltanto, escludendo il caso ovvio di due superficie omotetiche, per coppie di superficie di Liouville, secondo un famoso teorema del Dini). E l'indeterminazione aumenta nel passare via via da un triangolo all'altro della rete. Né si può ammettere *a priori* che le oscillazioni del punto M dell'Ellissoide, corrispondente al punto M* del Geoide, siano irrilevanti.

Fin qui si tratta delle differenze $l - \varphi$, $\lambda - \omega$ (*deviazioni in latitudine e in longitudine*), che hanno, si può dire, carattere *locale*. Che dire, poi, della *deviazione in azimut*, cioè della differenza tra l'azimut in un punto d'una linea del Geoide e l'azimut della corrispondente linea dell'Ellissoide, nel punto corrispondente? Questa differenza ha, tra l'altro, carattere *ereditario*, come ha notato il Poincaré [3], e sulla questione ha poi insistito il Mineo [4].

Ma quì non vogliamo occuparci di tale questione. Crediamo che le due deviazioni, in latitudine e in longitudine, bastino e siano da preferire, *ai fini soltanto della determinazione delle deviazioni angolari del Geoide dall'Ellissoide*.

(3) Vedi POINCARÉ, *Sur les déviations de la verticale en géodésie*, « Bulletin astronomique », vol. XVIII, Paris 1901.

(4) Vedi C. MINEO, *Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra*, « Annali di Matematica pura e applicata », Tomo XIV (1935-36).

Importa, comunque, notare che queste deviazioni, come i fatti hanno dimostrato, sono reali, in quanto i valori trovati non si possono spiegare né con gli errori d'osservazione, né con il particolare modo di distendere la rete geoidica sull'Ellissoide, né con la necessaria approssimazione dei calcoli che si fanno sull'Ellissoide stesso. E poiché queste deviazioni hanno dunque una grande importanza, conviene poterle definire e determinare nel miglior modo possibile e senza ambiguità.

2. Un metodo, concettualmente semplicissimo, per raggiungere lo scopo, è già implicito nell'esempio dato nel numero precedente, a proposito del modo di attribuire all'Ellissoide la rete realizzata sul Geoide.

Al punto generico M* *del Geoide, del quale si abbia (direttamente per mezzo di misura e sviluppo di base o indirettamente per mezzo di calcoli di triangoli della determinata rete geoidica) la distanza geodetica* s *sul Geoide, dal punto iniziale* M_0, *e inoltre l'azimut misurato* A_0 *nel punto* M_0, *si faccia corrispondere il punto* M *dell'Ellissoide situato sulla geodetica ellissoidica che si spicca da* M_0 *sotto lo stesso azimut* A_0 *e che dista di* s *da* M_0. La corrispondenza così stabilita sulle due superficie è perfettamente definita e biunivoca, e si può avere con tutta la precisione che permettono le misure geodetiche eseguite sul Geoide e quelle astronomiche di latitudine e longitudine, che vanno eseguite, naturalmente, nel punto M*. (Dal punto di vista teorico, questa corrispondenza, secondo una concezione del Severi, si può intendere se si pensano le due superficie come tessuti formati da due fasci di fibre, le une inestendibili, costituite dalle geodetiche passanti per il polo M_0, e le altre elastiche, costituite dai circoli geodetici aventi il centro nel polo stesso: allora si può immaginare effettuata una specie di applicabilità dei due intorni, in modo che le fibre inestendibili del Geoide si sovrappongano alle corrispondenti dell'intorno ellissoidico, supposto irrigidito, e i circoli geodetici del Geoide si adattino elasticamente ai corrispondenti dell'Ellissoide) [5]. Del corrispondente punto M dell'Ellissoide si possono allora calcolare le coordinate geografiche (ellissoidiche) φ e ω; e quindi tanto φ e ω, quanto le differenze

$$\mu = l - \varphi \quad , \quad \nu = \lambda - \omega,$$

tra i dati osservati l, λ, e quelli calcolati λ, ω, andranno considerate, dal punto di vista teorico, come funzioni note di l, λ, e viceversa l, λ, μ, ν, potranno, quando occorre, ritenersi funzioni note di φ, ω [6].

(5) Vedi SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », Tomo XLII, 1917.

(6) Per l'angolo ε delle due normali, geoidica ed ellissoidica, in M* e M, si ha:

$$\varepsilon = \sqrt{\mu^2 + \nu^2 \cos^2 \varphi}\,.$$

E chiamando Γ l'azimut del piano di deviazione si ha poi:

$$\mu = \varepsilon \cos \Gamma \quad , \quad \nu = \varepsilon \operatorname{sen} \Gamma \sec \varphi.$$

Evidentemente le operazioni da farsi sul Geoide si complicano, giacché, per individuare il punto M dell'Ellissoide, non soltanto sono da eseguire osservazioni astronomiche di latitudine e longitudine in M*, ma bisogna rilegare direttamente il vertice M* della rete geoidica al vertice iniziale M_0, per avere la distanza $s = M_0 M^*$.

Ma queste operazioni andrebbero fatte ed estese a tutta la Terra (purtroppo son molte le regioni del tutto inesplorate da questo punto di vista) e gioverebbero per vedere se effettivamente le deviazioni μ e ν siano sempre piccole dell'ordine finora constatato e a decidere una grossa questione, cioè se due o più ellissoidi locali (chiamando così quelli che in un punto iniziale sono tangenti al Geoide) siano riducibili a uno solo, *dentro i limiti degli errori d'osservazione* (7).

3. Quanto allo scostamento lineare del Geoide dall'Ellissoide:

$$h = \sqrt{(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2 + (z^* - z)^2},$$

nulla si può affermare nelle suddette condizioni, giacché x^*, y^*, z^* sono, come s'è detto, funzioni sconosciute dei parametri l e λ, astronomicamente determinabili (n. 1); a meno che non si facciano intervenire speciali ipotesi, più o meno arbitrarie.

Chiamando α, β, γ i coseni direttori, sconosciuti, della retta M M* alla quale il segmento h appartiene, si ha:

$$x^* - x = h\alpha \quad , \quad y^* - y = h\beta \quad , \quad z^* - z = h\gamma.$$

Si deduce

$$(1) \qquad dh = \alpha\,(dx^* - dx) + \beta\,(dy^* - dy) + \gamma\,(dx^* - dx).$$

I coseni direttori della normale al Geoide nel punto M* (cioè della verticale per M*) sono:

$$X = \cos l \cos \lambda \quad , \quad Y = \cos l \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad Z = \operatorname{sen} l,$$

e quelli della normale all'Ellissoide nel punto corrispondente M sono

$$L = \cos \varphi \cos \omega \quad , \quad M = \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \quad , \quad N = \operatorname{sen} \varphi.$$

Si possono fare le seguenti due ipotesi (salvo a vedere se e in quale ordine d'approssimazione l'una o l'altra di esse possa considerarsi praticamente accettabile):

1ª Ipotesi. – La retta M M* è normale al Geoide nel punto M* (coincide, cioè, con la verticale del punto M*); allora

$$\alpha = X \quad , \quad \beta = Y \quad , \quad \gamma = Z,$$

(7) Vedi C. MINEO, *Sur la possibilité de remplacer deux ou plusieurs ellipsoïdes de référence par un ellipsoïde unique, et sur la détermination du Géoïde*, « Bulletin géodésique », N. 64, Paris, 1939. E anche: « Pubblicazioni dell'Osservatorio Astronomico di Palermo », Nuova Serie, N. 3, 1940.

e la (1) diviene:

$$dh = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

La forma differenziale lineare $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è nota e si trasforma facilmente in una forma differenziale in $d\varphi$ e $d\omega$. Intanto, essendo da considerare (sulla base dei valori finora trovati) μ e ν come quantità piccole (che diremo del prim'ordine) i cui quadrati sono del tutto trascurabili, si può scrivere

$$X = L - \mu \operatorname{sen}\varphi \cos\omega - \nu \cos\varphi \operatorname{sen}\omega \quad ,$$

$$Y = M - \mu \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega + \nu \cos\varphi \cos\omega \quad , \quad Z = N + \mu \cos\varphi.$$

E la (2) diviene:

$$dh = (\mu \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \nu \cos\varphi \operatorname{sen}\omega)\,dx +$$

$$+ (\mu \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \nu \cos\varphi \cos\omega)\,dy - \mu \cos\varphi\,dz.$$

E se l'Ellissoide locale è quello di equazioni parametriche [8]

$$x = \frac{a\cos\varphi\cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \quad , \quad y = \frac{a\cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \quad , \quad z = \frac{a(1 - e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}, \tag{3}$$

si trova, trascurando anche termini in μe^2 e νe^2:

$$dh = -a\,(\mu d\varphi + \nu \cos^2\varphi d\omega)\ [9]. \tag{4}$$

In sostanza si conclude che la congruenza delle rette MM* è una congruenza normale, a patto che sia

$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\nu \cos^2\varphi), \tag{5}$$

che è l'equazione trovata dal Villarceau [10]. E il Geoide resterebbe determinato come quella superficie della famiglia di superficie normali alla congruenza, passante per M_0. Sotto la condizione (5) la (4) dà:

$$h = -a\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mu d\varphi + \cos^2\varphi_0 \int_{\omega_0}^{\omega} \nu\,(\varphi_0, \omega)\,d\omega\right], \tag{6}$$

come nota il Mineo nelle citate *Lezioni*.

(8) S'intende che le coordinate cartesiane x^*, y^*, z^*, del punto M* del Geoide si riferiscono al triedro trirettàngolo avente il vertice nel centro dell'Ellissoide locale (3) e gli assi coincidenti con quelli dell'Ellissoide stesso.

(9) Supposto $\varepsilon \leq 10^{-4}$, $e^2 \cong 0{,}0067$, si ha $\varepsilon e^2 = 6{,}7 \times 10^{-7}$. Volendo trascurare solo quantità che non superano 10^{-8}, e quindi conservare i termini in μe^2 , νe^2, si avrebbe, in luogo della (4):

$$dh = -(\rho\mu\,d\varphi + r\nu \cos\varphi d\omega)$$

essendo ρ ed r, rispettivamente, il raggio di curvatura del meridiano e il raggio del parallelo alla latitudine φ sull'Ellissoide (3).

(10) Vedi VILLARCEAU, *Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre*, « Journal de Math. pures et appliquées », vol. 18, 1873.

Tutto ciò suppone che μ e ν si siano misurate in un grande numero di punti dell'intorno del punto iniziale M_0 del Geoide e che per interpolazione si siano potute costruire le due funzioni μ e ν di φ e ω (nulle nel punto iniziale M_0).

La teoria, data dal Mineo, in una Memoria precedentemente citata, si fonda dunque sull'ipotesi che si possano effettivamente calcolare le coordinate ellissoidiche φ e ω del punto generico M, intersezione della verticale per M* con l'Ellissoide; il che, a rigore, è impossibile [11]. Ma il Mineo ha notato che nonostante ciò il Geoide si può intendere determinato *in prima approssimazione* [12].

2ª Ipotesi. – La retta MM* è normale all'Ellissoide nel punto M; allora

$$\alpha = L \quad , \quad \beta = M \quad , \quad \gamma = N.$$

Epperò:

$$x^* = x + hL \quad ; \quad y^* = y + hM \quad , \quad z^* = z + hN;$$

quindi

$$0 = X dx^* + Y dy^* + Z dz^* = X dx + Y dy + Z dz +$$

$$+ (XL + YM + ZN)\, dh + h\,(X dL + Y dM + Z dN)$$

ovvero (nella stessa approssimazione dell'ipotesi precedente):

$$dh = -(a + h)\,\mu d\varphi - (a + h)\,\nu \cos^2 \varphi d\omega, \tag{7}$$

che è un'equazione a differenziali totali, e si vede subito che, anche in questa seconda ipotesi, deve valere la condizione (5). Sotto tale condizione la (7) dà:

$$\log\left(1 + \frac{h}{a}\right) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mu d\varphi - \cos^2 \varphi_0 \int_{\omega_0}^{\omega} \nu\,(\varphi_0\,,\,\omega)\, d\omega, \tag{8}$$

tenuto conto che nel punto iniziale $M_0\,(\varphi_0\,,\,\omega_0)$ dev'essere $h = 0$.

Nel caso che h/a si possa considerare (come μ e ν) una quantità piccola del prim'ordine, la (7) si riduce alla (4) e quindi in luogo della (8) si ha ancora la (6) [13].

(11) Dal punto di vista pratico si tratta dunque di vedere se e con quale approssimazione è lecito confondere il punto M, ottenuto come s'è detto al n. 2, col punto in cui la verticale di M* incontra l'Ellissoide.

(12) Vedi C. MINEO, *Lezioni di Geodesia*, « Arti Grafiche Antonio Renna », Palermo, 1952.

(13) E sarebbe facile, anzi, mostrare che lo scostamento lineare tra le due superficie contato lungo la normale al Geoide e quello contato lungo la normale all'Ellissoide differiscono, in rapporto ad a, per una quantità piccola del terzo ordine. (Per un calcolo sommario si consideri il triangolo che ha per vertici un punto M* del Geoide e i punti M', M'', in cui l'Ellissoide incontra rispettivamente le normali, per M*, al Geoide e all'Ellissoide, triangolo che può ritenersi rettangolo in M'').

Naturalmente tanto la prima quanto la seconda ipotesi sono arbitrarie. Epperò se si ha di mira di risolvere il problema di trovare le equazioni parametriche del Geoide (problema del quale non intendevamo qui occuparci) cioè le funzioni

$$x^* = x^*(l, \lambda) \quad , \quad y^* = y^*(l, \lambda) \quad , \quad z^* = z^*(l, \lambda)$$

nell'intorno di un suo punto M_0, non c'è che da procurarsi con misure geodetiche i valori dei coefficienti D, D', D'' della sua seconda forma differenziale; dopo di che il problema è ridotto alle quadrature [14].

Fisica matematica. — *Multipoli e onde di Schelkunoff*. Nota [*] di ITALO FERRARI, presentata dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Nella sua teoria dell'antenna radio lo Schelkunoff [1] ha introdotto una successione di soluzioni per le equazioni dei campi elettromagnetici armonici.

Tali soluzioni, che diremo, per brevità, onde di Schelkunoff, hanno un polo in un punto dello spazio in cui porremo l'origine O delle coordinate: esse emanano da O che può perciò chiamarsi il loro epicentro. Inoltre le onde di Schelkunoff possiedono un asse di simmetria passante per O che potremo perciò far coincidere con l'asse delle z.

L'espressione del campo magnetico $\mathbf{H}^{(n)}$ dell'ennesima onda nel punto M dello spazio è:

$$\mathbf{H}^{(n)} = g_n(r) \frac{dP_{n+1}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} (M - O) \wedge \boldsymbol{k} \tag{1}$$

ove r vale la distanza di M da O, $g_n(r)$ è una funzione di r di cui scriveremo l'espressione fra poco, $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse z, θ l'angolo fra il vettore $M - O$ ed il semiasse positivo delle z, $P_{n+1}(\cos\theta)$ il polinomio di Legendre di ordine $n + 1$ nella variabile $\cos\theta$.

L'espressione di $g_n(r)$ è:

$$g_n(r) = \frac{\exp\left(-j\frac{\omega r}{c}\right)}{r^2} \sum_0^{n+1} \nu \frac{(n+\nu+1)!}{\nu!\,(n+1-\nu)!\left(\frac{2j\omega r}{c}\right)^\nu} \tag{2}$$

ove j è l'unità immaginaria, ω la pulsazione e c la velocità di propagazione dell'onda [2].

(14) Vedi C. MINEO, *Sulla determinazione intrinseca del Geoide*, «Memorie della Società Astronomica Italiana», Nuova Serie, vol. II, Roma, 1921.

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1954.

(1) S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves* (Van Nostrand, New York), Cap. X, 10.

(2) Col simbolo $\exp x$ si indica, come è noto, e^x.

Il numero intero n, il cui valore minimo sarà lo zero, verrà chiamato ordine dell'onda [3].

2. In varie questioni di elettromagnetismo si considera spesso il campo elettromagnetico armonico di un dipolo percorso da corrente sinoidale. Si considerano inoltre i campi dei cosiddetti «multipoli» simmetrici di ordine n che, se posti nell'origine e paralleli all'asse z come sempre supporremo, possono ottenersi derivando n volte rispetto a z il campo del dipolo, supposto anch'esso nell'origine e parallelo all'asse z. I campi dei multipoli presentano notevole analogia con le onde di Schelkunoff in quanto simmetrici rispetto all'asse z e con epicentro nell'origine. È perciò naturale attendersi che i campi dei multipoli e le onde di Schelkunoff non siano del tutto indipendenti: il Schelkunoff stesso infatti ha constatato la coincidenza, a meno di una costante moltiplicativa, del campo della sua prima onda con quello del dipolo.

In questa Nota dimostrerò *che il campo del multipolo di ordine n è una combinazione lineare dei campi delle prime n onde di Schelkunoff di ordine pari o dispari a seconda che n è pari o dispari; indicherò poi un metodo estremamente semplice per il calcolo dei coefficienti di quella combinazione lineare e ne determinerò il loro valore fino al multipolo di ordine 3. In particolare, dimostrerò la coincidenza, sempre a meno di una costante moltiplicativa, fra il campo di un quadripolo e quello della seconda onda di Schelkunoff.*

3. Il campo magnetico $\mathbf{H}_0$ di un dipolo di momento $\mathfrak{M}$ posto in O, parallelo all'asse z, percorso da corrente sinoidale, di pulsazione ω, vale:

$$\mathbf{H}_0 = \operatorname{rot} f(r)\,\boldsymbol{k} = f'(r)\operatorname{grad} r \wedge \boldsymbol{k} = \mathrm{F}(r)\,(\mathrm{M}-\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{k} \tag{3}$$

ove

$$f(r) = \frac{j\omega\mathfrak{M}}{4\pi r}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}r\right) \quad ; \quad \mathrm{F}(r) = \frac{1}{r}f'(r).$$

Il campo magnetico del multipolo di ordine n vale allora:

$$\mathbf{H}_n = \frac{\partial^n \mathbf{H}_0}{\partial z^n} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\mathrm{F}(r)\,(\mathrm{M}-\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{k}\right] = \frac{\partial^n \mathrm{F}(r)}{\partial z^n}(\mathrm{M}-\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{k} \tag{4}$$ [4]

ove $\partial^n \mathrm{F}/\partial z^n$ è un polinomio di grado n in $\cos\theta$ come è facile verificare per induzione completa. Infatti per $n = 1$ si ha [5]:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}\cos\theta.$$

(3) Si noti che l'onda di ordine n viene da Schelkunoff indicata con l'indice $n+1$.

(4) Si tenga presente:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{M}-\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{k} = \frac{\partial}{\partial z}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{k} = 0.$$

(5) Si ricordi che $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e quindi $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{z}{r} = \cos\theta$

Posto allora

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n} = \sum_0^n{}_s a_s \cos^s \theta = \sum_0^n{}_s a_s \left(\frac{z}{r}\right)^s \tag{5}$$

con a_s funzione di r, derivando rispetto a z si ha [6]:

$$\frac{\partial^{n+1} F}{\partial z^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_0^n{}_s a_s \left(\frac{z}{r}\right)^s = \sum_0^n{}_s \left(\frac{da_{s-1}}{dr} - \frac{(s-1)\, a_{s-1}}{r} + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \frac{(s+1)\, a_{s+1}}{r} \right) \cos^s \theta + \left(\frac{da_n}{dr} - n \frac{a_n}{r} \right) \cos^{n+1} \theta$$

ossia $\partial^{n+1} F / \partial z^{n+1}$ è un polinomio in $\cos\theta$ di grado $n+1$ come si era affermato.

4. Ciò posto consideriamo il polinomio di Legendre di ordine $s+1$:

$$P_{s+1} = \sum_0^s{}_i \beta_{s,\, i+1} \cos^{i+1} \theta \tag{7}$$

ove le $\beta_{s,\, i+1}$ sono i coefficienti del polinomio, cioè costanti numeriche *diverse da zero* solo se s e $i+1$ sono l'uno pari e l'altro dispari, ossia se $s+i$ *è pari*. Derivando rispetto a $\cos\theta$ ed indicando tale derivata con $\bar{P}_s$, si ha:

$$\bar{P}_s = \frac{dP_{s+1}}{d(\cos\theta)} = \sum_0^s{}_i \alpha_{s,\, i} \cos^i \theta$$

ove si è posto $\alpha_{s,\, i} = (i+1)\, \beta_{s,\, i+1}$.

Fissiamo ora un valore $\bar{r}$ di r tale che sia $g_s(\bar{r}) \neq 0$ per ogni $0 \leq s \leq n$, condizione questa verificata perché le $g_s(r)$ si annullano per un numero finito di valori di r. Porremo poi, indicando con c_s $(s = 0, 1, 2, \cdots n)$ $n+1$ costanti:

$$\frac{\partial^n F(r)}{\partial z^n} = \sum_0^n{}_s c_s g_s \bar{P}_s \tag{8}$$

ove il primo e il secondo membro si intendono calcolati per $r = \bar{r}$. Ora, per quanto si è detto al n. 3, il primo membro è un polinomio di grado n in $\cos\theta$ e sostituendo a $\bar{P}_s$ la sua espressione, si ha:

$$\sum_0^n{}_s a_s \cos^s \theta = \sum_0^n{}_s c_s g_s \sum_0^s{}_i \alpha_{s,\, i} \cos^i \theta = \sum_0^n{}_s \sum_s^n{}_i c_i g_i \alpha_{i,\, s} \cos^s \theta$$

relazione certamente soddisfatta se sono uguali i coefficienti di $\cos\theta$ sia al primo che al secondo membro di tale equazione, cioè se:

$$\sum_s^n{}_i c_i g_i \alpha_{i,\, s} = a_s \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots n). \tag{9}$$

Le (9) costituiscono un sistema di $n+1$ equazioni lineari e non omogenee nelle $n+1$ incognite c_i. Nel determinante dei coefficienti di questo

(6) Si ponga per convenzione $a_{-1} = 0$, $a_{n+1} = 0$.

sistema risultano nulli tutti gli elementi a sinistra della diagonale principale: esso vale perciò il prodotto degli elementi di tale diagonale ed è diverso da zero, perché sono diverse da zero tutte le $g_s\,\alpha_{s,s}$.

Il sistema (9) è pertanto risolubile ed in un sol modo. L'espressione del campo magnetico $\mathbf{H}_n$ sulla sfera di raggio $\bar{r}$ del multipolo di ordine n, tenendo presente la (4), la (8) e la (1), diventa:

$$\mathbf{H}_n = \sum_0^n{}_s\, c_s\, \mathbf{H}^{(s)}, \tag{10}$$

ossia il campo magnetico del multipolo di ordine n ed il campo rappresentato dalla somma dei campi delle prime n onde di Schelkunoff, con i coefficienti c_s univocamente determinati dal sistema (9), coincidono sulla sfera di raggio $\bar{r}$. Per il teorema di unicità per le equazioni di Maxwell, cui soddisfano sia le onde di Schelkunoff che i multipoli, la (10), e di conseguenza la (8), è valida in tutto lo spazio esterno alla sfera considerata, ossia per ogni $r > \bar{r}$ e per ogni θ.

È facile ora verificare che le c_s sono indipendenti da $\bar{r}$. Infatti se le c_s avessero due valori diversi per $\bar{r} = r_1$, $\bar{r} = r_2\,(r_2 > r_1)$, per $r > r_2$ la (8) e di conseguenza la (9) sarebbero soddisfatte per due valori diversi delle c_i, mentre il sistema (9) (esclusi al più i punti dove qualcuna delle $g_i\,(r)$ è nulla) ammette una sola soluzione. Le c_s sono perciò costanti assolute. Si ha così, poiché la (8) esprime l'uguaglianza di due funzioni analitiche per $r > \bar{r}$, che essa è valida per ogni r; e perciò la (10) vale per ogni r e θ e vale anche, come si verifica subito in base alla prima equazione di Maxwell, sostituendo i campi elettrici ai campi magnetici. Si conclude perciò, come si era già affermato, che il campo elettromagnetico del multipolo di ordine n è una combinazione lineare dei campi elettromagnetici delle prime n onde di Schelkunoff.

5. Passiamo ad esporre un metodo per il calcolo dei parametri c_s.

A questo scopo proveremo anzitutto che i coefficienti a_s delle potenze di z/r nella (5) valgono il prodotto di $\exp\left(-j\frac{\omega}{c}r\right)$ per un polinomio in r^{-1} e che in tale polinomio compaiono solo potenze di r^{-1} superiori alla seconda, escluso a_n in cui compare anche il quadrato di r^{-1}.

Tale affermazione è ovvia nel caso $n = 0$. Per dimostrarla in generale applichiamo ancora il metodo d'induzione completa, cioè supponiamola verificata per i coefficienti della (5) e verifichiamola di conseguenza per i coefficienti della (6). Si vede subito infatti da questa equazione che il coefficiente di $\cos^s\theta$ vale $\exp\left(-j\frac{\omega}{c}r\right)$ per un polinomio in r^{-1} il cui grado più basso è quello di a_{s-1}, grado per ipotesi maggiore di due se $s < n$, uguale a due se $s = n + 1$. La nostra affermazione è perciò completamente provata.

Il termine in r^{-2} dello sviluppo del multipolo di ordine n si ottiene dunque derivando n volte rispetto ad r il coefficiente A_0 di r^{-2} in $a_0 \equiv F\,(r)$

perché le altre derivazioni dànno luogo a potenze di r^{-1} di grado superiore al secondo. Poiché questo coefficiente vale $\frac{j\omega\mathfrak{M}}{4\pi}\left(-\frac{j\omega}{c}\right)^{n}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}r\right)$, il coefficiente A_n di r^{-2} in a_n a meno dell'esponenziale, vale $\frac{j\omega\mathfrak{M}}{4\pi}\left(-j\frac{\omega}{c}\right)^{n+1}$.

Ora i primi e secondi membri di (9) si possono considerare, dopo una divisione per $\exp\left(-j\frac{\omega}{c}r\right)$, come polinomi in r^{-1} che devono avere uguali i coefficienti dei termini in r^{-2}. Poiché tali coefficienti in $g_i(r)$, come risulta dalla (2), valgono uno, qualunque sia l'indice i, mentre in a_s sono nulli per $s < n$, si ha:

$$\sum_{s}^{n}{}_{i} c_i \alpha_{i,s} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{11}$$

e per $s = n$

$$c_n \alpha_{n,n} = \frac{j\omega\mathfrak{M}}{4\pi}\left(-\frac{j\omega}{c}\right)^{n+1}. \tag{11'}$$

Le (11) e le (11′) permettono il calcolo delle c_i in modo molto semplice. È da notare che se n è pari sono nulle le c_i con i dispari, viceversa se n è dispari sono nulle le c_i con i pari. Per provare ciò si ricordi che le $\alpha_{i,s}$ sono diverse da zero solo se $s + i$ è pari. Allora, in ognuna delle (11) solo i coefficienti di c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, ecc. sono diversi da zero, cioè in quelle equazioni dove s è pari compaiono solo le c_i con i pari, con s dispari le c_i con i dispari. Quindi il sistema (11) e (11′) si può dividere in due: quello che ha per incognite le c_i con indice pari e quello che ha per incognite le c_i con indice dispari. Ora quest'ultimo, se, per fissare le idee, n è pari, è omogeneo ed il suo determinante che è ancora un prodotto delle $\alpha_{s,s}$ è diverso da zero, quindi le c_i con l'indice dispari sono nulle; analoghe considerazioni valgono per n dispari.

Possiamo perciò concludere che, come si è già affermato, ogni multipolo di ordine n è una combinazione lineare delle prime n onde di Schelkunoff di ordine pari o dispari a seconda che n è pari o dispari.

6. Dalle (11) e (11′) si ricavano le relazioni ricorrenti

$$c_n = \frac{j\omega\mathfrak{M}}{4\pi\alpha_{n,n}}\left(-\frac{j\omega}{c}\right)^{n+1} \quad ; \tag{12}$$

$$c_{n-2r} = -\frac{1}{\alpha_{n-2r,n-2r}}\sum_{1}^{r}{}_{s}\,\alpha_{n-2r+2s,n-2r}\,c_{n-2r+2s}$$

ove $r = 1, 2, \cdots n/2$ se n è pari, $r = 1, 2, \cdots (n-1)/2$ se n è dispari. In particolare per $n = 0$, $n = 1$ si ha, rispettivamente, solo c_0 e c_1 diverse da zero, perciò il campo del dipolo e del quadripolo coincidono a meno di una costante moltiplicativa con la prima e la seconda onda di Schelkunoff. Anzi, tenendo presente che $\alpha_{0,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$, dalle (12) si ha:

$$c_0 = \frac{\omega^2\mathfrak{M}}{4\pi c} \qquad c_1 = -\frac{j\omega^3\mathfrak{M}}{12\pi c^2}.$$

Nel caso $n = 2$ (sestipolo) nelle (10) sono diverse da zero solo c_0 e c_2, e dalle (12) si ha, essendo $\alpha_{2,0} = -3/2$, $\alpha_{2,2} = 15/2$:

$$c_0 = -\frac{\omega^4 \mathfrak{M}}{20\pi c^3} \qquad c_2 = -\frac{\omega^4 \mathfrak{M}}{30\pi c^3}.$$

Nel caso $n = 3$ (ottopolo) sono diverse da zero solo c_1 e c_3 ed essendo $\alpha_{3,3} = 35/2$, $\alpha_{3,1} = -15/2$ si ha:

$$c_1 = \frac{j\omega^5 \mathfrak{M}}{28\pi c^4} \qquad c_3 = \frac{j\omega^5 \mathfrak{M}}{70\pi c^4}.$$

Non insisteremo su altri casi particolari, il cui studio, per le (12), non offre alcuna difficoltà concettuale.

Termineremo osservando che, dalla risoluzione delle (10) rispetto alle $\mathbf{H}^{(s)}$ si ricava che ogni onda di Schelkunoff di ordine n si può esprimere come somma di multipoli di ordine minore o uguale a n.

Fisica matematica. — *Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto.* Nota (*) di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

Hermann Minkowski ha (1) per primo fondato su basi sicure una teoria dei fenomeni elettromagnetici che si svolgono nei corpi in moto.

Consideriamo (2) un sistema S inerziale di riferimento rispetto al quale un corpo C si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità $\boldsymbol{v}$. Sia S′ un sistema di riferimento solidale con C, quindi mobile rispetto ad S con la velocità $\boldsymbol{v}$ uniforme e costante. S′ è anche un sistema inerziale. Ammettiamo che C sia isotropo ed omogeneo elettricamente e magneticamente ed anche dal punto di vista della conducibilità elettrica, talché il suo comportamento elettromagnetico è descrivibile mediante le costanti ε, μ, σ.

Indichiamo con un accento le grandezze elettromagnetiche classiche che figurano nelle equazioni di Maxwell concernenti i fenomeni riferiti ad S′. Esse sono

$$\mathfrak{E}', \mathfrak{D}', \mathfrak{B}', \mathfrak{H}', \mathfrak{J}', \rho'.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1954.

(1) Cfr. il suo lavoro *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, 1907; «Math. Ann.», 1910.

(2) La teoria di Minkowski e alcune considerazioni che seguono si estendono ai casi in cui il moto del corpo C non è traslatorio non accelerato, quando però la velocità $\boldsymbol{v}$ che può essere quindi supposta funzione del posto e del tempo del sistema di osservazione S soddisfi ad una certa limitazione espressa in A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. III, § 33.

Usando la metrologia gaussiana razionalizzata, le equazioni rispetto ad S′ sono

$$(I') \qquad \begin{cases} (I'_1) \quad \dot{\mathfrak{B}}' = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}' & (I'_2) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0 \\ (I'_3) \quad \dot{\mathfrak{D}}' + \mathfrak{J}' = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}' & (I'_4) \quad \operatorname{div} \mathfrak{D}' = \rho' \end{cases} \qquad \cdot = \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$(II') \qquad (II'_1)\ \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}' \quad (II'_2)\ \mathfrak{D}' = \varepsilon \mathfrak{E}' \quad (II'_3)\ \mathfrak{J}' = \sigma \mathfrak{E}'.$$

Il primo gruppo (I′) è costituito dalle equazioni del campo: in esso figurano solo le grandezze elettromagnetiche.

Il secondo gruppo (II′) è formato dalle equazioni materiali o costitutive.

Se il corpo C fosse anisotropo, il legame fra le grandezze elettromagnetiche sarebbe più complicato di quello espresso dalle (II′). Tralasciamo qui questo caso proponendoci di riprenderlo in altra occasione.

Per ottenere le equazioni rispetto ad S, Minkowski ha applicato la legge fondamentale di covarianza delle equazioni del campo (cioè del gruppo (I′)) rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Usando la sua classica rappresentazione spazio-temporale delle grandezze elettromagnetiche, egli ha potuto stabilire le leggi di trasformazione di codeste grandezze e quindi anche le trasformate delle equazioni del gruppo (II′).

Indichiamo le grandezze riferite ad S senza accento.

Le equazioni di Maxwell–Minkowski sono

$$(I) \qquad \begin{cases} (I_1) \quad \dot{\mathfrak{B}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} & (I_2) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \\ (I_3) \quad \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H} & (I_4) \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho \end{cases} \qquad \cdot = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$(II) \qquad \begin{cases} (II_1) \quad \mathfrak{D} + \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{H} = \varepsilon \left(\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{B} \right) \\ (II_2) \quad \mathfrak{B} - \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{E} = \mu \left(\mathfrak{H} - \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{D} \right) \\ (II_3) \quad \mathfrak{J} - \rho \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \mathfrak{E} + \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{B} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \left(\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{B} \right) \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \right\} \end{cases}$$

dove $\beta = v/c$.

Risolvendo le (II_1), (II_2) rispetto a $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ si ottengono le formule:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon (1-\beta^2) \mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1) \left\{ \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{H} - \varepsilon \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \mathfrak{E} \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \right\}}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu (1-\beta^2) \mathfrak{H} - (\varepsilon\mu - 1) \left\{ \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{E} + \mu \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \mathfrak{H} \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \right\}}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}.$$

La domanda che qui ci poniamo è la seguente:

Il sistema (I), (II) è riconducibile ad un'unica equazione del 2° ordine (equazione delle onde) così come è possibile nel caso di $\boldsymbol{v} = 0$?

In questo lavoro vorremo limitarci a considerare solo i termini di 1° ordine in β e quei casi in cui la densità parziale di carica ρ' e la densità di corrente di conduzione $\mathfrak{J}'$ sono nulle, con che risultano nulle [3] anche le grandezze trasformate ρ ed $\mathfrak{J}$.

Scopo di questa Comunicazione è di mostrare che la risposta alla questione dianzi posta è affermativa; nei lavori successivi questo risultato sarà esteso ai casi qui trascurati.

Stabiliremo un'equazione a derivate parziali del 2° ordine dalla quale si deduce la classica equazione delle onde dei corpi in quiete per $\boldsymbol{v} = 0$.

Prescindendo dunque dai termini di ordine superiore al 1° in β, le equazioni (I), (II) si riducono alle seguenti

$$(III)\quad \begin{cases} (III_1)\ \dot{\mathfrak{B}} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} & (III_2)\ \mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0 \\ (III_3)\ \dot{\mathfrak{D}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} & (III_4)\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 0 \end{cases}$$

$$(IV)\quad \begin{cases} (IV_1)\ \mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E} + \dfrac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{H} \\ (IV_2)\ \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} - \dfrac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{E} \end{cases}$$

quando si aggiungano inoltre le ipotesi

$$\mathfrak{J} = 0 \quad , \quad \rho = 0.$$

Ricordiamo la celebre relazione di Maxwell

$$n^2 = \varepsilon\mu$$

e poniamo per brevità

$$\lambda = \frac{n^2 - 1}{c}\,.$$

La n esprime l'indice di rifrazione del corpo C.

Il sistema differenziale in discussione è dunque il seguente

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mu\,\mathfrak{H} - \lambda\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{E}) = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathfrak{E} + \lambda\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{H}) = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$$

$$(3)\qquad \mathrm{div}\,(\varepsilon\mathfrak{E} + \lambda\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{H}) = 0$$

$$(4)\qquad \mathrm{div}\,(\mu\,\mathfrak{H} - \lambda\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{E}) = 0.$$

Proponiamoci di ricercare le varietà caratteristiche [4] del sistema delle due equazioni vettoriali (1), (2).

Se

$$(5)\qquad z(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

(3) Cfr. A. SOMMERFELD, loc. cit., § 34, p. 282.

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, Zanichelli, 1931; trad. fr. Paris, Alcan, 1932.

è una eventuale varietà caratteristica del sistema ($x_0 = t$, x_1, x_2, x_3 sono coordinate cartesiane ortogonali in S), poniamo

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{6}$$

Sia u_i la componente di $\boldsymbol{v}$ secondo x_i e sia

$$\alpha_i = \lambda p_0 u_i - c p_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Affinché $z = 0$ sia una varietà caratteristica è necessario e sufficiente che la z sia soluzione dell'equazione alle derivate parziali del 1° ordine

$$\Omega = 0, \tag{8}$$

essendo Ω il seguente determinante del 6° ordine

$$\Omega = \begin{vmatrix} \mu p_0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ 0 & \mu p_0 & 0 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \mu p_0 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \varepsilon p_0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 & 0 & \varepsilon p_0 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon p_0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Prescindendo da un fattore p_0^2 che dà luogo a discontinuità fisse, la (8) assume la forma

$$n^2 p_0^2 = \sum_1^3 \alpha_i^2 \tag{10}$$

e più precisamente entro il 1° ordine

$$n^2 p_0^2 + 2(n^2 - 1) \sum_1^3 u_i p_i \cdot p_0 - c^2 \sum_1^3 p_i^2 = 0. \tag{11}$$

Quest'equazione si riduce a

$$n^2 p_0^2 - c^2 \sum_1^3 p_i^2 = 0 \tag{11'}$$

quando è $\boldsymbol{v} = 0$ e questa è l'equazione delle varietà caratteristiche (superficie d'onda) della celebre equazione

$$n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \Phi = 0. \tag{O}$$

La (11) è l'equazione delle varietà caratteristiche (superficie d'onda) della seguente equazione a derivate parziali del 2° ordine

$$n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2(n^2 - 1)\, \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - c^2 \Delta \Phi = 0 \tag{E}$$

ovvero, in termini cartesiani

$$(O_v) \quad n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2(n^2 - 1)\left(v_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + v_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} + v_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z}\right) - c^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$(x_1 = x \ , \ x_2 = y \ , \ x_3 = z \ , \ u_1 = v_x \ , \ u_2 = v_y \ , \ u_3 = v_z).$$

Si può dunque presumere che l'equazione (E) sia la risolvente cercata delle equazioni di Minkowski.

Nel caso in cui la funzione Φ dipenda solo da x e t, quest'equazione si riduce alla più semplice forma

$$(O'_v) \qquad n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2(n^2 - 1) v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

l'asse delle x avendo la stessa direzione e lo stesso verso di $\boldsymbol{v}$.

Ora io mi propongo di mostrare che a quest'equazione si perviene quando si domandi di soddisfare al sistema con funzioni dipendenti solo da x e t.

Si vedrà che la classica discussione delle onde piane dell'elettrodinamica dei corpi in quiete si trasporta al nostro caso.

Se l'asse delle x ha la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$, le componenti di $\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{E}$, $\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{H}$ sono rispettivamente

$$0 \ , \ -v\mathfrak{E}_z \ , \ v\mathfrak{E}_y$$

$$0 \ , \ -v\mathfrak{H}_z \ , \ v\mathfrak{H}_y:$$

pertanto l'equazione (3) si riduce a

$$(12). \qquad \frac{\partial(\mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0.$$

D'altra parte tenendo presente che le componenti di rot $\mathfrak{E}$, rot $\mathfrak{H}$ si riducono a

$$(13) \qquad \text{rot } \mathfrak{E} \equiv \left(0 \ , \ -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} \ , \ \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}\right)$$

$$(14) \qquad \text{rot } \mathfrak{H} \equiv \left(0 \ , \ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \ , \ \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}\right)$$

la 1ª delle (2) si riduce a

$$(15) \qquad \frac{\partial(\mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0.$$

Analogamente dalla (4) e dalla 1ª delle (I) si deducono le equazioni

$$(16) \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0$$

$$(17) \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0.$$

Si può dunque ritenere che in un processo di effettiva propagazione sia

$$\mathfrak{E}_x = 0 \quad , \quad \mathfrak{H}_x = 0. \tag{18}$$

Ciò significa che, se esistono onde piane, queste sono necessariamente trasversali.

Le componenti $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$; $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ debbono soddisfare le equazioni

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} + \lambda v \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = c \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} \tag{19}$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} - \lambda v \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = - c \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \tag{20}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} - \lambda v \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \tag{21}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \lambda v \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = c \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} . \tag{22}$$

In virtù della linearità di questo sistema, possiamo studiare quei casi (polarizzazione rettilinea) in cui si annullano ancora una componente elettrica e una componente magnetica, per esempio

$$\mathfrak{E}_z = 0 \quad , \quad \mathfrak{H}_y = 0. \tag{23}$$

Allora si è ricondotti al più semplice sistema costituito dalle due equazioni seguenti

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} - \lambda v \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = - c \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \tag{24}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} - \lambda v \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} . \tag{25}$$

Derivando la (24) rispetto ad x, la (25) rispetto a t ed eliminando la $\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t \, \partial z}$, si ottiene l'equazione

$$\lambda \mu v \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} - \lambda c v \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t \, \partial x} = 0. \tag{26}$$

Derivando la (24) rispetto a t, si ha

$$\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} - \lambda v \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = - c \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t \, \partial x} . \tag{27}$$

Dalla eliminazione di $\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2}$ da (26) e (27) segue, nell'approssimazione di 1° ordine, proprio l'equazione (O'_v) per la $\mathfrak{E}_y$. E sarebbe facile provare che anche la $\mathfrak{H}_z$ obbedisce alla medesima equazione (O'_v).

Procediamo ora alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (O'_v) del tipo

$$\Phi = A\, e^{i(kx - \omega t)}. \tag{28}$$

I parametri k ed ω restano allora legati dall'equazione

$$n^2 \omega^2 - 2(n^2 - 1) vk\omega - c^2 k^2 = 0. \tag{29}$$

Nel caso $v = 0$, la velocità di fase ω/k è data da

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)_0 = \frac{c}{n}. \tag{30}$$

Nel caso $v \neq 0$, la velocità di fase è data dall'equazione

$$n^2 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - 2(n^2 - 1) v \frac{\omega}{k} - c^2 = 0 \tag{31}$$

e cioè, prescindendo dai termini di ordine superiore al 1° in β,

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v. \tag{32}$$

Questa formula esprime quantitativamente la celebre esperienza di Fresnel sul cosiddetto trascinamento parziale delle onde luminose da parte dei corpi in moto.

Mentre von Laue spiega l'esperienza mediante la legge relativistica di addizione delle velocità di Einstein, applicata ai fotoni, dei quali ha bisogno di supporre l'esistenza, qui la spiegazione viene fornita sulla base delle sole teorie classiche completate dalla concezione relativistica, senza bisogno di quantizzazione. Codesta spiegazione può avere interesse nel caso che l'ipotesi dei fotoni dovesse essere abbandonata [5].

Dal punto di vista formale, l'equazione (O'_v) si ottiene dall'equazione delle onde

$$n^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} = 0$$

rispetto ad S' applicando la trasformazione di Lorentz che fa passare da S' ad S.

Infatti, prescindendo dalle coordinate y', z' che rimangono inalterate, le formule della trasformazione di Lorentz che esprimono le variabili x, t in termini di x', t' sono

$$x = \alpha(x' + vt'), \qquad t = \alpha\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)$$

essendo $\alpha^2(1 - \beta^2) = 1$, $\beta = v/c$.

(5) Cfr. a questo proposito H. E. IVES, *Adventures with standing light waves*, Boston Academy, 1951.

Operando la trasformazione, si trova per la funzione $\Phi(x, t)$, trasformata di $\Phi'(x', t')$, l'equazione

$$(n^2 - \beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2(n^2 - 1)v\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - c^2(1 - n^2\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0.$$

Questa si riduce alla (O'_v) quando si trascura β^2.

È chiaro che non si ha il diritto di affermare che quest'equazione fornisce con le sue soluzioni le componenti delle grandezze $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ relativamente al sistema di osservazione S senza aver fatto l'analisi precedente del sistema completo delle equazioni di Minkowski.

La coincidenza delle equazioni ottenute per via diretta e per il tramite della trasformazione di Lorentz è, in altri termini, una proprietà delle equazioni di Minkowski che non ha affatto carattere di evidenza, perché, come già abbiamo rilevato, le equazioni di Minkowski non si ottengono dalle equazioni di Maxwell applicando la trasformazione di Lorentz.

Fisica. — *Sullo spettro di decadimento del* $^{214}_{83}Bi$ (*). Nota (**) di Renato Ricci e Giacomo Trivero, presentata dal Socio E. Perucca.

Una ragionevole interpretazione dello schema di decadimento $^{214}_{83}Bi$–(β)–$^{214}_{84}Po$, presenta notevoli difficoltà a causa della complessità dello spettro β emesso.

Ricerche sperimentali su tale spettro (1) hanno finora permesso di accertare l'esistenza di un ramo β di energia 3,17 MeV e lo si attribuisce al decadimento del $^{214}_{83}Bi$ al livello fondamentale del $^{214}_{84}Po$.

Per il ramo β di energia immediatamente inferiore a 3,17 MeV, G. D. Latishev (1) e A. H. Wapstra (1) hanno trovato le energie di 1,65 MeV e 1,56 MeV rispettivamente.

D'altra parte lo studio della struttura dello spettro γ del $^{214}_{84}Po$ ha condotto, tra gli altri, ai seguenti risultati:

1° – esiste un raggio γ di 0,61 MeV molto intenso (2), che si è d'accordo nell'attribuire alla transizione dal primo livello eccitato al livello fondamentale del $^{214}_{84}Po$ (3);

2° – le cascate γ — γ, che hanno come uno dei componenti il raggio di 0,61 MeV, non esauriscono l'intensità di questo raggio (4).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1954.

(1) A. H. Wapstra, « Academisch Proeschrift », Amsterdam 1953; G. D. Latishev, « Rev. of Mod. Phys. », *19*, 132 (1947).

(2) C. D. Ellis, « Proc. Roy. Soc. », A *143*, 350 (1935).

(3) E. Rutherford e coll., « Proc. Roy. Soc. », A *142*, 347 (1933); G. Scharff-Goldhaber, « Phys. Rev. », *90*, 587 (1953).

(4) F. Demichelis e R. Malvano (In corso di pubblicazione).

Sembra quindi coerente con questi ultimi dati l'ipotesi della esistenza di un ramo β di 2,56 MeV in coincidenza con il raggio γ di 0,61 MeV; il passaggio dal livello fondamentale del $^{214}_{83}Bi$ al livello fondamentale del $^{214}_{84}Po$, con emissione di energia totale di 3,17 MeV, sarebbe qui costituito dalla successione dell'emissione β di 2,56 MeV e γ di 0,61 MeV.

Orbene né Wapstra né Latyshev deducono dai loro risultati l'esistenza di tale raggio.

È da notare che le ricerche di Latishev non si estendono alla determinazione di eventuali coincidenze β — γ, che giustificherebbero il passaggio del nucleo al livello fondamentale dopo l'emissione di raggi β meno energici.

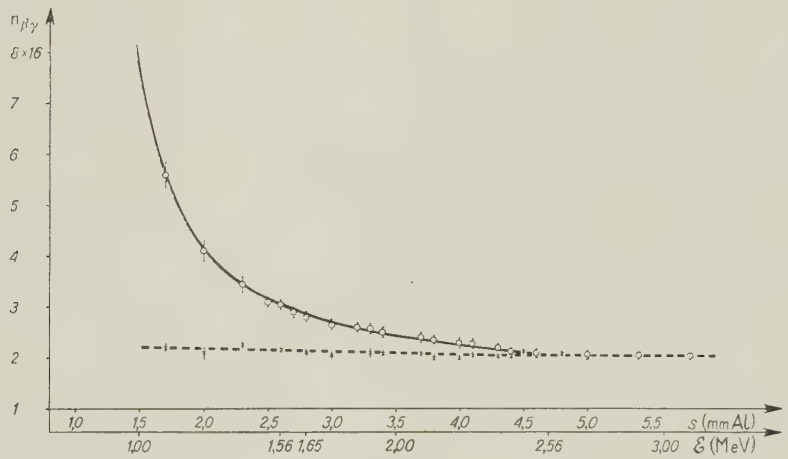


Fig. 1.

D'altra parte Wapstra, che estende le sue ricerche alla determinazione di coincidenze β — γ, non è in grado, con le sue misurazioni, di stabilire l'esistenza del raggio di 2,56 MeV, la cui massima intensità, secondo i suoi dati sperimentali, sarebbe certamente inferiore alla metà di quella del raggio di 3,17 MeV. L'analisi dello spettro β da lui condotta porterebbe alla scomposizione di tale spettro in due rami β di energie 3,17 MeV e 1,56 MeV.

Abbiamo voluto assoggettare ad uno studio sperimentale questo punto evidentemente non ancora chiaro.

Ciò abbiamo fatto con ricerche da noi condotte con il metodo dell'assorbimento dei raggi β (assorbitori di alluminio), per eliminare dalla radiazione totale β via via le componenti meno energetiche e, contemporaneamente, con la tecnica delle coincidenze β — γ [5].

In queste ricerche si è fatto uso di contatori a scintillazione come rivelatori sia delle particelle β (cristallo di naftalene), sia delle particelle γ (cristallo di NaI, attivato con Tl).

(5) A. C. G. MITCHELL, « Rev. of Mod. Phys. », *20*, 296 (1948).

Le esperienze di assorbimento hanno confermato l'esistenza del raggio di 3,17 MeV, con una approssimazione del 6 % sul valore dell'energia, e, contemporaneamente, l'inesistenza di coincidenze $\beta - \gamma$ per tale raggio.

Si esamini invece il diagramma sperimentale della figura; vi è portato il numero $n_{\beta\gamma}$ delle coincidenze $\beta - \gamma$ al minuto, totali (linea continua) e di fondo (linea tratteggiata), in funzione dello spessore assorbente s di alluminio in mm. Sotto lo spessore è indicata l'energia minima $\mathcal{E}$ degli elettroni ancora capaci di attraversare l'assorbitore.

Da tale diagramma risulta, con chiara evidenza, che le coincidenze sono ancora presenti, per energie nettamente superiori a 1,65 MeV (gli errori sperimentali sono appunto per questo indicati graficamente).

Le coincidenze cessano, sia pure con legge che non permette di determinarne con esattezza il termine (data la forma del contatto della linea delle coincidenze totali con quella delle coincidenze di fondo), in corrispondenza di un valore dell'energia che può ragionevolmente considerarsi coincidente con quello di 2,56 MeV, già in altre circostanze postulato, e confermano la ipotesi della emissione β di energia 2,56 MeV.

In conclusione riteniamo utile segnalare qui l'esistenza, sperimentalmente comprovata, di un raggio β di 2,56 MeV e della sua coincidenza con un raggio γ; quest'ultimo non può essere che quello di energia 0,61 MeV.

Una relazione dettagliata dei dispositivi sperimentali e della condotta delle ricerche apparirà in esteso su altro periodico.

Ringraziamo vivamente il prof. E. Perucca per il costante interessamento ed i proff. F. Demichelis e R. Malvano per le utili discussioni.

Fisica. — *Sullo schema di decadimento del* $^{212}_{84}$Po (ThC'). Nota (*) di Francesca Demichelis, presentata dal Socio E. Perucca.

Tra i vari nuclidi radioattivi che, disintegrandosi, emettono particelle α, esistono due nuclidi radioattivi, entrambi naturali, il $^{214}_{84}$Po (RaC', semiperiodo $T = \simeq 10^{-4}$ sec) della famiglia del radio e il $^{212}_{84}$Po (ThC', $T = \simeq 10^{-7}$ sec) della famiglia del torio che emettono anche particelle α dette « di lungo percorso ».

Un recente studio (1) dello spettro di decadimento del $^{214}_{84}$Po ha portato alla conclusione, a nostro parere molto interessante, che ad alcuni livelli di particelle α di lungo percorso l'esperienza non fa corrispondere raggi γ di intensità sperimentalmente osservabili, mentre ad alcuni livelli da cui provengono raggi γ l'esperienza non fa corrispondere particelle α di lungo percorso.

(*) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1954.

(1) F. Demichelis, R. Malvano, in corso di stampa in « Rend. Linc. ».

Estese, con mezzi analoghi, le ricerche compiute sul $^{214}_{84}Po$, anche al caso del $^{212}_{84}Po$, vennero ottenuti risultati sui quali desidero qui riferire.

Anzitutto è stata stabilita sperimentalmente l'esistenza di cascate di raggi γ anche nel $^{212}_{84}Po$; ciò ha permesso una revisione e un completamento del suo schema di decadimento.

Questo schema può considerarsi come la sintesi di quelli suggeriti da alcuni autori [2] cui si aggiunge l'avvallo dei risultati sperimentali di questa ricerca.

I livelli energetici e lo schema di decadimento, quali sono dedotti dai dati sulle emissioni γ, sono dati in fig. 1 *a*.

In fig. 1 *b* sono riportati i livelli energetici relativi alle particelle α di lungo percorso. Il livello disegnato a tratti rappresenta un livello determinato da un gruppo di particelle α di lungo percorso non ben accertato [3].

L'esame delle due figure 1 *a* e 1 *b* riconferma anche per il $^{212}_{84}Po$ la mancanza di completa corrispondenza tra i due schemi. E precisamente nel $^{212}_{84}Po$ esistono tre gruppi certi di particelle α di lungo percorso; due di essi coincidono, entro i limiti delle approssimazioni sperimentali, con livelli da cui provengono raggi γ. Esistono inoltre livelli da cui provengono raggi γ che non dànno luogo a particelle α di lungo percorso rivelate direttamente dall'esperienza.

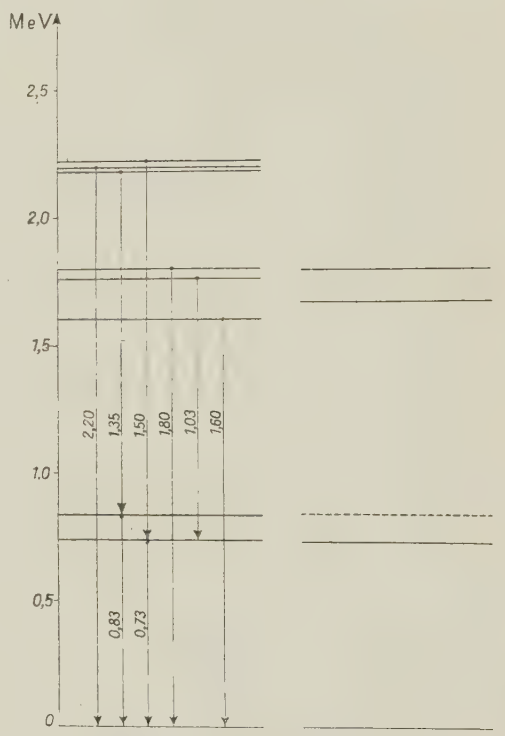


Fig. 1 *a*. Fig. 1 *b*.

Una discussione più estesa dell'argomento apparirà altrove.

Ringrazio vivamente il prof. E. Perucca per il costante interessamento ed aiuto.

(2) A. JOHANSSON, « Arkiv Mat. Astron. Fysik », *34* A, n. 9 (1947); G. D. LATYSHEV, « Rev. Mod. Phys. », *19*, 132 (1947).

(3) S. ROSENBLUM, M. VALADRES, « Comptes rendus », *194*, 967 (1932); W. B. LEWIS, B. V. BOWDEN, « Proc. Roy. Soc. », A, *145*, 235 (1934); M. G. HOLLOWAY, M. S. LIVINGSTON, « Phys. Rev. », *54*, 18 (1938); A. RYTZ, « Comptes rendus », *233*, 790 (1951); G. H. BRIGGS, « Rev. Mod. Phys. », *26*, 1 (1954).

Chimica inorganica. — *Ortogalliti di elementi delle terre rare* [*]. Nota [**] di Assunta Ruggiero e Riccardo Ferro, presentata dal Socio L. Rolla.

Gli ossidi doppi del tipo ABO_3 e fra questi la famiglia delle perowskiti sono sostanze particolarmente interessanti dal punto di vista chimico-fisico e sono oggetto di studio da parte di numerosi Autori [1] sia dal punto di vista delle diverse trasformazioni che presentano allo stato solido sia delle loro proprietà (ferromagnetismo, ferroelettricità ecc.).

Tra i composti di questo tipo possono comprendersi diversi ossidi doppi contenenti terre rare (per esempio $LaAlO_3$, $LaCrO_3$, $LaFeO_3$, ecc.). Abbiamo cercato di portare un contributo alla conoscenza di queste sostanze studiando in particolare le variazioni che si presentano dal punto di vista delle dimensioni reticolari, della struttura, in serie analoghe di composti con diversi elementi delle terre rare. In un precedente lavoro [2] abbiamo studiato alcune proprietà degli ortoalluminati, ortocromiti ed ortoferriti di lantanio, cerio, praseodimio, neodimio, samario, europio, gadolinio ed yttrio. In questa Nota riferiamo su alcuni risultati ottenuti nella preparazione di analoghi composti col gallio.

Similmente alle sostanze precedentemente descritte la preparazione è stata condotta, in genere, pressando insieme le polveri degli ossidi (puri al 99,9%) della terra e del gallio, scaldando la pastiglia, di circa mezzo grammo, così ottenuta a 1300° per qualche minuto e poi ricuocendo lungamente a circa 950°.

Nel caso del praseodimio l'ossido usato era il Pr_6O_{11} che reagisce con Ga_2O_3 (analogamente come con Cr_2O_3, ecc.) secondo l'equazione:

$$Pr_6O_{11} + 3\,Ga_2O_3 \rightarrow 6\,PrGaO_3 + O_2.$$

Nel caso del cerio, la preparazione è stata condotta secondo l'equazione:

$$3\,CeO_2 + Ce + 2\,Ga_2O_3 \rightarrow 4\,CeGaO_3$$

pressando, cioè, insieme il biossido di cerio, il sesquiossido di gallio e cerio metallico e scaldando poi il campione saldato sotto vuoto in un tubo di quarzo.

I prodotti ottenuti hanno il colore dell'ossido della terra rara corrispondente e sono abbastanza refrattari.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1954.

(1) Si veda per esempio: E. A. Wood, « Acta Cryst. », *4*, 353 (1951); H. Forestier e G. Guiot-Guillain, « Compt. Rend. », *235*, 48 (1952); Gen Shirano e Sadao Hoshino, « Acta Cryst. », *7*, 203 (1954) e per una estesa bibliografia W. G. Wyckoff, *Crystal Structures Intersec.* Publ. New York, vol. I, Table VII, p. A 1 sg.

(2) Lavoro presentato al VII Congresso Nazionale di Chimica Pura ed Applicata (Genova maggio-giugno 1954), in corso di stampa.

L'esame roentgenografico eseguito col metodo delle polveri (radiazione $K_\alpha Fe$, metodo Straumanis) ha mostrato per $LaGaO_3$, $CeGaO_3$, $PrGaO_3$ e $NdGaO_3$ la struttura semplice riferibile a quella della perowskite mentre per i galliti delle successive terre e dell'yttrio si sono osservati, nelle stesse condizioni di preparazione, fotogrammi notevolmente più complicati.

Per i quattro composti suddetti le righe Debye, invece, si lasciano facilmente ordinare nell'ipotesi di una cella cubica. In altri casi, studiati precedentemente, avevamo osservati, per un certo numero di composti, distor-

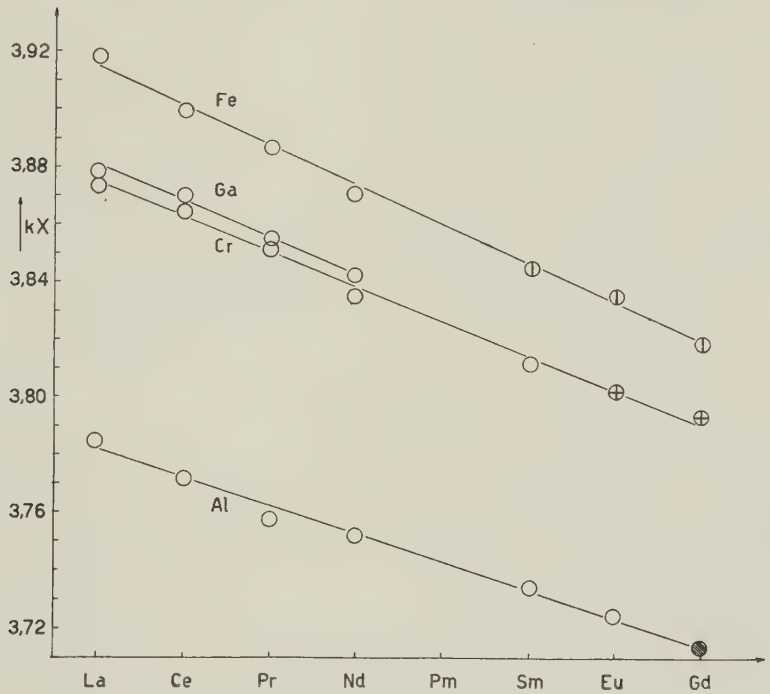


Fig. 1. – Andamento delle costanti dei composti (T.R.)BO_3 con B = Al , Cr , Ga , Fe. Sono indicati i composti per i quali sono evidenti leggere deformazioni della cella cubica: per i cromiti tetragonale con rapporto *c/a* poco inferiore ad 1, per i ferriti rombica con rapporti assiali pure prossimi ad 1.

sioni più o meno profonde nel reticolo; per questi galliti, se anche ci sono deviazioni dalla cella cubica perfetta, queste non sono rivelabili coi fotogrammi delle polveri. Le costanti sono riportate nella tabella I.

Con una struttura tipo perowskite si possono avere le seguenti distribuzioni atomiche ordinate nella cella:

			A	B
1	in terra rara	in	0 , 0 , 0	0 , 0 , 0
1	Ga	in	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
3	O	in	0 , $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ecc.	$\frac{1}{2}$, 0 , 0 ecc.

Nella tabella II sono riportate le intensità osservate e quelle calcolate nelle ipotesi A e B.

TABELLA I.

Costanti di ortogalliti delle terre rare.

	a_o kX	Densità X gr/cm^3
$LaGaO_3$	3,878	7,26
$CeGaO_3$	3,871	7,33
$PrGaO_3$	3,855	7,45
$NdGaO_3$	3,843	7,61

TABELLA II.

$CeGaO_3$. *Fotogramma delle polveri, intensità osservate e calcolate.*

h k l	Int. oss.	Int. calc.	
		A	B
100	—	0,3	0,9
110	*mf*	5,5	5,5
111	*d*	1,2	0,1
200	*m*	3,6	3,6
210	*dmd*	0,7	1,5
211	*f*	7,2	7,2
220	*mf*	4,7	4,7
300 + 221	*d-dd*	0,9	1,6
310	*f*	7,6	7,6
311	*md*	2,4	0,4
222	*mf*	5,1	5,1
320	*d*	1,4	2,4
321	*ff*	36,7	36,7

Analogamente a quanto abbiamo trovato per i cromiti si ha un buon accordo con la disposizione A salvo per alcune righe più deboli. Questa somiglianza con i cromiti si ha anche nelle dimensioni reticolari come risulta dalla fig. 1 in cui sono riportate le costanti di tutte le sostanze studiate in funzione del numero atomico.

Embriologia. — *Osservazioni sullo sviluppo e sul differenziamento morfologico della gonade nell'embrione di pollo* (*). Nota (**) di GUGLIELMO MARIN, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Il comportamento del substrato somatico nella gonadogenesi e nel differenziamento sessuale degli Amnioti e soprattutto degli Uccelli, non è completamente chiarito: sono pochi gli studi morfologici di data recente condotti in modo sistematico attraverso i precoci stadi di sviluppo delle gonadi. Sono oggetto di discussione soprattutto le precoci modificazioni che portano alla distinzione, nella gonade, di territori con valore morfologico e funzionale diverso, e quindi alla possibilità di discernimento del sesso. Molte teorie sono state avanzate per spiegare l'origine della parte midollare della gonade, cioè di quegli ammassi cellulari (nucleo epiteliale) che compaiono precocemente al disotto dell'epitelio germinativo (1) fra questo e il corpo di Wolff: il problema si è ormai avviato verso la risoluzione per merito di Witschi, Dantchakoff e soprattutto Vannini, ma presenta ancora dei punti oscuri.

Negli uccelli uno studio morfologico completo e particolareggiato della gonadogenesi è stato fatto sul pollo da Firket (1914–1920) (2) e da Swift (1914–15–16) (3): nella letteratura più recente ci si riporta principalmente a queste descrizioni, eventualmente modificando alcune interpretazioni, ma accettando nelle linee generali i quadri descritti da questi Autori. Ricerche successive limitate a particolari momenti dello sviluppo gonadico e portanti a interpretazioni diverse, mal si inseriscono nella storia della gonadogenesi descritta da Firket, per cui sarebbe necessaria una completa revisione di tutto il quadro morfologico.

(*) Ricerche compiute nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Ringrazio il prof. Enrico Vannini che mi ha indirizzato e guidato nell'esecuzione del lavoro.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1954.

(1) Con tale denominazione viene chiamato quel tratto di epitelio peritoneale ispessito che si osserva bilateralmente ai lati del mesenterio come primissimo abbozzo della gonade e che costituisce il rilievo detto « cresta genitale ». Il nome deriva dal fatto che in esso già si osservano gonociti precocemente immigrativi (« Ureier » di WALDEYER) per cui anticamente si considerava tale epitelio capace di generare elementi germinali. Esso si trasformerà successivamente in cortex nella gonade in via di differenziazione, ma per gli stadi più precoci, conserverò l'antica, se pur inesatta, denominazione. Inoltre non tutti gli Autori sono d'accordo sull'epoca in cui si può cominciare a parlare propriamente di cortex e medulla.

(2) J. FIRKET, *Recherches sur l'organogènese des glandes sexuelles chez les oiseaux*. « Arch. de Biol. », T. XXIX (1914) e T. XXX (1920).

(3) C. H. SWIFT, *Origin and early history of the primordial germ cells of the chick*, « Am. Journ. Anat. », vol. XV (1914); *Origin of the definitive sex cells in the female chick and their relationship to the primordial germ cells*, « Am. Journ. Anat. », vol. XVIII (1915); *Origin of the sex cords and the definitive spermatogonia in the male chick*, « Am. Journ. Anat. », vol. XX (1916).

Limitandoci al punto che ci interessa, cioè all'origine e sviluppo del tessuto midollare, riassumiamo brevemente le osservazioni di Firket. Secondo costui le incertezze e le discordanze esistenti sull'origine del tessuto midollare, erano dovute all'errore di comprendere nella denominazione di « cordoni sessuali » o di confondere tra di loro due tipi di formazioni di valore diverso, ma mal distinguibili negli Uccelli: i cordoni sessuali propriamente detti, o cordoni midollari, destinati a fornire i tubuli seminiferi nel maschio e a degenerare nella femmina, e le connessioni urogenitali, abbozzo della rete testis e della rete ovarii. Egli credette di poter individuare precocemente (quarto giorno di incubazione) le connessioni urogenitali, sotto forma di un tessuto compatto sottostante all'epitelio germinativo, in contatto coi glomeruli wolffiani e in rapporto senza limiti netti con l'abbozzo dell'interrenale. Secondo Firket tale tessuto si originerebbe per condensazione di mesenchima in sito. I cordoni sessuali comparirebbero più tardivamente (durante il settimo giorno di incubazione) sotto forma di proliferazione dell'epitelio germinativo nella sua superficie profonda: si formerebbero dei bottoni e successivamente dei cordoni di cellule epiteliali contenenti gonociti che crescerebbero in profondità respingendo verso l'ilo l'ammasso delle connessioni urogenitali.

Nella letteratura successiva il problema dell'origine della rete testis od ovarii viene considerato ancora aperto, ed in genere l'opinione di Firket, di interpretare cioè come connessioni urogenitali il primo abbozzo di un tessuto midollare, se pure non viene esplicitamente contrastata, non è però accolta senza riserve da tutti. Quello che invece la maggioranza degli Autori accetta senz'altro è l'origine epitelio–germinativa dei cordoni sessuali. Anche dopo che Witschi stabilì la distinzione nella gonade di cortex e medulla, come territori a potenzialità diversa e opposta, cioè, rispettivamente femminile e maschile, si continuò a parlare di origine corticale del componente maschile della gonade. R. Goldschmidt, Willier, Benoit, e J. B. Goldsmith [4] e altri che si occuparono con la maggior competenza del problema della determinazione sessuale nei Vertebrati specialmente usando metodi sperimentali, parlano tutti di una prima proliferazione dell'epitelio germinativo nella gonade morfologicamente indifferenziata, e quindi presente nei due sessi, a cui fa seguito nella femmina dopo alcuni giorni una seconda proliferazione corticale destinata a costituire il vero e proprio cortex ovarico (tubi di Pflüger). Questa seconda proliferazione manca nel maschio in cui l'epitelio germinativo si esaurisce nella prima, sufficiente a fornire tutti gli elementi costitutivi del futuro testicolo. La prima proliferazione dell'epitelio corticale è in genere descritta come una produzione di cordoni distinti e

(4) R. Goldschmidt, *Le determinisme du sex et l'intersexualtié*, Félix Alcan, Paris (1932); B. H. Willier, *The embryological foundations of sex in vertebrates*, Cap. IV in *Sex and internal Secretion* edito da Allen, Williams & Wilkins, Baltimore (1934); J. Benoit, Cap. *Reproduction* in *Traité de Zoologie* di P. Grassé, T. XV, Masson & C.ie, Paris (1950); J. B. Goldsmith, *The history of the germ cells in the domestic fowl*, « Journ. of Morph. and Phys. », vol. XLVI (1928).

separati da mesenchima, radialmente diretti verso l'ilo della gonade: tale origine della medulla viene generalmente accettata anche nei più recenti trattati riguardanti il differenziamento sessuale e lo sviluppo embrionale gonadico dei Vertebrati [5]. Al contrario Dantchakoff [6] e Witschi [7], non credendo di poter confermare l'esistenza di questa abbondante proliferazione dell'epitelio peritoneale, hanno sostenuto l'origine della medulla dal blastema mesonefrico. Più recentemente Vannini [8] estendendo al pollo i risultati da lui ottenuti negli Anfibi, diede una convincente dimostrazione morfologica dell'origine del tessuto midollare da quel medesimo blastema che genera l'interrenale. Probabilmente Dantchakoff e Witschi da un lato, e Vannini dall'altro hanno esposto le loro teorie avendo sott'occhio lo stesso quadro; blastema mesonefrico e blastema interrenale non sono nettamente separati, per cui Dantchakoff e Witschi probabilmente non han saputo distinguere gli elementi interrenali dall'ammasso di tessuto mesonefrico. Vannini inoltre giustifica l'ipotesi di un'origine celomatica del tessuto midollare con la quasi contemporanea origine, pure celomatica, del blastema interrenale che successivamente darebbe il suo contributo per l'edificazione della medulla gonadica. Bisogna tener presente che Vannini descrive l'origine del tessuto midollare della gonade in embrioni di circa quattro giorni, cioè circa all'epoca in cui Firket descrive la formazione delle connessioni urogenitali, mentre la proliferazione epitelio-germinativa osservata da Firket e accettaata dalla maggioranza degli Autori successivi come fonte della medulla, viene descritta da tutti in embrioni di circa sei giorni. Quindi se vogliamo accettare la suggestiva ipotesi di Vannini non possiamo sostenere la schematica distinzione fatta da Firket tra epoca di comparsa delle connessioni urogenitali e quella dei cordoni midollari. Il quadro descritto da Vannini è certamente lo stesso visto da Firket, e da questi interpretato come primo apparire delle connessioni urogenitali: Firket stesso, infatti, e altri Autori osservarono la continuità esistente tra i primi ammassi di cellule subcorticali nella gonade ed abbozzo interrenale, senza riuscire a coglierne il vero significato. È indubbiamente più logico considerare i primi cordoni di cellule indifferenziate che compaiono precocemente sotto l'epitelio germinativo come un blastema da cui successivamente si differenzieranno i componenti parenchimali e mesenchimali della gonade maschile da un lato, e la rete testis od ovarii dall'altro, senza volerli considerare già esclusivamente come

(5) F. W. R. BRAMBELL, *The development of sex in vertebrates*, Sidgwick & Jackson, Ltd., London (1930); H. L. HAMILTON, *Lillie's development of the Chick*, New York (1952); E. PADOA, *Storia naturale del sesso*, Ed. Einaudi, Torino (1948); K. PONSE, *La différenciation du sexe et l'intersexualité chez les vertébrés*, Librairie de l'Université F. Rouge, Lausanne (1949).

(6) V. DANTCHAKOFF, *Le devenir du sexe*, « Act. Scient. Ind. », Hermann, Paris (1933).

(7) E. WITSCHI, *Origin of asymmetry in the reproductive system of birds*, « Am. Journ. Anat. », vol. LVI (1935).

(8) E. VANNINI, *Sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade nell'embrione di pollo*, « Atti R. Accad. d'Italia », Memorie Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., vol. XIV (1942).

connessioni urogenitali soltanto perché si trovano interposti fra il mesonefro e il primo rudimento della gonade.

Facendo risalire a tale epoca precoce la comparsa della medulla, viene spontaneo chiedersi quale significato può avere allora la cosidetta prima proliferazione dell'epitelio germinativo, così accuratamente descritta e universalmente accettata.

Con lo scopo, appunto, di indagare su questo interessante momento della gonadogenesi che investe la delicata questione dei rapporti reciproci tra cortex e medulla, ho intrapreso l'esame sistematico delle gonadi di embrione di pollo dal sesto giorno di incubazione fino all'epoca in cui testicolo ed ovaio sono ormai completamente costituiti nelle loro linee fondamentali. Esporrò qui brevemente in forma preliminare i primi risultati ottenuti da questa indagine. Ho usato uova di razza livornese incubate in termostato; i preparati istologici consistono di serie complete di sezioni trasverse di embrioni nella regione comprendente le gonadi. (Fissazione in Zenker, fette di 10 e 7 micron, colorazione con emallume–eosina). Sono stati fissati stadi fra loro distanti 12 o 24 ore.

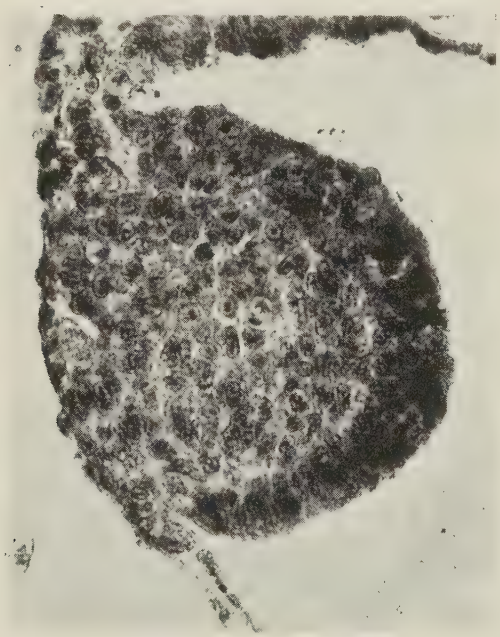


Fig. 1. – Embrione di giorni 5 e mezzo d'incubazione. Gonade sinistra. Colorazione emallume–eosina. Ingr. 460 ×.

Fino allo stadio di giorni 5 e mezzo (Fig. 1) l'epitelio germinativo e il tessuto midollare sono separati da un limite abbastanza netto; i gonociti sono frequenti nella parte corticale ma se ne riscontra qualcuno anche in quella midollare. Il nucleo di tessuto midollare è già ben sviluppato e compatto; frequenti in esso le mitosi. Già in questi stadi è evidente l'asimmetria caratteristica delle gonadi degli Uccelli e dovuta essenzialmente all'ipoevoluzione del cortex destro; tale asimmetria infatti compare precocemente con un'ineguale distribuzione di gonociti nell'epitelio germinativo dei due lati [9], si rende più evidente nella gonade indifferente con un maggior spessore e una maggiore attività proliferativa dell'epitelio corticale sinistro, per culminare nella femmina con l'atrofia totale dell'ovaio destro, e scomparire invece nel maschio col prevalere del componente midollare.

(9) E. VANNINI, *Ripartizione dei gonociti primari e origine dell'asimmetria delle gonadi nell'embrione di pollo*, « Atti dell'Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti », T. CIV (1945).

Negli embrioni di sei giorni (Fig. 2) i gonociti sembrano alquanto più numerosi; al limite profondo dell'epitelio germinativo, non più netto come negli stadi precedenti, si osserva un certo disordine cellulare dovuto al raggrupparsi in questa zona di numerose cellule germinali che si trovano già in buon numero anche nella medulla. In rapporto con questi gruppi di gonociti si osservano talora anche bottoni o zaffi di cellule somatiche che dall'epitelio si spingono in profondità nella compagine del nucleo midollare preesistente; quivi però perdono la loro individualità per cui è difficile stabilire l'entità di questa proliferazione.

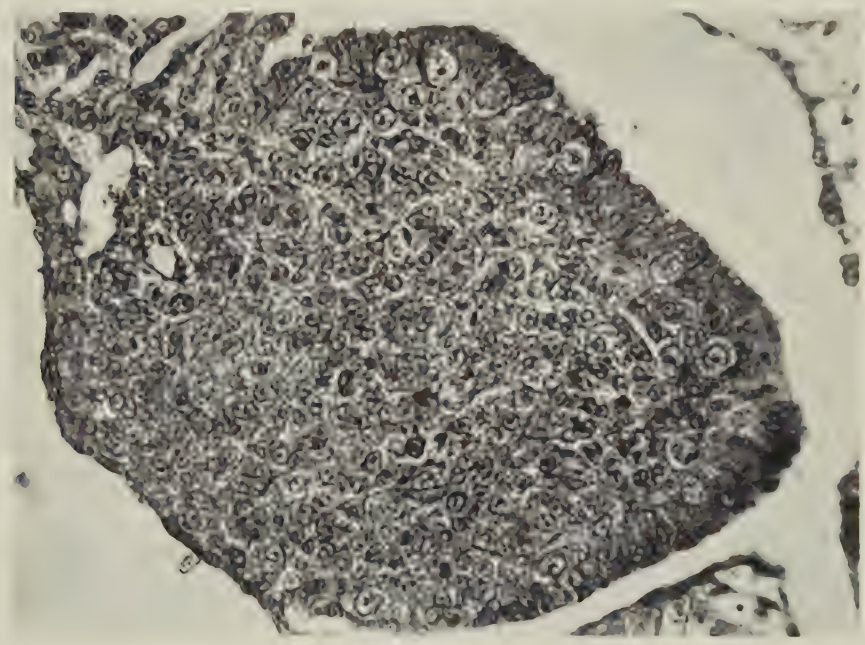


Fig. 2. – Embrione di giorni 6 d'incubazione. Conade sinistra. Colorazione emallume–eosina. Ingr. 470 ×.

Il quadro sembra quello di una migrazione di gonociti dalla regione corticale a quella midollare, cui si accompagna un passaggio di elementi somatici che però vengono semplicemente ad aggiungersi ad un nucleo midollare già esistente ed in via di autonomo accrescimento. La medulla, in altri termini, si sarebbe essenzialmente costituita già durante il quinto giorno a spese del blastema interrenale ed all'inizio del settimo giorno riceverebbe in aggiunta oltre al suo patrimonio di gonociti anche una certa quota di elementi somatici di provenienza corticale.

Vista in questo modo la gonadogenesi degli Uccelli presenta una strettissima analogia con quella dei Selacei, secondo la recente descrizione di Chieffi su *Torpedo ocellata* [10] e neppure differisce sostanzialmente da quanto

(10) G. CHIEFFI, *Ricerche sul differenziamento sessuale negli embrioni di « Torpedo Ocellata »*, « Pubbl. St. Zool. Napoli », vol. XXII (1950).

si osserva negli Anfibi. Certamente però è necessario uno studio più accurato degli stadi vicini al differenziamento morfologico del sesso, prima di dare una interpretazione dei rapporti reciproci intercorrenti tra territorio corticale e midollare. È probabile che anche nel pollo si verifichi quanto è stato osservato da Sabbadin [11] nella rana, che cioè fra costituenti somatici della gonade non esisterebbe all'inizio antagonismo, ma che anzi i due territori sarebbero dotati di una bipotenzialità sessuale la quale spiegherebbe la possibilità di assimilazione del territorio non ancora attivato dall'altro già attivato. Nella rana, cioè, il testicolo adulto deriverebbe oltre che dal primitivo costituente midollare anche da elementi corticali assimilati nella medulla; il contrario avverrebbe per l'ovaio. È probabile che si possa arrivare ad una interpretazione analoga anche per quanto si osserva nel pollo; in tal caso la prima proliferazione dell'epitelio germinativo perderebbe molto del valore attribuitole fino ad oggi, o per lo meno essa andrebbe osservata sotto un'altra luce.

Zoologia. — *Osservazioni sul polimorfismo in «Chorthippus longicornis» Latr. («Acridoidea, Orthoptera»)* [*]. Nota [**] di Giuseppe Colombo e Vanda Avigliano, presentata dal Corrisp. U. D'Ancona.

Per molte specie di Acridoidei è da gran tempo nota la variabilità della pigmentazione che ha indotto diversi specialisti di Ortotteri a distinguere per ogni specie numerose forme.

Vorontzovskii (1928) [1] in un gran numero di esemplari, raccolti nelle regioni centrali e meridionali della Russia, ha distinto numerose forme, simili in diverse specie di Acridoidei, ed ha considerato queste variazioni come uno degli esempi più chiari di variazioni omologhe, tra gli animali, nel senso di Vavilov.

Rubtzov (1935) [2] ha studiato su materiale raccolto in natura e con incroci le variazioni della pigmentazione di *Chorthippus longicornis* Latr. (*parallelus* Zett.) ed ha distinto sei forme, in base sopratutto alla colorazione del pronoto, della testa e delle tegmine: *viridis*, *hyalosuperficies*, *hyalolateralis*, *rubiginosa*, *porfirica* e *fuliginosa*, a seconda se sono tutte verdi, o colle parti dorsali verdi e laterali di altro colore o viceversa o tutte brune

(11) A. Sabbadin, *Comportamento del substrato somatico della gonade nel differenziamento sessuale degli Anfibi Anuri*, « Boll. di Zool. », vol. XVIII (1951).

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova col contributo del Comitato Economico-Scientifico Triveneto per studi, applicazioni e ricerche sulla Regione Trentino-Alto Adige presso l'Università di Padova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1954.

(1) P. A. Vorontzovskii, *On the question of homological ranges of colour variation in Acrididae*, « Bull. Orenburg Pl. Prot. Sta », vol. I, 27–39 (1928) (in Russo).

(2) J. A. Rubtzov, *Phase variation in non-swarming grasshoppers*, « Bull. ent. Res. », vol. 26, 499–524 (1935).

o rossastre o giallastre. Secondo Rubtzov questi diversi tipi di pigmentazione hanno una base genetica. In generale le singole forme sono più frequenti in determinati ambienti: per esempio le forme completamente verdi si trovano nei luoghi umidi; le forme brune sono particolarmente abbondanti in alcuni anni e presenterebbero una tendenza a migrare (Rubtzov).

Recentemente L'Heritier (1944) [3] ha studiato la distribuzione delle diverse forme di pigmentazione, distinte pressoché con gli stessi criteri di Rubtzov in stazioni diverse ed in tre anni successivi per le specie *Stenobothrus lineatus* Panz., *Chorthippus longicornis* Latr. (*parallelus* Zett.) e *Chorthippus dorsatus* Zett. Le frequenze dei fenotipi per le due prime specie non presentavano differenze nelle diverse stazioni e nei diversi anni, soltanto *Chorthippus dorsatus* Zett., mostrò delle differenze considerevoli nelle tre stazioni esaminate. Questi risultati sono da L'Heritier messi in relazione col fatto che le prime due specie sono ubiquitarie; la terza, in relazione alle sue caratteristiche ecologiche, si troverebbe in isole, in cui si stabilirebbe un equilibrio separatamente per ogni stazione, mentre per *Stenobothrus lineatus* e *Chorthippus longicornis* vi sarebbe facilità di incroci tra le diverse forme anche di stazioni relativamente lontane.

Tra il materiale raccolto nella regione dolomitica da uno di noi (G. C.) particolarmente numerosi sono stati gli esemplari di *Chorthippus longicornis* Latr. di alcune stazioni, sufficienti per tentare un'analisi della distribuzione di diverse forme.

L'esame è stato fatto su materiale preparato secco, in cui però è ancora possibile riconoscere distintamente le caratteristiche della pigmentazione. Analogamente a L'Heritier, si sono distinte quattro forme: una forma completamente verde (A); una forma in cui le regioni laterali della testa, del pronoto e delle elitre in posizione di riposo sono brune ed il dorso delle stesse parti è verde (B); una forma in cui le parti laterali invece sono verdi ed il dorso è bruno (B′); un'ultima forma (C) interamente bruna o, più esattamente non verde. Per i motivi che diremo dopo le forme B e B′ sono state riunite.

Nella tabella I sono riportati, per ogni stazione, le frequenze assolute per ogni forma, le frequenze decimali e l'errore medio.

Le frequenze delle varie forme raccolte nelle diverse località sono in taluni casi così differenti che non è necessario fare alcun calcolo di significatività per dimostrare tale differenza. Nei casi in cui le differenze sono meno evidenti è forse opportuno raccogliere materiale più abbondante prima di fare dei calcoli statistici.

Anche se in tutte le stazioni gli esemplari sono stati raccolti sempre sui prati, tuttavia le differenze tra le percentuali delle varie forme si possono attri-

(3) PH. L'HERITIER, *Contribution à l'étude du polymorphisme des Orthoptères:* I. *Description de populations polymorphes de quelques espèces d'Acridiens.* II. *Etude des proportions des divers types en présence*, «C. R. Soc. Phys. Biol. France», vol. 18, 1–5 (1944).

buire a selezione ambientale. Infatti, delle prime tre stazioni, Meida è in fondo valle e la raccolta è stata fatta su un prato relativamente umido; le stazioni di Passo Broccon e Pavione sono prati posti su dorsali relativamente secchi.

TABELLA I.

Stazioni	Forma A	Forme (B + B')	Forma C	Totale
Passo Broccon	51	19	—	70
IX–1951	0,730	0,270	—	
♂♂	± 0,0530	± 0,0530	—	
— —	64	26	12	102
— —	0,627	0,254	0,119	
♀♀	± 0,0478	± 0,0430	± 0,1010	
Meida	30	4	—	34
VIII–1950	0,886	0,114	—	
♂♂	± 0,0544	± 0,0544	—	
— —	35	11	—	46
— —	0,760	0,240	—	
♀♀	± 0,0629	± 0,0629	—	
Pavione	11	20	3	34
VIII–1951	0,324	0,580	0,096	
♂♂	± 0,0802	± 0,0846	± 0,159	
— —	16	23	23	62
— —	0,258	0,371	0,371	
♀♀	± 0,0555	± 0,613	± 0,0613	
Passo Cereda	17	11	8	36
VIII–1951	0,481	0,306	0,213	
♀♀	± 0,0831	± 0,0767	± 0,0682	
Calalzo	20	6	3	29
VIII–1951	0,670	0,200	0,130	
♂♂	± 0,0873	± 0,0742	± 0,0621	
— —	20	26	23	69
— —	0,289	0,377	0,334	
♀♀	± 0,0544	± 0,0583	± 0,0567	

Non deve meravigliare la diversità dei presenti risultati da quelli di L'Heritier. Le stazioni in cui sono state fatte queste raccolte sono molto lontane l'una dall'altra e si trovano in una regione alpina quindi spesso con caratteristiche ambientali molto diverse.

Il meccanismo genetico del polimorfismo in *Chorthippus longicornis* Latr. (*parallelus* Zett.) è stato indagato con esperienze di incroci da Sansome e LaCour (1935) [4] in Inghilterra e da Creighton e Robertson (1942) [5] in America.

I primi due Autori sono riusciti a riconoscere ben 14 geni responsabili del tipo di pigmentazione delle varie parti del corpo (genae, pronoto, femori, terga, ecc.); alcuni geni interagirebbero tra loro, mentre non sarebbe stata trovata alcuna forte concatenazione.

Un diverso tipo di eredità della pigmentazione è stato prospettato da Creighton e Robertson. Questi Autori hanno distinto diverse classi di fenotipi per la pigmentazione equivalenti praticamente alle « forme » di Rubtzov. I risultati di numerosi incroci di diverso tipo avrebbero dimostrato trattarsi di una serie di 4 alleli: s^R, s^L, s^v, s^+, con dominanza successiva.

Sia Sansome e La Cour che Creighton e Robertson hanno osservato tuttavia che i fenotipi studiati sono molto sensibili alle condizioni ambientali e che nel determinismo genetico sono pure in gioco dei geni modificatori.

Le condizioni di allevamento (temperatura umidità ecc.) in cui sono stati fatti gli esperimenti genetici su citati non sono state così strettamente controllate per cui non si possono escludere eventuali modificazioni della pigmentazione dovute a meccanismi fisiologici non ereditari (Uvarov) [6]. La descrizione dei fenotipi fatta dai genetisti non corrisponde completamente a quella delle forme descritte da Vorontzovskii e da Rubtzov, che sono poi quelle che si trovano in natura.

Nello studio del polimorfismo di *Stenobothrus lineatus* Panz., *Chorthippus parallelus* Zett. e *Chorthippus dorsatus* Zett. L'Heritier (1944) sembra non conoscere i su citati lavori di genetica. Dai dati della distribuzione delle frequenze delle forme osservate egli cerca di controllare una probabile ipotesi del determinismo genetico della pigmentazione ammettendo che i fenotipi corrispondenti a quelli indicati in questa Nota come A e C siano gli omozigoti e quelli B e B′ gli eterozigoti di una coppia di alleli.

Ammettendo tale ipotesi le frequenze dei fenotipi A, (B + B′) e C dovrebbero essere distribuite secondo la formula di Hardy e Weinberg

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 \quad (p + q = 1)$$

da cui è possibile controllare l'ipotesi stessa, perché in tal caso

$$\sqrt{\bar{A}} = p \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\bar{C}} = q \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\bar{A}} + \sqrt{\bar{C}} = 1.$$

Effettivamente dalle osservazioni di L'Heritier quest'ultima relazione è verificata entro i limiti della variabilità casuale.

La stessa relazione è stata controllata con i dati delle presenti osservazioni e nei limiti della variabilità casuale, essa risulta pure verificata. Per

(4) F. S. SANSOME e L. LA COUR, *The genetics of grasshopper*: « *Chorthippus parallelus* », « J. Gen. », vol. 30, 515–522 (1935).

(5) M. CREIGHTON e W. R. ROBERTSON, *Genetics studies on* « *Chorthippus longicornis* », « J. Hered. », vol. 32, 339–341 (1941).

(6) B. P. UVAROV, *Recent advances in Acridology*, « Anti-locust Bulletin », n. 1 (1948).

alcune delle stazioni in cui sono presenti tutti e tre i fenotipi i valori trovati sono:

Passo Broccon ♀♀:	0,900 ± 0,106
Pavione ♂♂:	0,870 ± 0,112
Pavione ♀♀	1,114 ± 0,088
Passo Cereda ♀♀:	1,160 ± 0,133
Calalzo ♂♂:	1,178 ± 0,110
Calalzo ♀♀:	1,114 ± 0,084

Tuttavia non è favorevole a questa ipotesi il fatto che manca il fenotipo C nei campioni di ♂♂ Passo Broccon e in quelli dei ♂♂ e ♀♀ di Meida e la frequenza degli eterozigoti è relativamente alta. È forse più esatto il meccanismo genetico prospettato da Creighton e Robertson, che si tratti di una serie di alleli.

Purtroppo però non mi pare che vi sia alcuna relazione che permetta di controllare tale ipotesi dall'esame di popolazione. Essendovi dominanza successiva le frequenze dei fenotipi sarebbero:

$$\begin{aligned} &\bar{A} && p^2 \\ &(\bar{B} + \bar{B}') && 2\,pq + q^2 \\ &\bar{C} && 2\,pr + 2\,qr + r^2. \end{aligned}$$

Un fatto tuttavia resta confermato anche da queste osservazioni, che in molte specie del genere *Chorthippus*, e probabilmente anche in generi affini esiste un polimorfismo che ha una base genetica, senza che si possa specificare quale sia l'esatto determinismo, benché sembri probabile che si tratti di una serie di alleli.

I meccanismi che mantengono tale polimorfismo sono difficili da analizzare fintanto che i risultati delle ricerche genetiche, in base ad incroci, non permettano di precisare il numero ed il tipo di geni interessati.

Fisiologia. — *Ancora circa gli effetti di ripetute crisi convulsive da elettroshock sui processi costruttivi* [*]. Nota [**] di Gaetano Livrea, C. Zannelli e A. D'Agostino-Barbaro [***], presentata dal Corrisp. G. Amantea.

Uno di noi (Livrea [1]) ha già studiato gli effetti di ripetute crisi convulsive da elettroshock (ES) sui processi costruttivi dei ratti albini e delle cavie, concludendo che: *a*) a parità di fattori esterni ambientali, le ripetute crisi convulsive da ES hanno un'immancabile e costante influenza nociva sull'accrescimento somatico degli anzidetti animali; *b*) l'azione nociva sembra

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Messina.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1954.

(***) C. Zannelli e A. D'Agostino hanno collaborato nella condotta degli esperimenti.

(1) G. Livrea, « Riv. di Biologia », *41*, 467 (1949).

più spiccata nelle cavie che nei ratti, più nelle femmine che nei maschi; *c*) in linea di massima, sembra esistere un rapporto diretto tra numero delle crisi, loro susseguirsi nel tempo e rallentamento della crescita; *d*) in diversi casi, per effetto del susseguirsi delle crisi, l'organismo dell'animale in accrescimento perde o è incapace di far funzionare con la dovuta sensibilità e celerità quei meccanismi di compensazione, che entrano in gioco allorquando, per una qualsiasi causa transitoria, si verifica un'alterazione dell'accrescimento.

L'evidente interesse biologico, dottrinale e pratico, degli anzidetti fatti rendeva necessario confermarli ed estenderli ad altri mammiferi, diversi dai Roditori, prima di cercare di chiarirne l'intimo determinismo.

Essendosi presentata l'attesa opportunità di una cucciolata di 5 cuccioli, tutti maschi, nati in laboratorio, da genitori nati ed allevati in laboratorio, noi l'abbiamo colta e sfruttata con l'anzidetto intento.

Gli animali sono stati posti in esperimento già al 3° giorno dalla nascita. I due di peso minore sono stati prescelti come controllo e gli altri sono stati destinati al trattamento convulsivante mediante ES, come tra poco preciseremo.

Durante tutto il periodo sperimentale, gli animali sono stati mantenuti sempre nello stesso ambiente con la madre, che ha provveduto alla loro assistenza ed al loro allattamento, sin che questo è stato necessario. Dopo lo svezzamento, la dieta è stata costituita da latte, residui di carne, pasta e pane a volontà.

La crisi convulsiva è stata provocata al mattino, a digiuno, quotidianamente, per 60 giorni consecutivi; indi, nei successivi 3 mesi, settimanalmente: applicazione bitemporale di adatti elettrodi, previo umettamento con soluzione salina degli stessi e delle regioni di applicazione già precedentemente rasate, erogazione 125 V/0.2 sec.

L'andamento dell'accrescimento è stato stabilito mediante il controllo a digiuno del peso corporeo, dapprima, per 60 giorni, quotidianamente, indi, nei successivi 3 mesi, settimanalmente. Con i dati relativi sono state costruite le tavole e le curve di accrescimento assoluto e percentuale.

Allo scopo di poter emettere un giudizio sul comportamento dello sviluppo, sono state analizzate nel contempo le seguenti manifestazioni: apertura della rima palpebrale, eruzione dei denti, maturità dello scheletro, deambulazione, abbaiamento, comportamento generale, ecc. Inoltre sono stati seguìti lo stato del mantello, la sensazione di fame, gli escreti, la funzione cardiocircolatoria, ecc. Nell'ultimo periodo di osservazione, infine, sono stati eseguiti i controlli della glicemia (metodo di Hagedorn e Jensen), degli elementi figurati del sangue, dello stato del midollo osseo, nonché gli esami radiologici dell'apparato digerente e dello scheletro.

La tecnica radiologica per l'apparato digerente è stata rigorosamente uguale: il pasto opaco è stato somministrato con sonda; il primo radiogramma per lo studio dello stomaco è stato assunto dopo pochi minuti dall'introduzione di 150 ml di sospensione baritata; dopo un'ora circa è stato eseguito il primo radiogramma per lo studio dell'intestino tenue; dopo 160' circa dal primo radiogramma è stato iniziato l'esame radiografico del colon.

L'esame dello scheletro è stato eseguito alla fine del 5° mese, subito dopo il sacrificio degli animali, sempre alla stessa distanza focale e nel seguente ordine: colonna lombare, bacino, arti inferiori, coda.

Si è provveduto a controllare il peso dell'encefalo, dei principali organi cavitari e delle ghiandole endocrine ed è stato avviato lo studio istologico ed istochimico dei seguenti organi: cervello, cervelletto, bulbo, midollo spinale, nervi periferici, cuore e vasi, polmoni, stomaco, duodeno, tratto digiunale del tenue, fegato, pancreas, milza, rene, linfoghiandole, tutte le ghiandole endocrine.

TABELLA I.

Gli effetti delle ripetute crisi convulsive da ES (*) sui processi costruttivi.

DATA	ANIMALI CONTROLLI				ANIMALI TRATTATI					
	1°		2°		1°		2°		3°	
	accrescimento		accrescimento		accrescimento		accrescimento		accrescimento	
	assoluto in g	percentuale	assoluto in g	percentuale	assoluto in g	percentuale	assoluto in g	percentuale	assoluto in g	percentuale
11 novembre 1953	175		245		260		310		350	
18 novembre 1953	275	57	375	53	420	61	485	56	550	57
25 novembre 1953	335	91	490	100	480	84	560	80	685	95
2 dicembre 1953	380	117	610	148	555	113	605	95	790	125
9 dicembre 1953	510	191	850	246	640	146	730	135	920	162
16 dicembre 1953	720	311	1160	373	815	213	950	206	1200	242
23 dicembre 1953	925	428	1475	502	895	244	1055	240	1385	295
30 dicembre 1953	1165	571	1810	638	990	280	1110	258	1470	320
6 gennaio 1954	1205	588	1950	695	1010	288	1050	238	1520	334
13 gennaio 1954	1390	654	2590	957	1240	376	1180	280	1735	395
20 gennaio 1954	1590	808	2915	1089	1145	340	1160	274	1990	468
27 gennaio 1954	1680	860	3370	1275	1215	367	1125	262	1860	431
3 febbraio 1954	1590	808	3710	1414	1300	400	1150	270	2015	475
10 febbraio 1954	2040	1036	4810	1863	1620	523	1380	345	2160	517
17 febbraio 1954	2260	1191	5145	2000	1675	544	1460	370	2240	540
23 febbraio 1954	2300	1214	5290	2059	1810	596	1750	464	2320	652
2 marzo 1954	3000	1614	5850	2287	2215	751	2285	637	3130	794
9 marzo 1954	3120	1682	5850	2287	2300	784	2350	658	3000	757
16 marzo 1954	3210	1734	6220	2438	2230	757	2420	680	2860	717
23 marzo 1954	3300	1785	6350	2491	2170	734	2330	658	2840	711
30 marzo 1954	3500	1900	6830	2687	2250	765	2500	706	2930	827
6 aprile 1954			7430	2932	2390	819	2900	835	3195	812

Infine, per i motivi che saranno più innanzi precisati, è stata eseguita la determinazione del Ca (metodo di Kramer e Tisdall), del P (metodo colorimetrico di Berenblum e Chain) [2] e dell'N (micrometodo di King) [3] nelle ossa.

(*) 1 ES *pro die* fino al 60° giorno, quindi 1 ES per settimana, fino alla fine dell'esperimento.

(2) I. BERENBLUM e E. CHAIN, « Biochem. J. », *32*, 295 (1938).

(3) E. J. KING, *Micro-analysis in Medical Biochemistry*, J. e A. Churcill, London (1947).

L'esame della tabella dell'accrescimento (tabella I), delle curve dell'accrescimento (fig. 1) e del fotogramma (fig. 2) dà una chiara idea della ripercussione operata sui processi costruttivi dalle ripetute crisi convulsive.

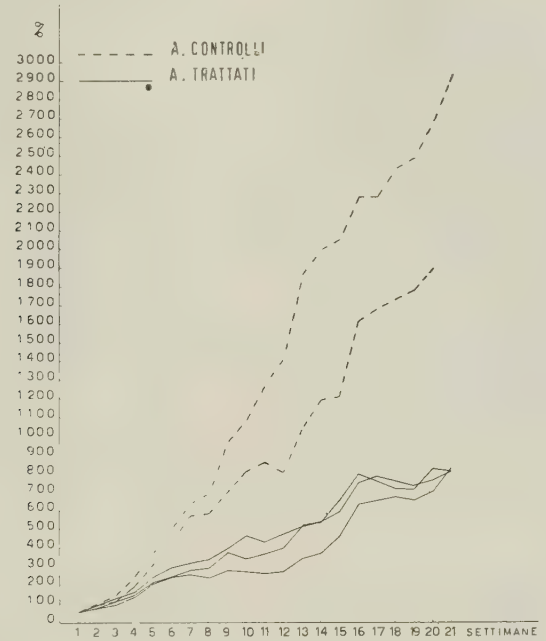


Fig. 1.

Tale ripercussione, appalesantesi dopo un determinato numero (12–15) di crisi, consiste in tutti gli animali, pur con qualche differenza individuale, in un netto e costante rallentamento dell'aumento pondero–staturale dell'organismo.

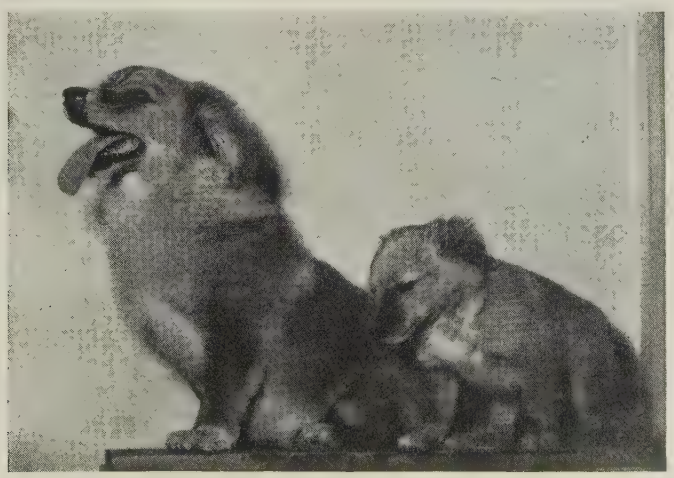


Fig. 2.

Per dare qualche cifra indicativa del comportamento ponderale, consideriamo l'animale controllo n. 2 e l'animale elettroshockato n. 1.

All'inizio dell'esperimento, questi pesavano rispettivamente g 245 e g 260; alla 3ª settimana il controllo ha già superato il trattato (precisamente il peso è rispettivamente di g 610 e g 555) ed alla fine dell'esperimento il controllo supera il trattato di oltre 5 Kg (precisamente g 7430 contro g 2380).

Del pari dimostrativo è il confronto ponderale del controllo n. 1 e dell'animale elettroshockato n. 3: all'inizio dell'esperimento il peso corporeo di questo è esattamente il doppio di quello del controllo (g 350: g 175), all'8ª settimana il peso del controllo ha già superato quello del trattato ed alla fine dell'esperimento il rallentamento dell'accrescimento del trattato è ancora più netto (ved. tabella I).

Ma perverremo ad una migliore comprensione della rallentata evoluzione pondero–staturale, se consideriamo quanto segue:

A) *ad essa non si è accompagnata:*

1° un'evidente alterazione della sensazione di fame e di sete;

2° un'apprezzabile disfunzione degli apparati digerente, cardiocircolatorio e renale;

3° una significativa modificazione della crasi sanguigna e dei mielogrammi;

4° un'evidente diminuzione del tessuto adiposo sottocutaneo e perivisceral e;

5° ma soprattutto al rallentamento della crescita, *non s'è accompagnata una manifesta alterazione della dinamica dei processi maturativi*, per cui gli animali sottoposti al trattamento, nel mentre presentavano, rispetto ai controlli, una minore età pondero–staturale, avevano la stessa età ossea di quelli, la stessa età dentaria, la stessa età motoria, ecc.

L'andamento della differenziazione e dello sviluppo delle strutture somatiche è stato giudicato sulla base: *a*) dell'epoca di apertura delle rime palpebrali (avvenuta, come di norma, tra il 9° e il 12° giorno); *b*) dell'epoca di eruzione dei denti (avvenuta, come di norma, tra il 19° ed il 23° giorno per i canini, tra il 24° ed il 30° giorno per gli incisivi cantoni, tra il 24° e il 33° giorno per gli incisivi mediani, tra il 26° ed il 34° giorno per i picozzi); *c*) della deambulazione; *d*) del grado di maturazione dello scheletro, giudicato dal numero dei nuclei epifisari ed apofisari e dallo spessore delle cartilagini di coniugazione; *e*) della maturazione dei lineamenti.

Il bisogno di cibo è stato valutato sulla base della voracità e della quantità di cibo ingerito, proporzionalmente mai inferiore nei trattati rispetto ai controlli.

Lo stato dell'apparato digerente è stato valutato con l'esame coprologico e radiografico (a carico dello stomaco: normale peristole, cinesi e rilievo mucoso; a carico dell'intestino: normale movimento di trasporto, denunciato da normale interposizione di anse dilatate a zone di contrazione segmentale con disposizione longitudinale delle pliche; uniforme riempimento del crasso: [figg. 3, 5, 7 per il controllo n. 2 e 4, 6, 8 per il trattato n. 3]).

Le osservazioni a carico delle altre funzioni sono state condotte con i comuni metodi clinici e di laboratorio.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

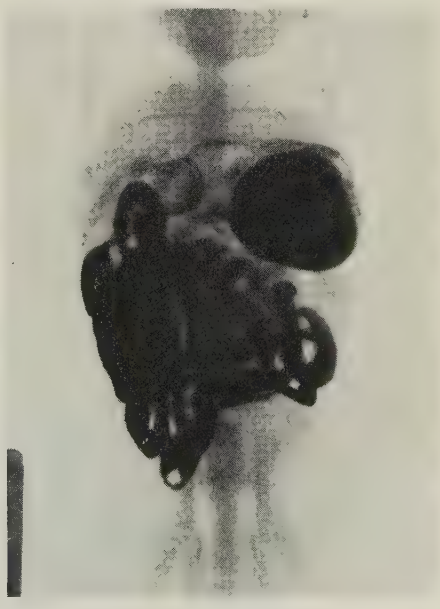


Fig. 6.

B) *All'influenza nociva sull'accrescimento si è accompagnata* invece:
1° una notevole modificazione dello psichismo.

Dapprima gli animali hanno incominciato ad essere sempre meno gioiosi e soddisfatti di fronte alle impressioni piacevoli; poi a, mano a mano, hanno manifestato segni sempre più chiaramente depressivi: sguardo atono, assenza di manifestazioni di gioia, ten-

denza ad isolarsi e parsimonia di movimenti; infine sono divenuti irritabili, litigiosi e per un nonnulla fuoriuscivano dallo stato di depressione per abbandonarsi ad esplosioni di furore con aggressività, mordacità, abbaiamento, ecc. (figg. 2, 9).

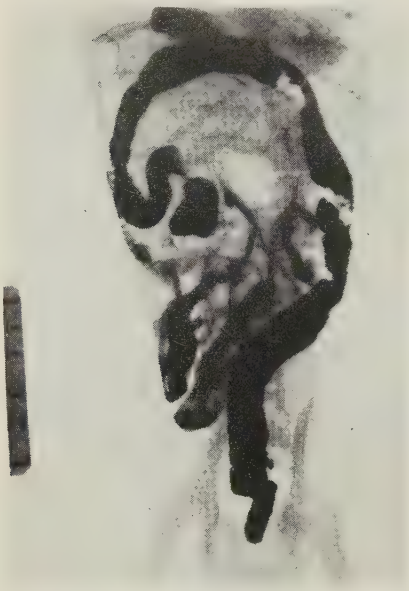


Fig. 7.

Fig. 8.

2° un'intensa, diffusa pigmentazione della cute dell'addome, del torace e della faccia interna delle zampe posteriori; perdita di lucentezza, diradamento e discromia del mantello;

Fig. 9.

3° un disordine dell'ossificazione, per cui le ossa, che già all'esame radiologico avevano mostrato una notevole diminuzione dell'accrescimento in lunghezza e spessore (figg. 10 e 11 per il controllo, 12 per il trattato),

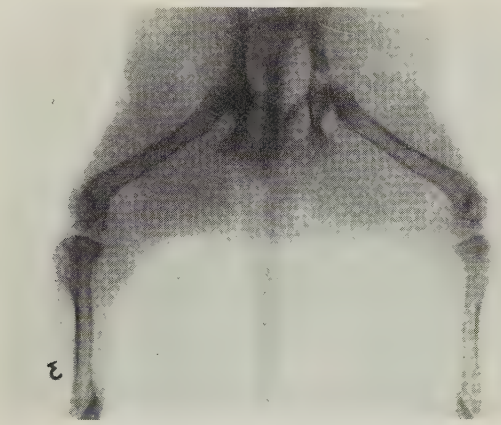


Fig. 10.

erano pieghevoli e fragili, si facevano tagliare e spezzare con facilità e all'esame biochimico, mostravano un aumento del Ca e del P, con rapporto Ca/P normale e senza parallelo aumento dell'N e quindi rapporto P/N aumentato, anche se di poco (ved. tabella II);

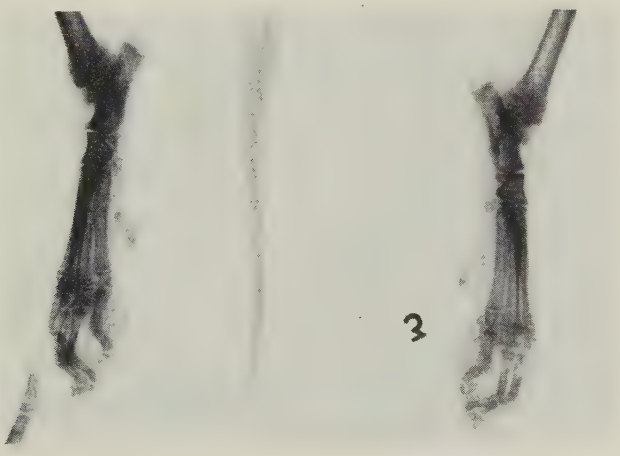


Fig. 11.

4° un aumento di peso, qualora riportato a 100 g di peso corporeo, del cervello e cervelletto, di determinati organi intracavitari e di determinate ghiandole endocrine.

In una prossima Nota, dedicata allo studio anatomopatologico, ritorneremo su questo aumento e preciseremo, tra l'altro, se al maggior peso degli organi corrisponde un effettivo maggiore sviluppo e se a questo provvede il tessuto connettivo o il tessuto differenziato.

Fig. 12,

Concludendo, queste nuove osservazioni, confermando ed estendendo le precedenti, permettono di asserire con più sicuro fondamento che i reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici, mediante ES, svolgono una netta azione inibitrice sull'accrescimento somatico.

TABELLA II.

Comportamento del Ca, *del* P *e dell'*N *delle ossa in conseguenza delle ripetute crisi convulsive da ES.*

	Ca °/₀	P°/₀	Ca/P	N °/₀	P/N
Controllo	27,5	10,5	2,6	6,2	1,6
Trattato	30,8	11,5	2,6	6,3	1,8

Tale azione si evidenzia dopo un certo numero di eccitamenti, è indipendente dall'assunzione di cibo e dalla capacità di utilizzarlo e trasportarlo, si accompagna a un disordine dell'ossificazione senza demineralizzazione, a pigmentazione diffusa di determinate zone della cute, a modificazione dello psichismo e, soprattutto, non si accompagna ad un'evidente perturbazione della dinamica dello sviluppo.

L'oggetto della nostra attenzione era solo la conferma dei vecchi e la raccolta di nuovi fatti. Eppure non vogliamo sfuggire alla spontanea domanda: « può la loro cauta valutazione consentire l'apertura di una discussione sul meccanismo determinante dell'attività antiauxologica dei ripetuti eccitamenti dei centri encefalici? ».

La crescita, la differenziazione e lo sviluppo delle strutture somatiche, a cominciare dallo zigote fino alla piena maturità, dipendono da fattori estrinseci, ambientali e da regolatori intrinseci. Questi sono dapprima i fattori genetici e, in periodi successivi, determinati tessuti specializzati appunto nel governo dell'ordinato schema di crescita, cioè « l'organizzatore primitivo », le ghiandole endocrine e il sistema nervoso.

Nel nostro caso, dopo quanto abbiamo posto in rilievo, ci sembra di poter asserire che i fattori estrinseci siano fuori causa. Rimane in discussione quindi l'azione dei ripetuti eccitamenti dei centri sui regolatori intrinseci.

Poiché, per ovvie ragioni, dobbiamo escludere il quadro dei geni, il campo di azione si restringe allo stesso sistema nervoso e alle ghiandole endrocrine.

In base a quanto sappiamo sui meccanismi endocrini della crescita e dello sviluppo e sulla regolazione nervosa, via ipotalamo-ipofisi, di tali meccanismi, potremmo pensare che l'osservata inibizione dell'accrescimento somatico sia la conseguenza del disturbo dei centri nervosi ipotalamici del controllo ipofisario, per i quali passano gli stimoli all'ipofisi, con la risultanza di un'alterata elaborazione dell'ormone della crescita ipofisaria e dei vari ormoni trofici per le ghiandole endocrine attive sull'accrescimento e lo sviluppo somatico.

L'anzidetta spiegazione neuro-ormonale è, invero, almeno a prima vista, molto soddisfacente. Difatti non solo ci permette di spiegare il rallentato aumento pondero-staturale, ma anche tutti i fenomeni ad esso concomitanti, vale a dire le manifestazioni psichiche, l'iperpigmentazione e il disordine dell'ossificazione.

A questo proposito, senza voler stabilire delle analogie, ma solo per sottolineare la possibilità d'iperpigmentazione cutanea e di disordini della ossificazione da stimoli neurogeni, vogliamo ricordare che McCune e Bruch e poi Albright e collaboratori [4-8], confermati da altri Autori, hanno descritto una sindrome dell'infanzia, da anomalia congenita dell'ipotalamo, la quale è caratterizzata, in entrambi i sessi: *a*) da iperpigmentazione cutanea, *b*) da alterazioni ossee, che portano spesso a deformità e fratture e non si accompagnano ad anormalità del metabolismo del Ca e del P e *c*) nelle femmine, da precocità sessuale e, talvolta, ipertiroidismo.

(4) D. J. McCune e H. Bruch, « Am. J. Dis. Child. », *54*, 806 (1937).
(5) F. Albright ed al., « New Engl. J. Med. », *216*, 727 (1937).
(6) W. H. Sternberg e V. Joseph, « Am. J. Dis. Child. », *63*, 748 (1942).
(7) M. B. Dockerty ed al., « Arch. Int. Med. », *75*, 357 (1945).
(8) F. Albright, « J. Clin. Endocrinol. », *7*, 307 (1947).

Ma la nostra ipotesi diventa meno soddisfacente, se consideriamo che essa, per permetterci di spiegare il normale livello di sviluppo contrapposto al ritardato livello di crescenza, ci costringe ad ammettere che i meccanismi presiedenti alla crescita lineare sono in gran parte diversi da quelli che presiedono ai vari processi di maturazione e che i ripetuti eccitamenti massivi dei centri encefalici alterano i primi e lasciano, almeno per molto tempo, nel cane, inalterati i secondi.

Allo stato dei fatti, non ci dissimuliamo quanto sia arduo, nel nostro caso, fare ammissioni del genere, pur sapendo, dopo le osservazioni di Gudernatsch, di Cotronei, di Allen, di Baffoni e Catte e di A. Stefanelli [9-14], che i processi di crescita e di sviluppo, per quanto di norma intimamente associati, possono in determinate condizioni dissociarsi e manifestarsi indipendentemente.

Dopo quanto abbiamo detto sin qui, riteniamo doveroso concludere che sono necessarie ancora appropriate ricerche, prima di poter stabilire definitivamente se l'alterazione di crescenza riconosce soltanto il determinismo neuro-ormonale prima prospettato o se, accanto a questo, non si debba tener presente anche l'altra possibilità dell'azione dei ripetuti eccitamenti sugli organi periferici tessutali.

Biologia. — *Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare.* – II. *Osservazioni sulla istogenesi delle cellule di Purkinje* [*]. Nota [**] di GIORGIO M. BAFFONI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Nella precedente Nota (Baffoni 1954 [1]) ho riferito alcune osservazioni sulla morfogenesi del cervelletto di gatto, mettendo in particolare evidenza la diversità del ritmo mitotico nei varî strati cerebellari, la lunga durata dell'attività proliferativa (nello strato granulare esterno si prolunga fin dopo un mese dalla nascita) ed i fenomeni di proliferazione e di degenerazione di elementi in rapporto alla prelocalizzazione dei solchi cerebellari.

In questa Nota riferirò alcune osservazioni sulla istogenesi delle cellule di Purkinje, eseguite nel gatto.

(9) I. F. GUDERNATSCH, « Arch. f. Entwicklungsmechanik », *35*, 457 (1912)

(10) G. COTRONEI, « Bios », *2*, 27 (1913).

(11) G. COTRONEI, « Arch. It. Biol. », *61*, 305 (1914).

(12) M. B. ALLEN, « J. Exp. Zool. », *24*, 499 (1918).

(13) M. B. ALLEN, « Biol. Rew. », *13*, 1 (1938).

(14) A. STEFANELLI, *Fondamento strutturale dell'accrescimento dei metazoi*, in Quad. N. 28 – *Accrescimento degli organismi* – p. 144 (1952) « Acc. Naz. Lincei ».

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1954.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *16*, p. 798 (1954).

Ricordo in proposito precedenti osservazioni con metodi di colorazione aspecifici (Addison 1911 [2]) e con l'applicazione del metodo di Feulgen (Loo 1937) [3] su *topi*, nonché le annotazioni sulle modificazioni della sostanza basofila nei primi periodi di sviluppo (Takasu 1905 [4] su *maiale* e Preto-Parvis 1951 [5] su *gatto*) e di vita extrauterina (Andrew 1936 su *topo* e *uomo* [6]) e le informazioni sulle modificazioni di formá di vario materiale trattato con i metodi di impregnazione argentica (Ramon y Cajal 1890 [7], Lugaro 1894 [8], Lui 1896 [9], ecc.).

L'esame dell'istogenesi è stato da me condotto su una serie di encefali fissati (alcuni in Carnoy ed altri in Helly) sistematicamente in diversi periodi dello sviluppo intrauterino (fetale) e dell'accrescimento somatico post-natale; i pezzi sono stati impregnati in celloidina-paraffina e sezionati in serie: le fette (5 μ) del piano sagittale mediale sono state trattate con i comuni metodi istologici (ematossilina ferrica, Mallory), con i metodi specifici per le strutture neurofibrillari (met. Bodian) e con i metodi istochimici per le strutture contenenti acido ribonucleico (metodi del bleu di toluidina al 1 : 10.000 a pH 4,5 e della pironina-verde di metile a pH 6; sezioni di controllo in acido perclorico sec. Di Stefano), per i desossiribonucleotidi (met. Feulgen; sezioni di controllo senza idrolisi), per la sostanza PAS positiva (met. Mc Manus-Hotchkiss) e delle proteine (met. del BPB di Mazia, Brewer e Alfert).

Le cellule di Purkinje si differenziano da neuroblasti localizzati nello strato granulare interno; inizialmente esse non si distinguono dagli altri elementi; nei feti di gatto di 70 mm. appaiono sul bordo esterno dello strato granulare alcuni elementi allungati che si distinguono per le dimensioni del loro nucleo (9,5 × 7,5 μ di diametro) dagli altri elementi nervosi (nucleo di 7,5 × × 7 μ di diametro); essi sono circondati da scarso e mal delimitato citoplasma in cui appaiono le prime tracce dei due prolungamenti; successivamente (nei feti di 85 mm.) gli elementi di Purkinje si presentano contigui, allineati in due-tre strati cellulari, di forma ancora allungata, ma più voluminosi (nucleo di 11,5 × 7,5 μ di diametro) e con citoplasma abbondante e ben delimitato, in cui appaiono le prime tracce dei differenziamenti generali (neurofibrille e sostanza basofila) e speciali (sviluppo del prolungamento dendritico). Nei feti a termine e nei gatti neonati le cellule di Purkinje presentano un ordinamento monostratificato e presentano un ulteriore accrescimento (nuclei di 12 × 9,5 μ di diametro) e differenziamento (formazione di brevi sfioccamenti in 2-3 rami del dendrite); a questo stadio, in corrispon-

(2) W. H. F. ADDISON, « Journ. Comp. Neurol. », *21*, p. 459 (1911).
(3) Y. T. LOO, « Journ. Comp. Neurol. », *67*, p. 423 (1937).
(4) K. TAKASU, « Anat. Anz. », *26*, p. 225 (1905).
(5) V. PRETO PARVIS, « Monit. Zool. Ital. », *60*, Suppl. p. 258 (1952).
(6) W. ANDREW, « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », *25*, p. 583 (1936).
(7) S. RAMON Y CAJAL, « Monatschr. Anat. Physiol. », *7*, p. 102 (1890).
(8) E. LUGARO, « Monit. Zool. Ital. », *5*, p. 152, 239 (1894).
(9) A. LUI, « Riv. Sperim. Freniatr. », *22*, p. 27 (1896).

denza degli elementi di Purkinje, ancora incompiutamente differenziati, si osserva l'arrivo delle prime fibre che costituiranno le fibre rampicanti. Nei gattini di 20–30 giorni dalla nascita gli elementi di Purkinje si presentano orientati ed intervallati lungo i *folia* cerebellari come negli adulti (ved. fig. 1, 3 e 4 della precedente Nota [1]); il loro differenziamento dimensionale (nuclei di $16 \times 14{,}3\ \mu$ di diametro), neuroplasmatico (fibrille e zolle di tigroide) e sinaptico (canestri e fibre rampicanti) in quasi tutti gli elementi di Purkinje hanno raggiunto l'identico aspetto che si riscontra nei gatti adulti. Va notato in proposito che il gatto è un animale tipicamente a prole inetta ed il tardivo

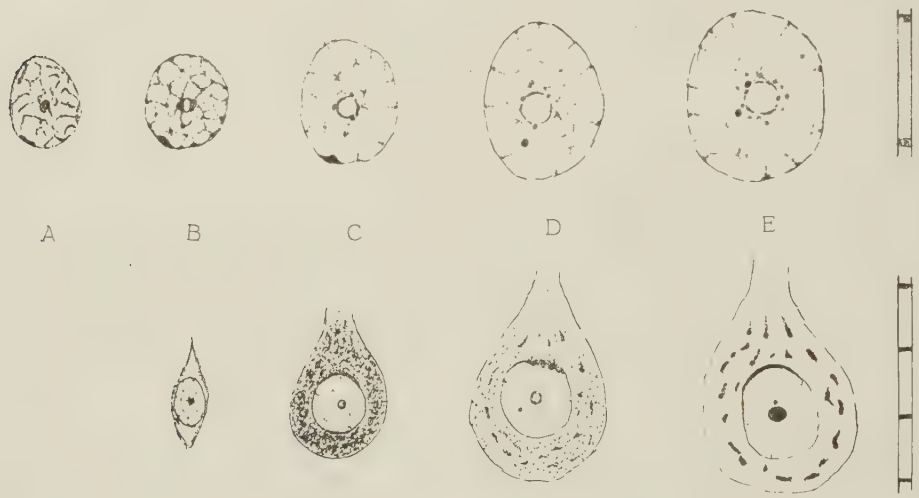


Fig. 1. – Aspetti dei differenziamenti nucleari (DNA) e della sostanza basofila (RNA) nell'istogenesi delle cellule di Purkinje del cervelletto.

A. in feti di 70 mm.; B. in feti di 85 mm.; C. in feti a termine e nei neonati; D. in gattini di 20 giorni dalla nascita; E. in gattini di un mese e negli adulti.
Sopra: aspetti della reazione di Feulgen. Sotto: aspetti con Bleu di toluidina o con Pironina.
(Disegni ripresi da microfotografie; ogni intervallo delle scale a fianco = 10 μ).

differenziamento degli elementi di Purkinje va messo in rapporto all'instaurarsi dei processi di correlazione dell'attività muscolare (attività locomotoria: Athias 1894 [10], Lui 1896 [9], Löwy 1910 [11], Addison 1911 [2]).

Descriverò sommariamente i risultati dell'applicazione dei metodi istochimici che saranno illustrati dettagliatamente in un lavoro per esteso.

I metodi per la sostanza basofila (RNA) hanno rivelato i primi accenni di acido ribonucleico nella massa nucleolare dei neuroblasti di Purkinje di feti di 70 mm.; successivamente (feti di 85 mm.) la basofilia si accentua nel nucleolo e compare nel neuroplasma (debole e limitata alla periferia cellulare); nei feti a termine e nei neonati il nucleolo appare ormai ben differenziato ed intensamente basofilo e il citoplasma ricco di ribonucleotidi, questi però sia nel corpo cellulare che nella porzione prossimale del dendrite sono distri-

(10) Athias, « Journ. Anat. Phys. » Paris, *33*, p. 372 (1894).
(11) R. Löwy, « Arb. neurol. Instit. Wien Univ. », *18*, p. 253 (1910).

buiti uniformemente e presentano un aspetto granuloso; nei gattini di 20–30 giorni dalla nascita la sostanza basofila del nucleolo raggiunge la massima concentrazione e quella del pirenoforo è differenziata in grosse zolle marcate, disposte regolarmente in una fascia equidistante tra la membrana nucleare e quella cellulare; una sottile zona intensamente basofila resta attorno al nucleo, sulla calotta rivolta verso l'albero dendritico. Negli adulti questi aspetti si conservano (fig. 1).

Di particolare interesse si sono rivelate le strutture Feulgen positive (DNA) nell'istogenesi delle cellule di Purkinje (fig. 1):

la *cromatina nucleolo–associata* si presenta inizialmente come un blocco unico Feulgen–positivo (feti di 70 mm.); con l'inizio del differenziamento nucleolare (feti di 85 mm.) si distingue in due masse (« zolle periferiche » di Levi [12]) e nell'ulteriore sviluppo fetale e post–natale appare come un rivestimento continuo (in sezione un anello) Feulgen–positivo che circonda la sostanza basofila (RNA) del nucleolo; con l'accrescimento del pirenoforo e del nucleolo tale rivestimento si assottiglia ed in certi tratti perde la sua Feulgen reattività assumendo infine un aspetto discontinuo;

la *cromatina degli autosomi* nell'istogenesi delle cellule di Purkinje da filamentosa (feti di 70 mm.) si risolve in un reticolo in cui spiccano delle masse granulari (cromocentri), quindi in zolle puntiformi, localizzate precipuamente sulla membrana nucleare; con il notevole accrescimento nucleare le granulazioni di DNA appaiono progressivamente più rade ed indistinte e scompaiono quasi del tutto dal carioplasma, tranne che sulla membrana nucleare ed attorno al nucleolo;

di interesse particolare è risultato l'esame della cromatina dei *cromosomi sessuali* (*sex–chromatin* di Barr [13]) nelle femmine: essa infatti si presenta come una netta massa Feulgen–positiva accollata sulla membrana nucleare nei neuroblasti e durante quasi tutta l'istogenesi degli elementi di Purkinje; poco prima del termine del periodo del differenziamento essa, divenuta sporgente, si stacca dalla membrana e, assumendo un aspetto sferico, migra verso il nucleolo (gattini di 20 giorni dalla nascita) portandosi in prossimità di esso; tale la si ritrova negli elementi di Purkinje delle femmine adulte.

In accordo con le osservazioni di Hydén (1943) [14] in nessuna fase del differenziamento ho osservato diffusione di materiale Feulgen–positivo nel citoplasma delle cellule di Purkinje (Loo, 1937 [3]).

La reazione del BPB nell'istogenesi degli elementi di Purkinje dimostra una notevole concentrazione di sostanze proteiche al livello delle strutture Feulgen–positive e neurofibrillari e segue i comportamenti descritti precedentemente per queste due strutture; in corrispondenza delle strutture ribonucleiche, invece, sia nel nucleolo che nel citoplasma ho osservato debole o nulla reattività del BPB.

(12) G. LEVI, « Riv. Patol. Nerv. Ment. », *1*, p. 141 (1896).
(13) M. L. BARR, L. F. BERTRAM e H. A. LINDSAY, « Anat. Rec. », *107*, p. 310 (1950).
(14) H. HYDÉN, « Acta Physiol. Scandin. », *6*, Suppl. p. 1 (1943).

I quadri ottenuti con la PAS reazione sulle cellule di Purkinje in differenziamento coincidono, sebbene con minor precisione di dettagli, con quelli descritti per la sostanza basofila ribonucleica (ved. Baffoni, 1953 [15]); negli elementi differenziati i quadri sono risultati gli stessi rappresentati da Hess (1953 [16] fig. 14); anche in questi elementi il nucleolo reagisce sempre debolmente ed indipendentemente dalla concentrazione dei ribonucleotidi nucleolari, è inoltre sempre presente una sottile fascia PAS positiva attorno alla membrana nucleare.

Ho in precedenza accennato che nel gatto di 20–30 giorni gli elementi di Purkinje si presentano *ordinati ed intervallati* lungo i *folia* cerebellari come negli adulti: da computi eseguiti su sezioni del verme, infatti, sia nel gattino che nell'adulto si rinviene un elemento di Purkinje ogni 60 μ in media; ma poiché il volume del cervelletto di gatto (per quanto in base a dati limitati: complessivamente 8 individui), aumenta dai gattini di un mese (735 mm.^{3} in media) agli adulti (3.600 mm.^{3} in media) di cinque volte, considerando che lo sviluppo in superficie nel caso specifico è notevolmente maggiore a causa dell'estensione e complicazione dei solchi cerebellari, ne deriva che il numero delle cellule di Purkinje del cervelletto aumenta notevolmente durante il periodo dell'accrescimento somatico. Questa deduzione non è in antitesi con i noti risultati di ricerche eseguite sulla costanza numerica degli elementi di Purkinje in animali a prole inetta (Ellis, 1919 [17], Delorenzi, 1931 [18], Andrew, 1936 [19]) anzitutto perché essi non considerano i primi periodi di vita extrauterina (quando l'aumento cerebellare è notevole), ma specialmente perché sono stati dedotti da conteggi di elementi per unità di superficie, senza tener conto dell'eventuale variazione volumetrica del cervelletto.

In rapporto all'aumento numerico delle cellule di Purkinje durante lo accrescimento somatico, ho osservato un assottigliamento dello strato granulare (da 190 μ nel gatto di un mese a 140 μ in quello di 2-3 anni) [20]; questo non può essere imputato alla semplice rarefazione degli elementi dello strato granulare (dovuto all'aumento in superficie dei *folia* cerebellari) poiché tale fenomeno è compensato ad usura dai processi del differenziamento degli elementi (aumento del citoplasma, differenziamento, sviluppo e mielinizzazione dei prolungamenti). Ma un argomento, a mio parere decisivo, è l'aver constatato che l'assottigliamento dello strato granulare negli adulti si ripercuote quasi esclusivamente su un determinato tipo di cellule. Rammento in breve che oltre ad elementi di nevroglia ed ai tipici neuroni stellati dello strato granulare (nel gatto pirenofori di 4 μ di diametro), sono

(15) G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *16*, p. 113 (1954).
(16) A. Hess, « Journ. Comp., Neurol. », *98*, p. 69 (1953).
(17) R. S. Ellis, « Journ. Comp. Neurol. », *32*, p. 1 (1920).
(18) E. Delorenzi, « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », *14*, p. 310 (1931).
(19) W. Andrew, « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », *28*, p. 292 (1936).
(20) Le misurazioni dello spessore dello strato granulare sono state eseguite lungo la porzione intermedia di solchi del verme perfettamente orientati.

stati descritti varî tipi di neuroni, di forma (multipolari e bipolari), aspetto del pirenoforo (stellato, fusiforme, globoso, poligonale) e dimensioni diverse che da Pensa (1931) [21] sono stati raggruppati sotto un'unica denominazione (*cellule polimorfe*); quelli di essi che nel gatto si presentano con gli aspetti peculiari dei neuroni differenziati, sono elementi con nucleo che misura da 9 a 13 μ di diametro, con neuroplasma fibrillare (fibrille argirofile e BPB positive), zolle di tigroide marcate e PAS positive, nucleo di aspetto vescicoloso, scarso di materiale Feulgen positivo, dal nucleolo ben sviluppato ed intensamente basofilo. Gli elementi dello strato granulare che si riscontrano meno frequenti nell'adulto si discostano per dimensioni (nucleo di 7,5×7 μ di diametro), per forma e per gli aspetti dei loro differenziamenti oltre che dagli elementi nevroglici (diffusamente basofili e PAS positivi), anche dalle cellule polimorfe; essi infatti si presentano come cellule dal citoplasma scarso e mal delimitato (argirofobo e cromofobo) e dal nucleo privo di nucleolo ribonucleico, con cromatina filamentosa o reticolare, cromatina dei cromosomi sessuali sulla membrana nucleare e ammasso centrale Feulgen–positivo (cromatina nucleolo–associata): sono elementi cioè che conservano gli aspetti dimensionali e morfologici dei neuroblasti osservati all'inizio della istogenesi delle cellule di Purkinje.

Se la formazione di nuovi elementi di Purkinje nell'accrescimento somatico parte da questi elementi, ne consegue che avrei dovuto individuare anche i varî stadi del differenziamento delle cellule di Purkinje, quali quelli osservati nella normale istogenesi del cervelletto. Ho verificato infatti che non tutti gli elementi dello strato di Purkinje presentano lo stesso aspetto, ma mentre la maggior parte di essi attraversano un determinato stadio, alcuni di loro si presentano ad uno stadio più arretrato; ciò è in accordo con una osservazione di Azoulai (1894) [22] e con altre osservazioni meno esplicite, ma non infrequenti in letteratura (Lugaro 1894 [8], Lui, 1896 [9] ecc.).

Ma vi è di più: anche nell'adulto, per quanto più raramente, ho osservato elementi di Purkinje con aspetti del differenziamento quali ho precedentemente descritti a varî stadi di sviluppo (fig. 2); un lungo ed accurato esame mi ha portato a rintracciare nell'adulto tutte le tappe del differenziamento delle cellule di Purkinje: da neuroblasta in poi. Ho osservato che tali elementi nei primi stadi di sviluppo (quali osservati nei feti da 70 a 85 mm.) sono localizzati nello strato granulare, quindi, migrando, giungono nello strato delle cellule di Purkinje, ove portano a termine il loro differenziamento (morfologico, dimensionale ed istochimico). In base a queste osservazioni le cellule polimorfe più piccole (che conservano gli aspetti di elementi non differenziati) e le cellule *intercalari* di Pensa [21] (*intermediarie* di Lugaro [8]) vanno considerate cellule di Purkinje in via di sviluppo; ricordo in proposito che da Stefanelli (1931) [23] è stato accennato a un rapporto tra

(21) A. PENSA, «Mem. R. Acc. Naz. Lincei», VI, *5*, p. 23 (1931).
(22) L. AZOULAI, «Compt. Rend. Soc. Biol.» Paris, *45*, p. 211 (1894).
(23) AU. STEFANELLI, «Arch. Ital. Anat. Embriol.», *29*, p. 231 (1931).

cellule di Purkinje e le cellule *intercalari* poiché queste, a differenza delle altre *cellule polimorfe*, presentano lo stesso aspetto morfologico dei neuroni di Purkinje, distinguendosi da essi solo per le minori dimensioni e per la difficoltà ad impregnarsi con i metodi argentici.

Constatata la presenza di elementi di Purkinje in sviluppo nell'adulto, ho portato il mio esame sullo strato granulare degli adulti: tra gatti giovani (2–3 anni) e di età avanzata (9 anni), ma non ancora senescenti, ho verificato un ulteriore assottigliamento dello strato granulare [20] (da 140

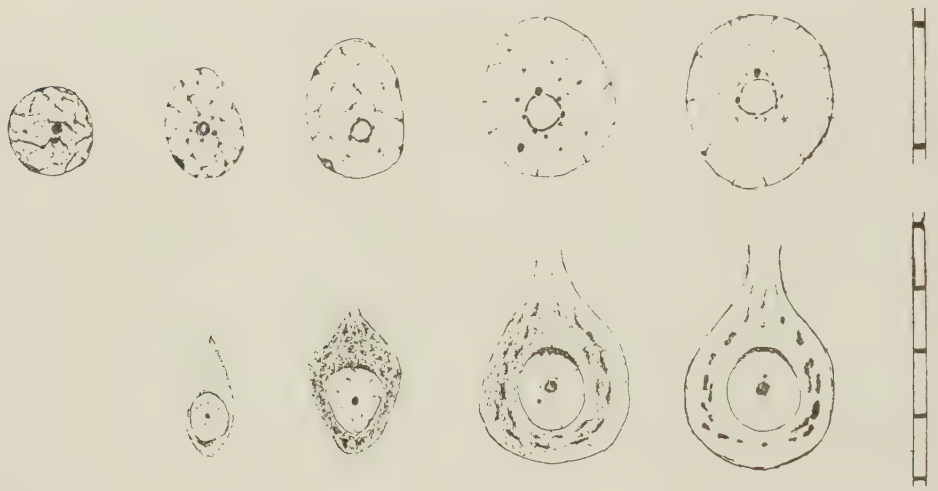


Fig. 2. – Aspetti dei differenziamenti nucleari (sopra) e della sostanza basofila (sotto) osservati nello strato granulare (prime due figure) e in quello delle cellule di Purkinje di gatti adulti.

(Disegni ripresi da microfotografie; ogni intervallo delle scale a fianco = 10 μ).

a 120 μ; D. = 20 ± 4,5 μ); anche in questo caso il fenomeno si accompagna con la rarefazione di elementi che conservano gli aspetti di neuroblasti.

Nonostante il differenziamento di nuovi elementi di Purkinje, risulta che nell'adulto il loro numero non aumenta sensibilmente [6, 17, 18]; la spiegazione del fenomeno è oggetto di osservazioni che saranno esposte in una successiva Nota.

Se ne conclude che gli elementi di Purkinje continuano a differenziarsi dopo la nascita e nell'adulto da neuroblasti dello strato granulare; nello strato granulare pertanto, dopo i processi della determinazione, molti elementi nervosi possono restare a lungo quiescenti allo stadio di neuroblasta e differenziarsi in tempi successivi, anche nell'adulto. Alcuni degli elementi polimorfi dello strato granulare e le cellule intercalari, inoltre, vanno considerati come stadî di sviluppo delle cellule di Purkinje.

Biologia. — *L'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli. Comparazione tra Anuri ed Urodeli* (*). Nota I (**) di TEODORO PERRI e LEONELLA NOTARNICOLA, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le esperienze che esponiamo in questa Nota hanno lo scopo, partendo da risultati direttamente ora raggiunti da noi negli Urodeli, di stabilire una diretta comparazione tra Anuri ed Urodeli, per quanto riguarda i fattori che portano alla formazione di arti soprannumerari da induzione abnorme.

Uno di noi (Perri, dal 1946 in poi) si è occupato a lungo dell'induzione di arti soprannumerari negli Anuri, esaminando i risultati in varie specie; e, tenendo conto dei precedenti risultati del Balinsky sugli Urodeli (1925–1937) ottenuti con tecnica tutt'affatto differente, ha svolto pure alcune considerazioni comparative tra questi due ordini di Anfibi. Come sopra si è accennato, abbiamo ora iniziato un confronto diretto tra Anuri ed Urodeli, usando in questi ultimi la tecnica dei trapianti, omoplastici o xenoplastici, di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. Abbiamo cioè usata la stessa tecnica adoperata dal Perri nelle sue ricerche d'induzione di arti soprannumerari negli Anuri. Il Perri si era proposto da tempo di ricercare con la sua tecnica l'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli; ma ritenne utile esaminare prima sotto i più vari aspetti, e ciò allo scopo di avere una sicura base comparativa, l'induzione negli Anuri.

È qui opportuno premettere che nel processo induttivo, in ciò che lo Spemann (1) chiama il sistema d'induzione, è sempre da distinguere il sistema attivo dal sistema reattivo, il qual'ultimo è costituito dal materiale reagente allo stimolo. Quando ambedue i sistemi tendono a determinare uno stesso abbozzo, si ha la « doppia assicurazione » o « principio sinergetico dello sviluppo » dello Spemann. Il sistema reattivo è ciò che oggi chiamasi pure, anzi più comunemente, la « competenza » della parte embrionale stimolata. Il Perri esaminò la competenza artoformativa negli Anuri sia a seconda della specie che a seconda dello stadio. Per valutare i risultati da noi ottenuti negli Urodeli, ricordiamo che Perri (2) ha osservato, usando una stessa tecnica ossia il trapianto della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato con dosi nettamente letali, che nei vari Anuri vi è una differente facilità nell'induzione degli arti soprannumerari. Tra le specie sinora esaminate, la frequenza è massima in *Bufo vulgaris* ove si hanno, in qualche lotto di esperienze, sino al 100 % di casi positivi. All'altro estremo è *Rana esculenta*, nella quale specie non si è finora riusciti ad avere

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1954.

(1) H. SPEMANN, *Experimentelle Beiträge zu einer Theorie der Entwicklung*, Berlin, 1936.

(2) T. PERRI, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, p. 753 (1952).

risultati positivi. Una discreta frequenza si ha in *Hyla arborea*, e qualche caso si ebbe in *Discoglossus pictus*. Poiché questi risultati erano stati ottenuti mediante trapianti omoplastici, era necessario ricercare se la mancata induzione in *Rana esculenta* fosse dovuta ad insufficienza di stimolo oppure a deficienza di competenza. Perciò Perri [3] eseguì il trapianto da *Rana esculenta* röntgenirradiata su *Hyla arborea* e vi ottenne l'induzione di arti soprannumerari: poté così concludere che la mancata induzione di arti soprannumerari in *Rana esculenta* è in rapporto con una scarsa o mancante competenza della somatopleura di questa specie e non con una mancanza di capacità di stimolo. Queste conclusioni sono state un punto di partenza per le nostre esperienze sugli Urodeli.

Vediamo ora brevemente i risultati raggiunti in queste esperienze preliminari che saranno naturalmente continuate per ottenere un maggior numero di dati.

Cominciamo con l'esaminare il trapianto della parte apicale della testa di embrioni di *Discoglossus pictus* o, per la maggior parte dei casi, di *Rana esculenta*, röntgenirradiati con dosi nettamente letali sul tronco di giovani embrioni di *Triton taeniatus*. La zona di trapianto fu nella parte anteriore del tronco, ove la competenza arto–formativa è per arti anteriori. In questi trapianti abbiamo avuti finora otto casi d'induzione di arti soprannumerari: 3 casi (su 5 trapianti) usando *Discoglossus pictus* e gli altri 5 (su 16 trapianti) usando *Rana esculenta*.

Nell'evoluzione del trapiantato, è interessante notare che si assiste dapprima al suo graduale riassorbimento. Questo avviene in piena vita embrionale ed è quindi da interpretarsi come conseguenza della röntgenirradiazione subìta. Si ricordi infatti (Cotronei ed Allievi) [4] che gli abbozzi di embrioni normali di Anuri trapiantati su Urodeli si sviluppano normalmente durante la vita embrionale e vanno poi riassorbiti quando l'urodelo è all'inizio della sua vita larvale, ossia (Cotronei) [5] dopo completato il riassorbimento del tuorlo.

È quando il trapiantato è già riassorbito, o del tutto o almeno in gran parte, che compaiono gli arti soprannumerari nei loro primi stadi di sviluppo. Si è quindi notato un rapporto diretto tra riassorbimento del trapiantato e comparsa delle formazioni soprannumerarie. Accenneremo tra poco all'importanza dello stadio nel quale avviene questo riassorbimento.

Gli arti soprannumerari che abbiamo ottenuto si presentano con gradi vari di tipicità; e sono arti unici, tranne un caso nel quale l'arto indotto fu duplice. In alcuni casi il differenziamento fu completo e con quattro dita (arti anteriori), e le dimensioni furono di poco inferiori al normale; si veda ad esempio il caso di cui all'annessa figura, nel quale l'esame microscopico

(3) T. Perri, in questi « Rendiconti », vol. XIV, p. 845 (1953).
(4) G. Cotronei ed Allievi, vedi questi « Rendiconti » dal 1929 in poi.
(5) G. Cotronei, in « Arch. Zool. Ital. », vol. 10, 1923.

ha, inoltre, posto in evidenza la presenza di un emicinto però atipico. Non abbiamo avuto arti soprannumerari dotati di mobilità.

Questo primo gruppo di risultati mostra anzitutto che usando come stimolo il trapianto di abbozzi che vanno in necrosi si ha anche negli Urodeli l'induzione di arti soprannumerari. Per quanto riguarda il trapianto da *Rana esculenta*, si ribadisce che pur non essendosi ottenuti in questa specie induzioni sperimentali di arti soprannumerari, tuttavia essa ha sufficienti capacità di stimolo, che come si manifestano (v. sopra) nella combinazione *Rana esculenta* su *Hyla arborea*, così pure si manifestano nella combinazione *Rana esculenta* su *Triton*. Abbiamo adunque ottenuto induzioni di arti soprannumerari in *Triton* mediante trapianti xenoplastici di abbozzi

Fig. 1. – *Triton taeniatus*. Induzione di un arto soprannumerario ottenuta mediante trapianto della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato di *Rana esculenta*. (Disegno).

röntgenirradiati. Abbiamo insistito molto in questa tecnica perché, volendo eseguire un diretto confronto tra Anuri ed Urodeli, ci è sembrato utile mantenere costante la fonte di stimolo in modo da indagare il comportamento dell'altro fattore ossia della competenza.

Induzioni mediante trapianti xenoplastici (otocisti di *Rana esculenta* o di *Hyla arborea* su *Triton*) erano state ottenute dal Balinsky [6], che aveva di mira lo stabilire in maniera definitiva se l'arto indotto provenisse nei suoi casi dai materiali del portatore (come difatti poté accertare) oppure dal trapiantato. Il nostro scopo, come si è visto, è stato assai diverso.

Per necessario controllo alle esperienze sopra dette, abbiamo eseguito, su embrioni di *Triton taeniatus*, il trapianto della parte apicale della testa di embrioni normali di *Rana esculenta*: sono pertanto esperienze che servono a valutare comparativamente l'importanza della röntgenirradiazione del

(6) B. I. BALINSKY, in « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 110, p. 63, 1927.

trapiantato e, quindi, delle sostanze citolitiche nell'induzione di arti soprannumerari negli embrioni di Urodeli. Il trapiantato dapprima prosegue nello sviluppo, e dopo che il portatore (*Triton*) ha terminato l'assorbimento del tuorlo (è divenuto larva nel senso del Cotronei) si ha che il trapiantato va riassorbito. Questo comportamento era prevedibile in base alle note ricerche del Cotronei e collaboratori sui trapianti xenoplastici tra Anuri ed Urodeli (dal 1929 in poi).

In questo gruppo di trapianti abbiamo finora osservato la formazione di probabili gemme di arto non ulteriormente proseguite nello sviluppo (solo in un caso abbiamo avuto un arto soprannumerario digitato). Queste gemme sono comparse prima che l'inizio del riassorbimento del trapianto fosse evidente.

Tali risultati meritano alcune considerazioni. Notiamo anzitutto che non escludiamo che continuando in questo genere di trapianti si possano avere altri casi chiaramente positivi. Possiamo però asserire fin da ora che vi è una nettissima differenza di risultati – sia per frequenza che per grado di sviluppo – a seconda che il trapiantato sia o no röntgenirradiato. È qui da ricordare che il Perri [7], nelle sue ricerche sull'induzione degli arti soprannumerari negli Anuri, aveva, allo scopo di valutare l'importanza delle sostanze citolitiche, confrontato i risultati (in *Bufo vulgaris*) a seconda che il trapiantato fosse o no röntgenirradiato. Ottenne che i risultati erano nettamente migliori, sia per frequenza che per tipicità d'indotto, quando il trapiantato era röntgenirradiato. Anche nelle ricerche sulle prime fasi della formazione degli arti soprannumerari Perri ottenne che quando il trapiantato era röntgenirradiato si ha la formazione di accumuli di cellule mesenchimatiche che si dispongono a costituire gemme soprannumerarie di arto; invece se il trapiantato non era röntgenirradiato (ossia di tessuti non destinati ad andare distrutti) allora le cellule mesenchimatiche sono in minor numero e raramente costituiscono gemme di arto. Si noti inoltre – anche per l'interpretazione delle gemme di arti da noi ottenute in *Triton* e che poi non sono proseguite nello sviluppo – che le gemme di arto perché proseguano nello sviluppo occorre (Filatow, Perri) che non siano al disotto di certe dimensioni. Ribadiamo adunque che anche nella sperimentazione sugli Urodeli si ha – come nella sperimentazione sugli Anuri – una nettissima differenza a seconda che il trapiantato sia o no röntgenirradiato; onde l'importanza – anche negli Urodeli – delle sostanze citolitiche quali forti stimolanti della somatopleura. Si riconferma inoltre, in queste nuove condizioni, l'aspecificità dello stimolo.

Su un'altra importante questione occorre richiamare l'attenzione. Si è visto che nei trapianti da Anuro, sia röntgenirradiato che normale, su *Triton* il trapiantato finisce sempre con l'andare distrutto. Si deve qui osservare che la necrosi del trapiantato avviene in momenti biologici differenti.

(7) T. Perri, in «Memorie Accad. Naz. dei Lincei», vol. III (ser. VIII), fasc. 2, sez. III (1951).

Il trapiantato röntgenirradiato, come sopra abbiamo detto, va in necrosi in piena vita embrionale: riassorbimento che si ha pure nei corrispondenti trapianti omoplastici e che quindi va attribuito alla röntgenirradiazione subìta. Invece il trapiantato, nei casi di non röntgenirradiazione, va riassorbito, come si è detto, in uno stadio molto più avanzato (stadio di larva nel senso del Cotronei). Orbene lo stadio nel quale avviene la liberazione delle sostanze citolitiche ha grande importanza nell'induzione degli arti soprannumerari, perché con il progredire dello sviluppo varia (decresce) la competenza artoformativa della somatopleura. Il Balinsky [8] osservò che in *Triton* questa perdura sino allo stadio 42–44 indi diminuisce per poi scomparire rapidamente. Per *Bufo vulgaris* se ne occuparono sia Perri [3] [9], che, nello stesso Istituto, L. Dei [10], osservando che essa scompare nella seconda metà della vita embrionale. La competenza è in rapporto con l'intensità dello stimolo che si usa e con la specie sulla quale si esperimenta. A completare l'impostazione logica delle attuali ricerche abbiamo iniziato ricerche in *Triton* con il trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati per vedere, con questa tecnica, sino a quale stadio è ancora possibile l'induzione di arti soprannumerari. Adunque la mancata formazione di arti soprannumerari nei casi di abbozzi che vanno in distruzione per incompatibilità biochimica può dipendere, ed almeno in gran parte certamente dipende, dal fatto che queste sostanze citolitiche si liberano in uno stadio avanzato dello sviluppo quando la competenza arto-formativa della somatopleura è diminuita. Ci sembra che queste considerazioni valgano pure per spiegare il fatto che in questo Istituto, ove dal 1929 in poi numerosissimi casi di trapianto di vari abbozzi da Anuri sul tronco di Urodeli furono seguìti fin dopo la distruzione del trapiantato, non si osservarono mai casi d'induzione di arti soprannumerari.

Accanto ai trapianti xenoplastici sopra riferiti abbiamo pure eseguito corrispondenti trapianti omoplastici. In alcuni casi la parte apicale della testa di embrioni di *Triton taeniatus* röntgenirradiati con dosi nettamente letali, venne trapiantata sul tronco di embrioni normali della stessa specie. In 7 di questi trapianti abbiamo avuto finora tre casi positivi (e un altro probabile) fra i quali uno ben differenziato in tutte le sue parti [11]. Adunque anche in *Triton* applicando la stessa tecnica che negli Anuri si hanno casi positivi d'induzione di arti soprannumerari in una percentuale notevole.

Queste esperienze vanno confrontate con i trapianti omoplastici (in *Triton taeniatus*) della parte apicale della testa però di embrioni non irradiati. Purtroppo abbiamo avuto qui una notevolissima mortalità, sicché solo qualche caso è vissuto per un tempo sufficiente. Non vi abbiamo

(8) B. I. BALINSKY, in « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 136, p. 250 (1937).

(9) T. PERRI, in « Arch. Zool. Ital. », vol. 39 (1954).

(10) L. DEI, in « Rivista di Biologia », vol. 46 (1954).

(11) Sia qui che altrove abbiamo indicato il numero esatto delle esperienze eseguite. Teniamo a rilevare che trattandosi di numeri piccoli, essi hanno solo un valore orientativo.

avuto alcuna induzione: ciò permette solo di ritenere come probabile che anche in queste condizioni lo stesso trapianto eserciti uno stimolo maggiore quando va in necrosi.

Conclusioni. – Dai risultati esposti e dalle considerazioni svolte si possono trarre le seguenti conclusioni.

Eseguendo il trapianto della parte apicale della testa di embrioni di Anuri su *Triton*, si ha che l'induzione di arti soprannumerari è di gran lunga più facile se il trapiantato è fortemente röntgenirradiato in modo che la sua necrosi, ossia la liberazione di sostanze citolitiche, avviene quando la competenza artoformativa della somatopleura è notevole. Corrispondenti differenze si possono ritenere nei trapianti omoplastici su *Triton*.

Tutto ciò pone in evidenza che anche negli Urodeli le sostanze citolitiche sono potenti stimolanti della somatopleura. Si ribadisce inoltre, in queste nuove condizioni, che dette sostanze citolitiche non presentano alcuna specificità biologica di specie.

Citologia. — *I° Contributo alla conoscenza della cariologia negli Insetti Embiotteri: La digametia maschile tipo* XO *in «Haploembia Solieri» Ramb.* [*]. Nota [**] di Renzo Stefani, presentata dal Socio G. Cotronei.

Gli Embiotteri, per quanto ci consta, non sono stati ancora studiati dal punto di vista cariologico, cosa che si può facilmente spiegare pensando alle scarse nozioni che si hanno sulla biologia, sull'anatomia e sulla sistematica di questo gruppo. Mi è parso perciò interessante iniziare con questa Nota una serie di lavori tendenti ad indagare citogeneticamente questi insetti; tale indagine forse potrà portare un contributo anche a quella che rimane ancora una questione da risolvere, e cioè il grado di parentela di questo ordine con gli altri ordini di insetti.

Ma oltre a questi aspetti generali, l'esame del corredo cromosomico della specie *Haploembia Solieri* Ramb. presenta un interesse particolare in quanto, come si suppone almeno per ora, dalla sua popolazione anfigonica si sarebbe isolata una popolazione partenogenetica distribuita oggi in determinate regioni (partenogenesi geografica).

Ad un lavoro in corso rimando la trattazione della meiosi oogenetica e partenogenetica, lavoro cui la Nota presente è da considerarsi preliminare.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari. Ringrazio vivamente il prof. G. Martinoli, Direttore dell'Istituto di Botanica della stessa Università per avermi gentilmente messo a disposizione l'apparecchio «Gamma» con cui sono state eseguite le microfotografie riportate.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1954.

MATERIALE E TECNICA. – Il materiale proviene dagli allevamenti tenuti nell'Istituto di Zoologia di Cagliari, ove le neanidi, raccolte nei pressi di Roma, sono maturate ed hanno potuto essere studiate. Le osservazioni sono state fatte su preparati per sezione (fissativi Carnoy, Petrunkewitsch, Zenker) colorati con ematossilina ferrica e col metodo di Feulgen. Inoltre sono stati allestiti preparati per schiacciamento colorati con l'orceina acetica.

CONSIDERAZIONI GENERALI. – Dopo una serie di divisioni spermatogoniali numerose soprattutto nell'ultima età larvale, i processi meiotici si compiono tumultuosamente quando la neanide, giunta alla fine dell'ultima età, si sta preparando all'ultima muta. Nei cinque lobuli formanti un testicolo, l'ordine di maturazione è irregolare, trovandosi in uno stesso testicolite follicoli nei più vari stadi meiotici o addirittura ancora in fase di moltiplicazione spermatogoniale. In uno stesso follicolo si nota per lo più che

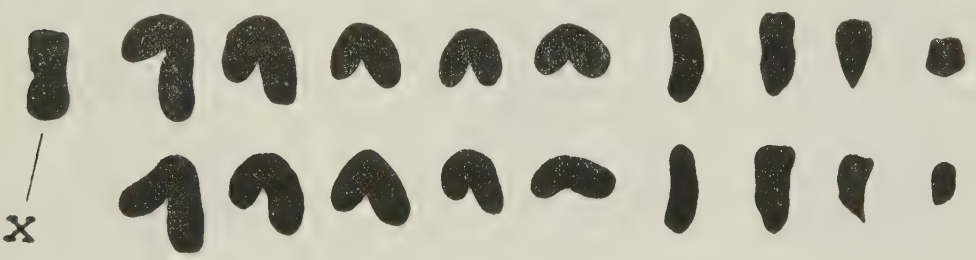


Fig. 1. – Idiogramma maschile diploide di *Haploembia Solieri* Ramb.

tutte le cellule sono allo stesso stadio meiotico, ma talvolta, se lo stadio è fugace, vi si possono scorgere le varie fasi del processo in atto, che, iniziatosi ad una estremità, percorre, come un'onda, i vari elementi germinali del follicolo stesso, permettendo così in modo eccellente lo studio delle varie fasi del processo.

La digametia riscontrata nella specie in esame è del tipo:

$$\delta\ 2n = 2A + XO \text{ cioè } 18 + X$$

$$♀\ 2n = 2A + XX \text{ cioè } 18 + XX.$$

Per la determinazione del corredo cromosomico diploide è stata esaminata una serie di cariogrammi degli spermatogoni in moltiplicazione e nelle uova in segmentazione. Sulla sua morfologia ho potuto stabilire quanto segue: Il corredo diploide del maschio (fig. 1 e Tav. I, fig. 1) è costituito da 9 coppie di autosomi più l'eterocromosoma. Gli autosomi comprendono:

1° 5 coppie di cromosomi più lunghi, a centromero submediano;

2° 2 coppie di cromosomi più corti a centromero subterminale;

3° 1 coppia di cromosomi corti, appuntiti ad una estremità, con centromero subterminale;

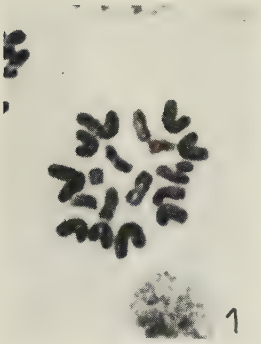
4° 1 coppia di cromosomi piccoli, subglobulari.

L'eterocromosoma è di media grandezza in rapporto agli autosomi e presenta una costrizione submediana con centromero. Degna di nota l'eteropicnosi che esso manifesta: infatti si può distinguere l'eterocromosoma in piastre spermatogoniali per un grado di nucleinazione inferiore a quello autosomico. Questa eteropicnosi (negativa), riscontrata anche negli Ortotteri, si inverte durante i processi meiotici. Vedremo infatti come nella II divisione maturativa il cromosoma X preceda gli autosomi nel processo di nucleinazione durante la profase II. Nella profase della I divisione il fenomeno è meno evidente.

Andamento della meiosi spermatogenetica: I^a Divisione meiotica. - L'andamento generale della meiosi è simile a quello riscontrato negli Ortotteri. La I divisione meiotica è riduzionale, la II equazionale. Dallo stadio di nucleo a riposo dopo l'ultima mitosi spermatogoniale si passa allo stadio zigotenico della profase della I divisione maturativa attraverso un leptotene a cromosomi filamentosi formanti un intreccio complicato. I nuclei zigotenici ben osservabili nei preparati per sezione e colorati alla Feulgen, presentano una evidente contrazione dei cromosomi (sinizesi) (Tav. I, fig. 2). L'appaiamento degli omologhi ha inizio in uno o in più punti e il processo, per quanto difficilmente analizzabile, si estende poi per tutta la lunghezza dei cromosomi. Dato lo scopo della presente Nota, non mi sono naturalmente soffermato ad indagare i processi più intimi che avvengono in questo stadio e in quelli seguenti della profase meiotica.

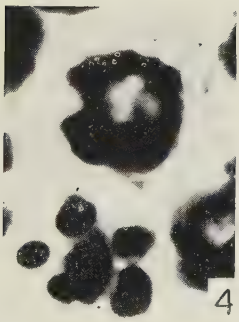
Mentre troviamo frequentemente follicoli testicolari nello stadio di zigotene, lo stadio di pachitene (Tav. I, fig. 3) appare soltanto in alcuni spermatidi ritardatari in follicoli comprendenti la totalità dei nuclei già in piena metafase eterotipica. Tale fatto depone a favore di una minor durata del pachitene rispetto allo zigotene. Nel pachitene si può infine notare aumento del volume nucleare correlato all'ingrossamento dei bivalenti.

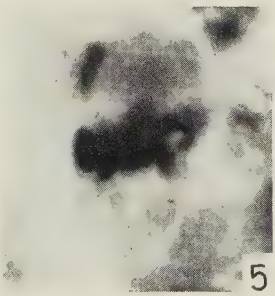
Ben nettamente visibile sia nei preparati alla Feulgen che in quelli all'ematossilina ferrica appare lo stadio di diacinesi (Tav. I, fig. 4, sopra) mentre il diplotene non è distinguibile. Nella diacinesi si ha una successiva contrazione ed un ingrossamento dei bivalenti (nei preparati alla Feulgen ben distinguibili) che si dispongono alla periferia del nucleo il quale possiede ancora la membrana nucleare. Molto raramente si notano interi follicoli in diacinesi. Per lo più la fase si presenta in una parte dei nuclei di un follicolo mentre nella parte rimanente i nuclei hanno già perduto la membrana (Tav. I, fig. 4, sotto) e si trovano nello stadio di prometafase della I divisione. I bivalenti hanno raggiunto le loro caratteristiche dimensioni. Nei preparati per schiacciamento colorati con l'orceina mi è stato possibile mettere in evidenza il monovalente distinguibile dai bivalenti per l'assenza della formazione a tetrade e per la presenza di un solo attacco al fuso (Tavola I, fig. 7, il 5° da sinistra). I bivalenti appaiono qui accorciati e alcuni di questi presentano un inizio di migrazione verso i poli del fuso, ma

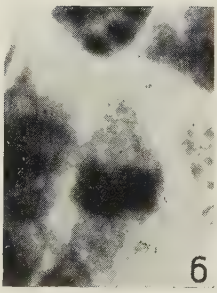

1

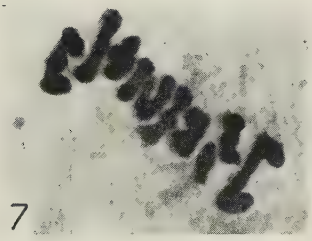
2

3


4

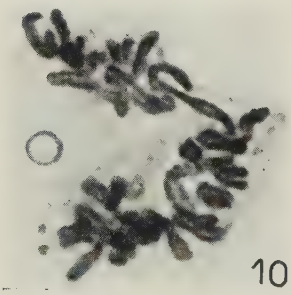

5

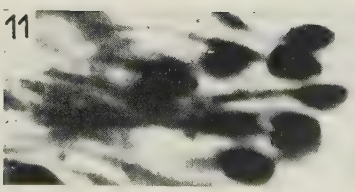

6


7

8

9


10


11

ben presto il monovalente supera gli altri e si porta decisamente verso un polo del fuso (Tav. I, fig. 5). Il fuso è normale, bipolare. Si ha quindi sostanzialmente una pre-eterocinesi con precessione del cromosoma X sugli autosomi, come avviene negli Ortotteri.

A questo stadio anafasico segue una telofase normale e quindi i due nuclei figli entrano in fase intercinetica nella quale scompaiono alla vista sia gli autosomi che l'eterocromosoma. I nuclei diventano debolmente colorabili ma si distinguono da quelli spermatogoniali soprattutto per le dimensioni evidentemente minori.

IIª DIVISIONE MEIOTICA. – La seconda divisione meiotica è, come abbiamo detto, equazionale. L'inizio della profase è preceduto da un maggior grado di nucleinazione dell'eterocromosoma negli spermatociti di II ordine che lo contengono. Si ha quindi una normale profase. La metafase seguente (Tav. I, fig. 6) mostra evidenti i due tipi di piastre: una con i 9 autosomi più il cromosoma X, grosso, un po' allungato, intensamente colorato (Tav. I, fig. 8), l'altra con i soli 9 autosomi (Tav. I, fig. 9). L'anafase e la telofase decorrono normalmente. Gli spermatidi perdono subito la colorabilità nucleare, mantenendo la forma sferica. La Feulgen dimostra un debole reticolo cromatico.

Si ha quindi un periodo di riposo, che in rapporto alla durata delle altre fasi meiotiche, è discretamente lungo, comparendo molto frequentemente nei preparati.

SPERMIOISTOGENESI. – Non mi sono preoccupato di esaminare la fine struttura degli spermatidi durante le modificazioni spermioistogenetiche. Noterò soltanto che con l'inizio del processo viene anzitutto a comparire un corpuscolo Feulgen-negativo, colorabile con l'ematossilina ferrica. Esso si localizza al margine del nucleo. Si può osservare successivamente una sempre più intensa colorabilità del nucleo accompagnata dalla formazione del filamento assile. Il nucleo subisce una contrazione, viene eliminata una parte di citoplasma e quindi si ha la formazione del nemaspermio. Questo appare nei preparati per schiacciamento a capo sferico dotato di lungo filamento mobile. Il collo non risulta evidente con i coloranti usati. In realtà però il capo è discoidale, come appare nei preparati in sezione (Tav. I, fig. 11).

CORREDO CROMOSOMICO FEMMINILE. – Il corredo cromosomico diploide femminile ($2n = 20$) (Tav. I, fig. 10) è tratto dall'osservazione del processo meiotico nelle uova e dalla osservazione, nelle uova fecondate, delle mitosi durante la segmentazione. In alcune uova infatti si sono contati 20 cromosomi, in altre 19. Logicamente dalle prime nasceranno femmine, dalle seconde maschi. Più difficile invece è stato trovare cellule somatiche in mitosi in neanidi e adulti. Lo studio della meiosi oogenetica costituirà l'argomento di un prossimo lavoro.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Cariologia in *Haploembia Solieri* Ramb. 1. Cariogramma diploide in spermatogonio durante la fase moltiplicativa (Prep. per schiacc., col. orceina acet.). 2. Meiosi spermatog.: Nuclei di spermatociti I in fase di Zigotene (col. emat. ferr.). 3. Id. in fase di pachitene (col. Feulgen). 4. Id. nucleo in fase di diacinesi (sopra) e in fase successiva di prometafase iniziale (sotto) (Col. emat. ferr.). 5. Nucleo di spermat. I in tarda metafase I div. mat. con il cromosoma X migrante a un polo (col. emat. ferr.). 6. Spermatocita II in metafase II div. mat. (col. emat. ferr.). 7. Piastra di metafase iniziale in Spermatocita I (col. orceina acet. prep. per schiacc.). 8. Spermatocita II in metafase II div. mat. mostrante i 9 autosomi più l'eterocromosoma (col. emat. ferr.). 9. Id. mostrante soltanto i 9 autosomi (col. emat. ferr.). 10. Cariogramma diploide femminile da uovo in segmentazione (prep. per schiacc. col. orceina acet.). 11. Spermatozoi (col. emat. ferr.).

Note bibliografiche

E. B. Wilson, *The Cell in Development and Heredity*, 1925.
M. J. D. White, *Cytogenetics of Orthopteroids Insects*, « Advances in Genetics », IV, 1950.
M. J. D. White, *I Cromosomi*, Einaudi, 1950.
L. Geitler, *Grundriss der Cytologie*, Berlin, 1934.

D. De Blasi e A. Signorini.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1954 – Settembre–ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Cosmogonia. — *La temperatura del gas nella galassia primitiva.* Nota (*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. Come è noto, la nostra galassia ha una massa circa duecentomiliardi di volte maggiore di quella del Sole, costituita in parte da stelle ed in parte da gas interstellari La sua forma è grossolanamente simile a quella di un disco, avente un diametro di 40.000 parsec (un parsec = 3,26 anni di luce = $3{,}08 \cdot 10^{18}$ cm) ed il suo spessore medio è di circa 6000 parsec, con un debole rigonfiamento nella sua parte centrale. Inoltre le osservazioni mostrano che la densità è massima nel piano equatoriale del disco e diminuisce simmetricamente da una parte e dall'altra di esso, in modo che le superfici di eguale densità (almeno nelle regioni lontane dai bordi e dal centro) risultano approssimatamente costituite da piani paralleli al piano equatoriale. E proprietà analoghe si hanno per molte altre galassie (ad esempio di Andromeda, dell'Orsa Maggiore, del Triangolo ecc.) interamente separate dalla nostra.

Secondo la cosmogonia, questi fenomeni si spiegano ammettendo che il gas, che in tempi remotissimi riempiva lo spazio, si sia lentamente condensato in masse separate a forma di immensi strati pianeggianti (*galassie primitive*), in cui poi si formarono le stelle per successive condensazioni che sembra abbiano avuto inizio circa cinque miliardi di anni or sono.

Ciò posto, per studiare nel modo più semplice la costituzione interna della galassia primitiva, possiamo grossolanamente paragonarla ad uno strato gassoso che riempia lo spazio compreso tra due piani paralleli ed infinita-

(*) Pervenuta il 12 agosto 1954.

mente estesi, in modo che le superfici di eguale densità risultino piani paralleli ai due piani limitanti lo strato. Ho trovato allora che, in ogni punto dello strato, la densità del gas è data da un'equazione differenziale del secondo ordine, sempre riducibile alle quadrature; le quali anzi, nel caso che c'interessa, si riducono ad *integrali ellittici*. Terminate le integrazioni, ho voluto eseguire i calcoli numerici per la nostra galassia, valendomi dei dati forniti dall'astronomia, ed ho trovato che la *temperatura* del gas (in gran parte idrogeno ionizzato) che la costituiva prima della formazione delle stelle, era *estremamente* bassa; e cioè di circa 15 gradi sopra lo zero assoluto (— 258 C) nella regione equatoriale ed ancora minore nelle regioni distanti dal piano equatoriale.

Questo fatto, dimostrato dal calcolo, mi sembra degno di attenzione; sia, in generale, per quanto riguarda lo studio delle condizioni primitive dell'Universo; sia anche perché tale bassa temperatura ha certamente favorito la condensazione del gas in stelle. Credo quindi utile di riassumere brevemente, in questa nota, i risultati a cui sono pervenuto.

2. Consideriamo una massa gassosa in *regime politropico*; e cioè tale che, in ogni punto, la pressione del gas p_g sia proporzionale a ρ^λ; essendo ρ la densità e λ un numero positivo. Se supponiamo (come fa Eddington nelle sue ricerche sopra la costituzione interna delle stelle e come può ammettersi in prima approssimazione) che la pressione dell'energia raggiante p_r sia proporzionale a p_g, risulterà, per cose note $\lambda = 4/3$. Inoltre la pressione totale P, somma delle due pressioni, sarà pure proporzionale a ρ^λ, onde avremo

$$P = k\rho^\lambda \tag{1}$$

essendo k una costante positiva e $\lambda = 4/3$.

Ciò posto, se il gas è in equilibrio sotto la propria attrazione, indicando con V il potenziale newtoniano, avremo dalla meccanica:

$$\text{Grad } P = \rho \,\text{Grad } V \tag{2}$$

mentre V soddisfa all'equazione di Poisson

$$\Delta^2 V + 4\pi\rho f = 0 \tag{3}$$

dove f è il coefficiente attrattivo.

Ciò posto, scegliamo come piano xy un piano parallelo ai due piani limitanti lo strato gassoso che si considera, e supponiamo che le superfici di eguale densità (e quindi anche le superfici isobariche e quelle equipotenziali) siano piani paralleli ad xy. Ne risulta che, scegliendo come asse z una normale qualsiasi al piano xy, la pressione P, la densità ρ ed il potenziale V saranno funzione soltanto di z; onde la (2) e la (3) divengono, tenendo presente la (1):

$$\frac{dP}{dz} = k\lambda\rho^{\lambda-1}\frac{d\rho}{dz} = \rho\frac{dV}{dz} \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho f = 0. \tag{5}$$

Ponendo, per semplicità,

$$\lambda = 1 + \frac{1}{n} \quad ; \quad (7) \quad \rho = t^n \tag{6}$$

la (4) dà immediatamente

$$\frac{dV}{dz} = k(1+n)\frac{dt}{dz} \tag{8}$$

e quindi la (5) diviene

$$\frac{d^2t}{dz^2} + a^2 t^n = 0 \tag{9}$$

dove abbiamo posto, per brevità,

$$a^2 = \frac{4\pi f}{k(1+n)}. \tag{10}$$

Osserviamo che la (9) è un caso particolare dell'equazione di Emden sopra l'equilibrio delle sfere gassose, e cioè

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dt}{dr} + a^2 t^n = 0 \tag{11}$$

dove si suppone che le superfici di eguale densità siano sfere concentriche di raggio r. Infatti, se poniamo $r = R + z$, dove R è una costante, e se facciamo crescere R all'infinito, la (11) si trasforma nella (9).

Osserviamo però che, mentre l'equazione di Emden si riduce alle quadrature [1] soltanto per $n = 1$ ed $n = 5$, la (9) è *sempre* riducibile alle quadrature. Infatti, moltiplicando per $2\,dt/dz$, integrando e chiamando con b^2 una costante arbitraria *positiva*, abbiamo subito:

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 + \frac{2a^2}{1+n} t^{1+n} = b^2 \tag{12}$$

donde ricaviamo, tenendo presenti la (6), la (7) e la (10):

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{\lambda}\rho^{2-\lambda}\sqrt{b^2(1+n)^2 - \frac{8\pi f}{k}\rho^{\lambda}}. \tag{13}$$

3. Poiché la densità s si annulla sopra le due facce piane che limitano lo strato gassoso, vediamo che partendo dalla faccia inferiore e muovendoci verso la faccia superiore (e cioè facendo crescere la z), la densità ρ va crescendo; onde il radicale va preso col segno *positivo*. Questo incremento di densità continua fino a che il radicale *si annulla*, e cioè fino a raggiungere una densità massima ρ_0 data da

$$\rho_0^{\lambda} = \frac{kb^2(1+n)^2}{8\pi f}. \tag{14}$$

Dopo di ciò il radicale cambia segno, divenendo *negativo*; e quindi la densità ρ torna a diminuire con la stessa legge, per annullarsi nuovamente

(1) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Vol. II (Bologna, Zanichelli); G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici dell'astrofisica*, p. 132 (Milano, Hoepli).

sopra la faccia superiore. Scegliendo dunque come piano xy il piano in cui ρ assume il valore massimo ρ_0, e cioè il piano mediano dello strato, la (13) e la (14) ci dànno:

$$z = \pm \lambda \sqrt{\frac{k}{8\pi f}} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{\rho^{\lambda-2}}{\sqrt{\rho_0^{\lambda} - \rho^{\lambda}}} d\rho . \tag{15}$$

Ovviamente lo *spessore* H dello strato gassoso, e cioè la distanza tra i due piani che lo limitano, sarà dato da

$$H = 2\lambda \sqrt{\frac{k}{8\pi f}} \int_{0}^{\rho_0} \frac{\rho^{\lambda-2}}{\sqrt{\rho_0^{\lambda} - \rho^{\lambda}}} d\rho . \tag{16}$$

Osserviamo che, affinché H risulti finita, basta che λ sia *maggiore dell'unità*. Si ha quindi una notevole differenza col caso di strati sferici, dove è necessario [2] che k sia maggiore di 6/5 affinché la sfera gassosa abbia un raggio finito.

Così per esempio nel caso di $\lambda = 1$, e cioè nel caso di equilibrio *isotermico*, integrando la (15) si avrebbe ponendo $\rho/\rho_0 = s$:

$$z = \pm \sqrt{\frac{k}{8\pi f \rho_0}} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}} \right) \tag{17}$$

e quindi z diverrebbe infinita per $\rho = s = 0$.

È pure facile calcolare la massa M contenuta in una colonna di sezione unitaria parallela all'asse z e che attraversa tutto lo strato gassoso da una faccia all'altra. Si ha infatti, tenendo presenti la (13) e la (1) ed indicando con P_0 la pressione sul piano xy:

$$M = 2 \int_{0}^{H/2} \rho dz = \lambda \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \int_{0}^{\rho_0} \frac{\rho^{\lambda-1}}{\sqrt{\rho_0^{\lambda} - \rho^{\lambda}}} d\rho = \tag{18}$$

$$= \sqrt{\frac{2k}{\pi f}} \rho_0^{\lambda} = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi f}} .$$

Osserviamo che, a differenza di H, la massa M risulta sempre *finita* ed anzi è *proporzionale alla radice della pressione totale* P_0 nel piano equatoriale dello strato.

4. Nel caso che c'interessa, si ha $\lambda = 4/3$ e quindi H risulta finita. Inoltre se poniamo:

$$\rho = \rho_0 \cos^3 \varphi \tag{19}$$

(2) Cfr. G. SANSONE, op. cit., vol. II.

ciò che è lecito, essendo sempre $\rho \leqq \rho_0$, la (15) diviene

$$(20) \qquad z = \pm \rho_0^{-1/3} \sqrt{\frac{2k}{\pi f}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = \pm \rho_0^{-1/3} \sqrt{\frac{k}{\pi f}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0{,}5 \sin^2 \varphi}}$$

e cioè si riduce ad un integrale ellittico di prima specie di Legendre, con modulo 0,5. Integrando e tenendo presente la (19) e la (22), abbiamo allora:

$$(21) \qquad \rho = \rho_0 \, cn^3 \left(z \rho_0^{1/3} \sqrt{\frac{\pi f}{k}} \right) = \rho_0 \, cn^3 \left(3{,}70 \, \frac{z}{H} \right)$$

equazione che ci dà la densità ρ in funzione della z, per mezzo della funzione ellittica *cn*, (coseno amplitudine).

Analogamente, indicando al solito con F (0,5) l'integrale ellittico completo di prima specie di Legendre, abbiamo dalla (20) per lo spessore H dello strato gassoso, osservando che sui due piani limiti si ha $\rho = 0$ e quindi $\varphi = \pm \pi/2$ e ricordando che si ha dalle tavole F (0,5) = 1,85:

$$(22) \qquad H = 2 \rho_0^{-1/3} \sqrt{\frac{k}{\pi f}} F(0{,}5) = \frac{2}{\rho_0} \sqrt{\frac{P_0}{\pi f}} F(0{,}5) = \frac{2{,}08}{\rho_0} \sqrt{\frac{P_0}{f}} = \frac{2{,}62 \, M}{\rho_0} .$$

5. Applichiamo ora le nostre formole alla galassia primitiva, come esisteva prima della formazione delle stelle; e cioè ancora interamente gassosa. Adopereremo nei calcoli numerici le unità del sistema C. G. S.

A tal fine, osserviamo anzi tutto che la massa della galassia primitiva era certamente poco diversa dall'attuale; e cioè eguale a circa duecento miliardi di volte la massa del Sole, vale a dire a $4 \cdot 10^{44}$ grammi.

In conseguenza, essendo il diametro equatoriale della galassia eguale circa a 40.000 parsec od a $1{,}23 \cdot 10^{23}$ centimetri, e quindi essendo l'area della sezione equatoriale della galassia stessa eguale ad $1{,}19 \cdot 10^{46}$ centimetri quadrati, vediamo subito che la massa M contenuta in media in una colonna avente per sezione un centimetro quadrato, parallela all'asse z, sarà eguale a circa $3{,}4 \cdot 10^{-2}$ grammi. In conseguenza, poiché nel sistema C.G.S. si ha $f = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$, la (18) ci dà subito $P_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ (dine/cm^2); e cioè una pressione di circa 10^{-16} atmosfere.

Notiamo ora che lo spessore H della galassia primitiva era certamente poco diverso dall'attuale, giacché le stelle che oggi la compongono si sono formate per condensazione dell'antico strato gassoso. Ponendo quindi H = = 6000 parsec = $1{,}8 \cdot 10^{22}$ cm ed essendo $P_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$, la (22) ci dà subito $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-24}$ (gr/cm^3). Osserviamo che tale valore è *poco diverso da quello attuale* [3]; cosa che conferma il calcolo, mostrando che la materia, che anticamente si trovava sul piano equatoriale galattico, vi è in gran parte restata.

(3) Infatti, secondo le osservazioni, nelle vicinanze dell'equatore galattico vi è in media una stella per ogni volume di circa dieci o dodici parsec cubici, e cioè per ogni volume di $4 \cdot 10^{56}$ cm^3 in cifra tonda. Ammettendo grossolanamente che le stelle abbiano massa poco diversa dal Sole ($2 \cdot 10^{33}$ grammi) si ha $\rho = 5 \cdot 10^{-24}$.

Ciò posto, poiché P_o è eguale alla somma della pressione del gas e di quella dell'energia, indicando con T_o la temperatura assoluta nel piano equatoriale dell'antica galassia, avremo dalla fisica:

$$P_o = \frac{R}{q} \rho_o T_o + A T_o^4 \tag{23}$$

dove nel sistema C.G.S. si ha $A = 2{,}55 \cdot 10^{-15}$ ed $R = 8{,}26 \cdot 10^7$, mentre il peso molecolare medio q del gas può porsi [4] eguale a 0,75 circa, essendo tale gas costituito in gran parte da idrogeno ionizzato. Abbiamo quindi dalle (23) con facili calcoli numerici

$$T_o^4 + 0{,}22\, T_o - 47300 = 0 \tag{24}$$

equazione che ha una sola radice reale positiva. Risolvendola, troviamo subito $T_o = 14{,}7$ come avevamo detto in principio.

Ovviamente, negli strati lontani dal piano equatoriale galattico, la temperatura era ancora più bassa; come sarebbe facile calcolare con le nostre formole. Non occorre però aggiungere che, trattandosi di gas estremamente rarefatti, la parola temperatura ha un senso prevalentemente cinetico, come in molte altre questioni di astrofisica.

Chimica biologica. — *L'acido urico quale prodotto terminale del catabolismo degli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico e dell'uracile nel piccione e nel pollo* [*]. Nota [**] del Corrisp. Antonino Clementi.

Il catabolismo delle pirimidine nei vertebrati ureotelici è stato chiarito dalle ricerche di Cerecedo [1] nel 1931. Già precedentemente Wilson [2] nel 1923 e Duel [3] nel 1924 avevano riscontrato aumento della quantità dell'urea escreta dal cane dopo somministrazione di nucleosidi dell'uracile, di uracile e di timina. Successivamente Cerecedo ebbe il merito di individuare le fasi intermedie del metabolismo dell'uracile. Egli dimostrò, che, dall'uracile, per ossidazione con permanganato di potassio *in vitro*, si forma acido isodialurico e da questo si forma acido formilossalurico, e, successivamente, acido ossalurico e per somministrazione *in vivo* ai cani di questi acidi si forma urea e acido ossalico: questi due composti quindi sarebbero i termini ultimi del catabolismo dell'uracile attraverso la formazione intermedia di acido isodialurico, di acido formilossalurico e di acido ossalurico. Secondo Cerecedo

(4) Cfr. Armellini, *Fondamenti scientifici dell'astrofisica*, p. 127 (Milano, Hoepli).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fiolologia Umana dell'Università di Catania.

(**) Presentata nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Cerecedo, « J. Biol. Chem. », *75*, 661 (1927); *88*, 695 (1930); *93*, 269, 275, 283 (1931).

(2) Wilson, « J. Biol. Chem. », *56*, 215 (1923).

(3) Duel, « J. Biol. Chem. », *60*, 749 (1924).

e Stekol [4] gli acidi isobarbiturico, isodialurico e formilossalurico possono essere escreti in parte come esteri dell'acido solforico e la timina si trasformerebbe in urea attraverso la formazione intermedia di un glicol.

Per quanto si riferisce al catabolismo delle pirimidine nei vertebrati uricotelici (uccelli) abbiamo finora pochissime notizie, sebbene secondo l'ipotesi di Wiener [5] e secondo l'ipotesi formulata successivamente da noi [6], il corpo intermediario nell'uricosintesi a partire dall'ammoniaca negli uccelli sarebbe l'acido dialurico.

Nel 1933 D. Torrisi [7] osservò, che in seguito alla iniezione praticata ad un pollo per via intramuscolare di g. 0,5 di urea per Kg p. c. e alla contemporanea somministrazione per via orale di acido dialurico nella quantità di gr. 0,60 *pro die*, la quantità giornaliera di acido urico escreto rimase immutata, mentre tutta l'urea iniettata venne ritrovata come tale negli escrementi.

Questo risultato avrebbe potuto avere valore contrario alla tesi della trasformazione dell'acido dialurico in acido urico, se, come risulta dal protocollo stesso della esperienza non risultasse, che nei giorni in cui fu somministrato per bocca l'acido dialurico neutralizzato con idrato di sodio e sciolto in 30 cc. di acqua la quantità dei semi di frumento ingerita non fosse stata inferiore a quella ingerita nei giorni precedenti, per cui l'eventuale aumento della quantità di acido urico derivato dalla trasformazione dell'acido dialurico in acido urico poteva essere stato mascherato dalla diminuita uricosintesi consecutiva alla diminuita quantità di proteine alimentari ingerite.

Goldner e Gomori [8] nel 1945 e successivamente Saviano e Leone [9] nel 1946 rilevarono, che in seguito all'iniezione intravenosa di allossana aumenta l'uricemia nei polli; questo fatto sarebbe un argomento favorevole alla tesi della trasformazione dell'anello pirimidinico in anello purinico, se non fosse anche dimostrato che l'allossana esplica azione tossica sui reni dei polli e provoca quindi diminuzione dell'escrezione renale dell'acido urico.

Buchanan Sonne e Delluva [10] in un lavoro pubblicato nel 1948 affermarono, che Plentl e Schoenheimer [11] avevano dimostrato, che le pirimidine con carbonio marcato somministrate per via parenterale al piccione non si trasformano in acido urico. Ma l'affermazione di Buchanan, Sonne e Delluva, che è attualmente accettata come esatta da tutti i trattatisti e i biochimici, non ha per base alcun dato sperimentale come noi stessi abbiamo fatto rilevare fin dal 1950 [12]. Infatti dal contenuto del lavoro di Plentl e Schoenheimer si può rilevare, che questi ricercatori somministrarono l'ura-

(4) CERECEDO e STEKOL, « J. Biol. Chem. », *93*, 275 (1931).

(5) WIENER, « Beitr. Chem. Physiol. u. Path. », *2*, 42 (1902).

(6) A. CLEMENTI, « Archivio Scienze Biologiche », *14*, 451 (1930); « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *4*, 503 e 1062 (1929).

(7) D. TORRISI, « Arch. di Fisiol. », *32*, 87 (1933).

(8) GOLDNER e GOMORI, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », *58*, 31 (1945).

(9) SAVIANO e LEONE, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *22*, 1241 (1946).

(10) BUCHANAN, SONNE e DELLUVA, « J. Biol. Chem. », *166*, 781 (1946); *173*, 69, 81 (1948).

(11) PLENTL e SCHOENHEIMER, « J. Biol. Chem. », *152*, 203–231 (1944).

(12) A. CLEMENTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *26*, 391 (1950).

cile marcato *non ai piccioni, ma solamente ai ratti* in quanto ai piccioni furono somministrati esclusivamente guanina, creatina e acido guanidinacetico con carbonio marcato e *mai* l'uracile marcato.

TABELLA I.

Giorno	Gallo peso corporeo gr.	Semi di frumento ingeriti gr.	Sostanza somministrata per via parenterale	Estratto acquoso alcalino degli escrementi (fecce e urine)			
				Volume totale cc	Determinazione dell'acido urico metodo Folin–Shaffer		
					$KMnO_4$ $\frac{N}{20}$ per 100 cc. di estratto cc.	Acido Urico corrispond. in 100 cc di estratto mg.	Acido urico in tutto l'estratto gr.
1	2.050	100		10.000	5,70	24,37	2,43
2	2.050	100		10.000	6,00	25,50	2,55
3	2.050	100	gr. 0,5 di Acido Isobarbiturico	10.000	7,00	27,25	2,72
4	2.050	100		10.000	5,70	24,37	2,44
5	2.050	100		10.000	5,25	22,68	2,26
6	2.050	100	gr. 0,5 di Acido Dialurico	10.000	6,20	26,24	2,62 (*)

TABELLA II.

1	2.160	100		10.900	7,85	32,43	3,53
2	2.160	100		10.000	8,60	35,25	3,52
3	2.160	100	gr. 0,5 di Acido Isodialurico	10.600	9,90	40,12	4,25
4	2.170	100	gr. 0,5 di Acido Isodialurico	12.700	6,80	28,50	3,60
5	2.170	100		10.000	10,00	40,50	4,05
6	2.165	100		11.000	7,00	29,25	3,20

(*) L'esperienza non fu prolungata perché in seguito a una seconda iniezione di gr. 0,5 di acido dialurico Bios insorse edema locale e inappetenza dell'animale.

TABELLA III.

Giorno	Piccione peso corporeo gr.	Semi di frumento ingeriti gr.	Sostanza somministrata per via parenterale	Estratto acquoso alcalino degli escrementi (fecce e urine)			
				Volume totale cc	Determinazione dell'acido urico metodo Folin–Shaffer		
					$KMnO_4 \frac{N}{20}$ per 100 cc di estratto cc.	Acido urico corrispond. in 100 cc di estratto mg.	Acido urico in tutto l'estratto gr.
1	580	25		4.000	3,20	15,00	0,60
2	600	25		4.000	3,40	15,75	0,63
3	600	25		4.000	5,10	22,12	0,88
4	600	25	gr. 0,5 di Acido Isodialurico	5.560	5,20	22,50	1,24
5	600	25	gr. 0,5 di Acido Isoalurico	5.000	3,80	17,25	0,86
6	600	25		4.000	4,80	21,00	0,84

TABELLA IV.

Giorno	Gallo peso corporeo gr.	Semi di frumento ingeriti gr.	Sostanza somministrata per via parenterale	Estratto acquoso alcalino degli escrementi (fecce e urine)			
				Volume totale cc.	Determinazione dell'acido urico metodo Folin–Shaffer		
					$KMnO_4 \frac{N}{20}$ per 100 cc di estratto cc	Acido urico corrispond. in 100 cc di estratto mg	Acido urico in tutto l'estratto gr.
1	1.780	100		8.000	7,70	31,87	2,55
2	1.840	100	gr. 1 di Acido Isodialurico	7.000	9,05	36,90	2,59
3	1.820	100		7.000	10,85	48,68	3,05
4	1.790	100		7.500	8,90	36,37	2,72
5	1.810	100	gr. 0,5 di Uracile	8.000	7,5	31,12	2,49
6	1.790	100	gr. 0,5 di Uracile	9.600	7,5	31,12	2,98
7	1.800	100		9.000	9,0	36,75	3,30

TABELLA V (*).

Giorno	Gallo peso corporeo gr.	Semi di frumento ingeriti gr.	Sostanza somministrata per via parenterale	Estratto acquoso alcalino degli escrementi (fecce e urine)			
				Volume totale cc.	Determinazione dell'acido urico metodo Folin–Shaffer		
					$KMnO_4$ $\frac{N}{20}$ per 100 cc. di estratto cc.	Acido Urico corrispond. in 100 cc. di estratto mg.	Acido Urico in tutto l'estratto gr.
1	2.000	100		9.000	9,1	37,12	3,34
2	2.000	100		9.850	9,4	35,12	3,60
3	2.000	100		9.850	8,8	33,00	3,54
4	2.000	100	gr. 0,5 di Uracile	9.500	9,8	39,75	3,77
5	2.000	100	gr. 0,5 di Uracile	13.600	7,4	30,75	4,18
6	2.000	100		12.300	9,2	37,50	4,60
7	2.000	100		10.800	6,6	27,75	2,99
8	2.000	100		12.900	6,9	28,87	3,72
9	2.000	100		9.000	10,0	40,50	3,64

(*) Nell'esecuzione di questa esperienza sono stato coadiuvato da Filippo Russo Privitera.

TABELLA VI.

1	2.000	100		12.900	6,90	28,87	3,72
2	2.000	100		9.000	10,00	40,50	3,64
3	2.000	100		10.000	9,30	37,87	3,78
4	2.000	100	gr. 1 di Acido Dialurico	16.500	5,5	23,60	3,87
5	2.000	100		16.400	6,2	26,25	4,30 (*)

(*) L'esperienza non fu prolungata perché insorse edema locale e perdita dell'appetito da parte dell'animale il giorno successivo all'iniezione dell'acido dialurico Schuchardt.

La trasformazione dell'anello pirimidinico in anello purinico nei vertebrati uricotelici quindi, come abbiamo visto, finora è stata negata e non è attualmente ammessa. Inducono ad ammetterla le mie recenti esperienze [13]

(13) A. CLEMENTI, «Atti Accad. Naz. dei Lincei», Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., vol. XVII, 1954.

eseguite sul fegato di piccione isolato e sottoposto a circolazione artificiale con sangue defibrinato di piccione diluito con liquido di Tyrode glucosato a cui erano stati aggiunti l'acido dialurico e l'uracile e nel quale l'acido urico veniva dosato prima e dopo la perfusione mediante il micrometodo di Blauch e Koch (metodo di Folin all'uricasi). Dai dati ottenuti in queste condizioni sperimentali è risultato, che la quantità di acido urico extraformata è superiore a quella extraformata quando non si aggiunge alcuna sostanza azotata. Da questi risultati ho tratto la conclusione, che l'acido dialurico e l'uracile perfusi attraverso il fegato di colombo vengono trasformati in acido urico.

Allo scopo di dare più salde basi sperimentali e una indiretta conferma a questa conclusione, che interessa ad un tempo sia il problema del catabolismo delle pirimidine come il problema dell'uricosintesi negli uccelli ho giudicato di fondamentale importanza lo studio delle modificazioni, che la curva dell'escrezione dell'acido urico nel piccione e nel pollo presenta in seguito alla somministrazione di acido isodialurico, di acido dialurico, di acido isobarbiturico e di uracile, e di stabilire, se in seguito alla somministrazione di tali composti chimici al piccione o al pollo alimentati con quantità giornaliere rigorosamente costanti di semi di frumento ha luogo aumento della quantità di acido urico escreto.

I polli e i piccioni, su cui ho sperimentato, erano tenuti in gabbie speciali, il cui fondo era costituito da una rete metallica a larghe maglie attraverso le quali l'urina e le feci potevano cadere direttamente in una soluzione di fluoruro di sodio al 3 % acida per acido acetico o in una soluzione di fenolo al 5 %. Gli escrementi (urina e feci) eliminati nelle 24 ore precedenti venivano ogni mattina ridotti a piccolo volume e quindi portati a secchezza su bagno maria avendo cura di mantenere la reazione del liquido lievemente acida per acido acetico; quindi il residuo secco veniva sottoposto a ripetute estrazioni con acqua bollente lievemente alcalinizzata con idrato di sodio. L'estrazione acquosa veniva protratta fino alla scomparsa completa della reazione della muresside. Negli estratti acquosi, il cui volume totale era notevolissimo (circa 10 litri), si procedeva al dosaggio dell'acido urico col metodo al permanganato di Folin–Shaffer. La somministrazione per via parenterale degli acidi isodialurico, dialurico e isobarbiturico e dell'uracile veniva praticata per iniezione sottocutanea, eccezionalmente intramuscolare, nella regione pettorale e veniva iniziata solo quando la quantità dell'acido urico escreto nelle 24 h si era stabilizzata intorno ad un valore pressoché costante dopo un adeguato periodo di adattamento degli animali alla clausura nella gabbia. Ogni mattina veniva somministrata una quantità di semi di frumento corrispondente a quella che gli animali ingerivano spontaneamente nelle 24 h e ogni sera si aveva cura di costringerli, mediante l'imbeccamento artificiale, a ingerire tutti i semi residuati; questo accorgimento ha un'importanza decisiva in quanto ha lo scopo di evitare una gravissima causa di errore in questo tipo di ricerche rappresentata dalla eventuale diminuzione della quantità giornaliera di semi ingeriti.

Gli acidi isodialurico e isobarbiturico impiegati in queste esperienze sono stati sintetizzati espressamente per noi con illuminata generosità dalla Società Hoffman–La Roche di Basilea, che qui tengo a ringraziare; l'uracile impiegato era della Estmann Kodak Company, l'acido dialurico della Schuchardt e della Bios.

Le soluzioni acquose di questi composti venivano neutralizzate al tornasole con idrato di sodio prima di essere somministrate per via parenterale.

Dai dati analitici trascritti nelle accluse tabelle risulta, che la quantità dell'acido urico escreta nelle 24 ore dal piccione o dal pollo alimentati con quantità giornaliere rigorosamente costanti di semi di frumento presentò un netto aumento nello stesso giorno o nelle ventiquattro ore successive alla somministrazione parenterale sia degli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico come dell'uracile (iniezione sottocutanea di mezzo grammo in dosi refratte nelle 24 ore). Anche nelle esperienze di Cerecedo l'aumento della quantità di urea escreta aveva luogo spesso nelle 24 ore successive a quelle della somministrazione dei composti pirimidinici.

In base a tali risultati appare giustificato concludere, che gli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico e l'uracile introdotti per via parenterale in dosi non molto elevate nell'organismo del pollo e del piccione vengono trasformati in acido urico; questa conclusione è analoga a quella da noi tratta dalle precedenti esperienze eseguite perfondendo l'acido dialurico e l'uracile attraverso il fegato isolato e sopravvivente di piccione [13]. Il termine ultimo del catabolismo dell'uracile quindi nell'organismo dei vertebrati uricotelici sarebbe rappresentato dall'acido urico, laddove nell'organismo dei vertebrati ureotelici secondo Cerecedo esso è rappresentato dall'urea (fig. 1). Il cata-

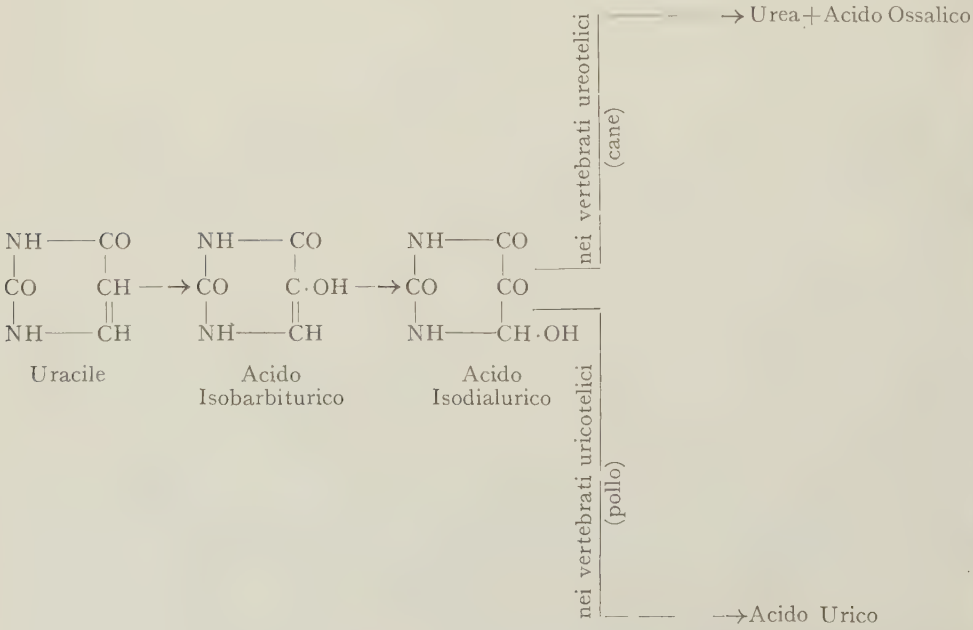


Fig. 1. – Catabolismo dell'uracile: ureotelico nei mammiferi e uricotelico negli uccelli.

bolismo dell'uracile negli uccelli sarebbe nella fase iniziale di carattere ossidativo come nei mammiferi e darebbe luogo alla formazione di acido isobarbiturico e di acido isodialurico; quest'ultimo però invece di essere ossidato ulteriormente fino alla formazione di urea e di acido ossalico verrebbe nell'organismo degli uccelli condensato coll'ammoniaca e con un acido monocarbonioso fino alla formazione di acido urico e di composti intermedi non noti (fig. 2). È importante rilevare, che l'attuarsi del processo della trasformazione dell'acido dialurico in acido urico nell'organismo degli uccelli, che appare come un fenomeno biochimico intercalato nel catabolismo dell'uracile, fu da me ammesso e considerato ipoteticamente nel 1929 come una delle fasi intermedie del complesso processo della biosintesi dell'acido urico a partire dal-

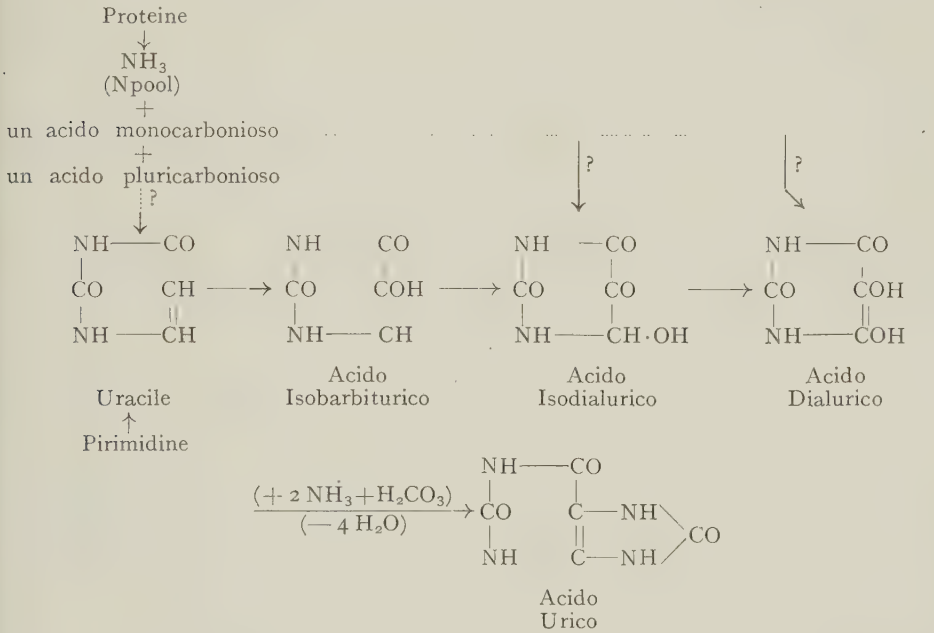


Fig. 2. – Schema dell'ultima via metabolica delle pirimidine nell'organismo degli uccelli e della possibile formazione intermedia di acido dialurico o di uracile, nel processo della biosintesi dell'acido urico a partire dall'azoto proteico.

l'ammoniaca di origine proteica senza l'intervento dell'urea. Sarebbe assai suggestivo modificando tale ipotesi ammettere, che in questo processo l'uracile sia il composto intermedio, derivato dalla condensazione dell'ammoniaca con composti da identificare, precursore dell'acido dialurico e dell'acido urico (fig. 2).

Le ipotesi qui formulate possono sembrare a prima vista inaccettabili in quanto attualmente è ammesso, che la glicina, in base alle ricerche di Buchanan Sonne e Delluva [10] e la 4-aminoimidazol-5-carbossamide in base alle ricerche di Greenberg [14] sarebbero le sostanze intermedie nel processo della biosintesi dell'anello purinico in generale. Ma tale contrasto risulta essere solo apparente ove si consideri, che dalle mie iniziali ricerche critiche [12]

(14) GREENBERG, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 6307 (1952).

e dalle successive sperimentali [15,16] è stato dimostrato essere infondata e quindi erronea la teoria secondo cui nell'organismo degli uccelli a partire dall'ammoniaca ha luogo la biosintesi dell'ipoxantina, e da questa per azione della xantinossidasi, deriva tutto l'acido urico. È quindi giustificato ammettere, che nel piccione e negli uccelli in genere, mentre la genesi dell'anello delle basi puriniche e, quindi, dell'acido urico da esse derivato può attuarsi attraverso la via metabolica generalmente ammessa, la biosintesi dell'acido urico derivato dall'azoto proteico avvenga attraverso una via metabolica diversa. Quest'ultima, conformemente alla ipotesi suenunciata, potrebbe avere come corpi intermedi composti pirimidinici. È innegabile, che appaiono argomenti ad essa favorevoli, sia la trasformazione in acido urico dell'acido isodialurico e dell'uracile da noi rilevata, sia la facile incorporazione dell'azoto dell'ammoniaca marcata somministrata al piccione nella molecola della citosina e della timina osservata da Barnes e Schoenheimer [17].

Ma è evidente, che sono necessarie ulteriori ricerche, le quali portino alla conoscenza di nuovi fatti e di nuovi argomenti, che abbiano un valore decisivo per stabilire, se nei vertebrati uricotelici la trasformazione dell'acido isodialurico o dialurico in acido urico rappresenta la via metabolica ultima esclusiva delle basi pirimidiniche o se essa sia l'ultima via metabolica comune delle basi pirimidiniche e delle sostanze proteiche; frattanto le nostre esperienze continuano.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica.* Nota [*] di Giovanni Lampariello, presentata dal Corrisp. B. Finzi.

1. In una recente Nota lincea [1] ho stabilito l'equazione delle onde elettromagnetiche in un corpo isotropo ed omogeneo in moto sulla base della teoria fenomenologica relativistica di Minkowski, limitandomi a considerare i soli termini di 1° ordine in $\beta = v/c$ e ho anche indicato come si possa ottenere l'equazione delle onde rigorosa nel caso che la direzione del moto coincida con quella della propagazione.

Successivamente, in una breve Comunicazione al Congresso internazionale dei matematici in Amsterdam (6 settembre 1954) ho riassunto la ricerca

(15) A. Clementi e G. Ricceri, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *27*, 868 (1951).

(16) A. Clementi e G. Ricceri, « Atti Accademia Gioenia Sc. Nat. Catania », *9*, ser. 6, 37 (1953).

(17) Barnes e Schoenheimer, « J. Biol. Chem. », *151*, 123 (1943).

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1954.

(1) Cfr. questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 1–2, pp. 37–44 (1954).

di una soluzione particolare rigorosa delle equazioni di Minkowski di effettivo interesse fisico, pervenendo all'introduzione del concetto di costante dielettrica di moto e di permeabilità magnetica di moto (e quindi anche di indice di rifrazione n^* di moto). Subordinatamente alla condizione che le direzioni di moto e di propagazione per onde piane coincidano, si trova che la formula di Maxwell della velocità di fase delle onde in un corpo isotropo ed omogeneo in quiete

$$c_0 = \frac{c}{n},$$

si generalizza nella seguente

$$c_1 = \frac{c}{n^*},$$

essendo c_1 la velocità di fase delle onde nel corpo in moto.

In questa Nota esporrò l'analisi che mi ha condotto a codesto risultato e stabilirò infine la relazione fra n^* ed n

$$n^* = n - n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\beta + \cdots$$

Il termine di 1° ordine in β (il cui coefficiente è negativo nel caso che le due direzioni dianzi indicate coincidano anche in verso e si ottiene moltiplicando per n^2 il coefficiente di Fresnel) esprime quantitativamente un effetto ottico-elettromagnetico, strettamente collegato col famoso effetto Fresnel–Fizeau, che, come questo, dovrà risultare in accordo con l'esperienza.

2. Le equazioni di Minkowski dei corpi isotropi ed omogenei in assenza di cariche e correnti sono [2]

$$\text{(I)} \qquad (\text{I}_1) \quad \dot{\mathfrak{B}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} \qquad (\text{I}_2) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad (\text{II}_1) \quad \dot{\mathfrak{D}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H} \qquad (\text{II}_2) \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} (\text{III}_1) \quad \mathfrak{D} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{H} = \varepsilon\left(\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{B}\right) \\ (\text{III}_2) \quad \mathfrak{B} - \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{E} = \mu\left(\mathfrak{H} - \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{D}\right). \end{cases}$$

Si suppone che il corpo in cui avvengono processi elettromagnetici sia isotropo ed omogeneo, per cui restano ad esso associati due parametri ε e μ che diconsi rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica (senza la ulteriore specificazione che codeste costanti materiali sono valutate con riferimento ad un sistema in cui il corpo è in quiete). Nella metrologia gaussiana razionalizzata, che qui usiamo, tali costanti sono numeri puri, i

(2) Cfr. ad esempio R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Bd. II, *Elektronentheorie*, § 60, 7ª ed. 1949 o la trad. italiana, Sansoni, Firenze 1950, § 60, pp. 389–397; W. PAULI, *Relativitätstheorie*, «Enzykl. der math. Wiss.», Bd. V, n. 33.

quali si riducono all'unità, quando si tratta del vuoto: il loro prodotto è il quadrato dell'indice di rifrazione n,

$$n^2 = \varepsilon\mu .$$

Le equazioni di Minkowski governano i fenomeni elettromagnetici in un corpo che è animato da moto traslatorio non accelerato rispetto ad un sistema S inerziale di osservazione: il parametro $\boldsymbol{v}$ è la velocità uniforme e costante del corpo rispetto ad S.

Introduciamo in S coordinate cartesiane ortogonali xyz e supponiamo che la velocità $\boldsymbol{v}$ abbia la direzione orientata dell'asse Ox.

3. Se fosse $\boldsymbol{v} = 0$, le equazioni di Minkowski si ridurrebbero alle equazioni di Maxwell

(I′) $\quad$ (I′$_1$) $\dot{\mathfrak{B}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$ $\quad$ (I′$_2$) $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$

(II′) $\quad$ (II′$_1$) $\dot{\mathfrak{D}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ $\quad$ (II′$_2$) $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$

(III′) $\quad$ (III′$_1$) $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$; (III′$_2$) $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$.

L'integrazione di queste equazioni è dominata dalla celebre equazione delle onde (dei corpi in quiete), che nel caso delle onde piane (aventi la direzione dell'asse x) si riduce alla forma

(IV′) $$n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 .$$

Le componenti secondo l'asse x delle grandezze elettromagnetiche sono nulle (trasversalità dell'onda) e le altre componenti sono pur soluzioni della (IV′).

Tipica è l'onda piana monocromatica polarizzata rettilineamente espressa dalle seguenti formule

(1′) $\quad \mathfrak{E}_x = 0 \quad \mathfrak{E}_y = A e^{i(kx - \omega t)} \quad \mathfrak{E}_z = 0$

(2′) $\quad \mathfrak{H}_x = 0 \quad \mathfrak{H}_y = 0 \quad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \mathfrak{E}_y$

(3′) $\quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ $\quad$ (4′) $\quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$.

Sovrapponendo a quest'onda un'onda analoga in cui $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ abbiano le direzioni degli assi Oz ed Oy rispettivamente, si avrebbe la polarizzazione ellittica generale.

4. Non mi consta che, nella pur vasta letteratura su questo genere di ricerche, sia stata posta e discussa la seguente domanda: qual'è la soluzione delle equazioni di Minkowski che per $\boldsymbol{v} = 0$ si riduce alla soluzione (1′), (2′), (3′), (4′)? Proponiamoci qui di ricercarla.

È anzitutto necessario rivolgere l'attenzione alle equazioni (III) (equazioni materiali o costitutive).

Risolvendole rispetto a $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ si ottengono le seguenti formule [3]

$$(III_3) \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left\{\varepsilon(1-\beta^2)\mathfrak{E} + (n^2-1)\left(\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{H} - \varepsilon\frac{\boldsymbol{v}}{c}\,\mathfrak{E}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\right\}$$

$$(III_4) \qquad \mathfrak{B} = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left\{\mu(1-\beta^2)\mathfrak{H} - (n^2-1)\left(\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{E} + \mu\frac{\boldsymbol{v}}{c}\,\mathfrak{H}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\right\}.$$

Domandiamoci ora se sia possibile soddisfare alle equazioni (I), (II), (III) con grandezze $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ dipendenti solo da x, t.

Dalle (III_1), (III_2) segue che

$$(5) \qquad \mathfrak{B}_x = \mu\mathfrak{H}_x \quad , \quad \mathfrak{D}_x = \varepsilon\mathfrak{E}_x .$$

Se allora si osserva che $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$; $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$ non dànno alcun contributo a div $\mathfrak{B}$, div $\mathfrak{D}$ perché dipendono solo da x, t, le (I_2), (II_2) si riducono a

$$(6) \qquad \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0 .$$

D'altra parte, tenendo presente che le componenti di rot $\mathfrak{E}$, rot $\mathfrak{H}$ si riducono a

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} \equiv \left(0\,,\,-\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\,,\,\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}\right)$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} \equiv \left(0\,,\,-\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}\,,\,\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}\right),$$

la 1ª delle (I_1) è

$$(7) \qquad \mu\dot{\mathfrak{H}}_x = 0$$

e la 1ª delle (II_1) è

$$(8) \qquad \varepsilon\dot{\mathfrak{E}}_x = 0 .$$

Si può dunque ritenere che in un processo di effettiva propagazione sia

$$(9) \qquad \mathfrak{E}_x = 0 \quad , \quad \mathfrak{H}_x = 0 .$$

Dalle (5) segue poi subito che è anche

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_x = 0 \quad , \quad \mathfrak{B}_x = 0 .$$

(3) Nella celebre esposizione della teoria della relatività che si deve a W. PAULI (1921), contenuta nel Bd. V della « Enzyklopädie der math. Wiss. », seconda formula (278 *a*) p. 658, il segno + che qui figura nell'espressione di $\mathfrak{B}$ è erroneamente sostituito dal segno —. Lo stesso errore di segno trovasi nella citata *Teoria degli elettroni* di R. BECKER (p. 274 dell'ed. tedesca e p. 397 dell'ed. italiana): 2ª formula (60.20).

Le altre componenti di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ sono

$$(11) \qquad \mathfrak{D}_y = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left(\varepsilon(1-\beta^2)\,\mathfrak{E}_y - \beta(n^2-1)\,\mathfrak{H}_z\right)$$

$$(12) \qquad \mathfrak{D}_z = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left(\varepsilon(1-\beta^2)\,\mathfrak{E}_z + \beta(n^2-1)\,\mathfrak{H}_y\right)$$

$$(13) \qquad \mathfrak{B}_y = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left(\mu(1-\beta^2)\,\mathfrak{H}_y + \beta(n^2-1)\,\mathfrak{E}_z\right)$$

$$(14) \qquad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{1 - n^2\beta^2}\left(\mu(1-\beta^2)\,\mathfrak{H}_z - \beta(n^2-1)\,\mathfrak{E}_y\right).$$

Le equazioni di Minkowski si riducono dunque alle seguenti quattro equazioni

$$(I_3) \qquad \begin{cases} \mu(1-\beta^2)\,\dot{\mathfrak{H}}_y + \beta(n^2-1)\,\dot{\mathfrak{E}}_z = c(1-n^2\beta^2)\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} \\ \mu(1-\beta^2)\,\dot{\mathfrak{H}}_z - \beta(n^2-1)\,\dot{\mathfrak{E}}_y = -c(1-n^2\beta^2)\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$(II_3) \qquad \begin{cases} \varepsilon(1-\beta^2)\,\dot{\mathfrak{E}}_y - \beta(n^2-1)\,\dot{\mathfrak{H}}_z = -c(1-n^2\beta^2)\,\dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \\ \varepsilon(1-\beta^2)\,\dot{\mathfrak{E}}_z + \beta(n^2-1)\,\dot{\mathfrak{H}}_y = c(1-n^2\beta^2)\,\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}. \end{cases}$$

Derivando rispettivamente la seconda e la terza equazione rispetto ad x e a t ed eliminando la $\dfrac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t\,\partial x}$ si ottiene

$$\mu\beta(n^2-1)(1-\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} - n^2(1-\beta^2)^2\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} - c\beta(n^2-1)(1-n^2\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t\,\partial x} =$$

$$= -c^2(1-n^2\beta^2)^2\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}.$$

Per eliminare la $\dfrac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2}$ basta derivare la seconda equazione rispetto a t.

Si ottiene in definitiva l'equazione

$$(IV) \qquad (n^2-\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2c\beta(n^2-1)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\,\partial x} - c^2(1-n^2\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

a cui debbono soddisfare le quattro componenti $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$. Quest'equazione delle onde dei corpi in moto, risolvente delle equazioni di Minkowski nelle condizioni dianzi specificate, si riduce ovviamente alla (IV') per $\beta = 0$.

Si osserverà anche che le due equazioni (IV′) e (IV) si riducono alla stessa equazione delle onde nel vuoto

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

per $n = 1$ e ciò conferma la covarianza dell'equazione delle onde nel vuoto rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Conviene infine osservare che la (IV) si riduce, per $\beta = 1$, all'equazione

$$(IV_1) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

come dev'essere, dovendosi da essa dedurre che la velocità di propagazione è uguale a c.

Nella mia Nota citata a p. 100 ho accennato alla deduzione dell'equazione (IV) dalla (IV′) mediante l'uso della trasformazione di Lorentz. È però evidente che è preferibile la deduzione diretta qui indicata, poiché le equazioni fondamentali dei processi elettromagnetici macroscopici nei corpi in moto sono le equazioni di Minkowski.

5. Ciò posto, se si cercano soluzioni della (IV) della forma

$$(15) \qquad \Phi = A e^{i(kx - \omega t)}$$

si trova che il rapporto

$$(16) \qquad c_1(\beta) = \frac{\omega}{k}$$

dev'essere radice dell'equazione algebrica

$$(17) \qquad (n^2 - \beta^2) c_1^2 - 2(n^2 - 1) v c_1 - c^2 (1 - n^2 \beta^2) = 0 \qquad v = \beta c.$$

Il discriminante di questa essendo $4 c^2 n^2 (1 - \beta^2)^2$, le radici sono

$$(18) \qquad c \frac{n\beta + 1}{\beta + n} \quad , \quad c \frac{n\beta - 1}{n - \beta}$$

e si ottengono anche applicando la regola di addizione relativistica alle coppie di velocità c/n , v ; $-c/n$, v.

Per fissare le idee, riteniamo la radice

$$(19) \qquad c_1 = c \frac{n\beta + 1}{\beta + n}$$

che corrisponde al caso della coincidenza delle direzioni positive del moto e di propagazione delle onde.

Ciò che importa osservare è che solo sulla base dell'equazione (IV) è lecito trasportare all'elettrodinamica dei corpi in moto quei concetti fisici relativi alla propagazione delle onde che, sulla base dell'equazione classica delle onde, si introducono nell'elettrodinamica dei corpi in quiete.

Per fissare meglio questo concetto, conviene portare l'attenzione sull'applicazione che von Laue ha fatta della regola di addizione relativistica delle velocità per spiegare il celebre effetto del cosiddetto trascinamento delle onde, previsto teoricamente da Fresnel (1818) e confermato sperimentalmente da Fizeau (1851).

L'applicazione della regola ricordata conduce, come già abbiamo rilevato, alle radici dell'equazione algebrica (17).

Ma senza l'analisi precedente non si ha il diritto di affermare che la velocità risultante è una velocità di fase.

Che significa velocità di fase rispetto al sistema di osservazione S se non è dimostrato che le equazioni di Minkowski ammettono soluzioni del tipo (15)?

Assumiamo dunque per $\mathfrak{E}_y$ una soluzione della (IV)

$$\mathfrak{E}_y = A\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{20}$$

e supponiamo che sia

$$\mathfrak{E}_z = 0. \tag{21}$$

Segue subito che è

$$\mathfrak{H}_y = 0 \tag{22}$$

mentre la $\mathfrak{H}_z$ si potrà dedurre dalla seconda equazione (I_3). Si ha

$$\dot{\mathfrak{E}}_y = -i\omega\,\mathfrak{E}_y \quad , \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = ik\,\mathfrak{E}_y; \tag{23}$$

dunque

$$\mu\,(1-\beta^2)\,\dot{\mathfrak{H}}_z = -i\,\{\omega\beta\,(n^2-1) + kc\,(1-n^2\beta^2)\}\,\mathfrak{E}_y \tag{24}$$

e quindi, integrando,

$$\mu\,(1-\beta^2)\,\mathfrak{H}_z = \left\{\beta\,(n^2-1) + \frac{k}{\omega}\,c\,(1-n^2\beta^2)\right\}\mathfrak{E}_y. \tag{25}$$

Se al posto di $\frac{k}{\omega}c$ si pone la sua espressione in funzione di β,

$$\frac{k}{\omega}\,c = \frac{\beta+n}{n\beta+1},$$

si trova

$$\mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}_y. \tag{26}$$

Sostituendo nell'espressione (14) di $\mathfrak{B}_z$ si trova

$$\mathfrak{B}_z = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{\beta+n}{n\beta+1}\,\mathfrak{H}_z. \tag{27}$$

Ora ricordiamo che

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{28}$$

è la velocità di fase nei corpi in quiete.

Si ha allora

$$(29) \qquad c_1 = c\frac{n\beta + 1}{\beta + n} \quad , \quad \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\beta + n}{n\beta + 1} = \frac{\mu}{c}c_0\frac{c}{c_1} = \frac{c_0}{c_1}\mu .$$

Dunque

$$(30) \qquad \mathfrak{B}_z = \frac{c_0}{c_1}\mu\mathfrak{H}_z .$$

È naturale allora porre

$$(31) \qquad \mu^* = \frac{c_0}{c_1}\mu$$

e chiamare μ^* la permeabilità magnetica di moto.

Il rapporto c_0/c_1 delle due velocità di fase nel corpo in quiete e nel corpo in moto è dato dalla seguente funzione di β e di n

$$(32) \qquad \frac{c_0}{c_1} = \frac{1}{n}\frac{\beta + n}{n\beta + 1}$$

che si riduce ovviamente ad 1 per $\beta = 0$.

Se si effettua il calcolo di $\mathfrak{D}_y$ si trova

$$(33) \qquad \mathfrak{D}_y = \frac{c_0}{c_1}\varepsilon\mathfrak{E}_y .$$

Si è così condotti a chiamare costante dielettrica di moto il numero

$$(34) \qquad \varepsilon^* = \frac{c_0}{c_1}\varepsilon ,$$

rilevandone il significato dalla relazione

$$(35) \qquad \mathfrak{D}_y = \varepsilon^*\mathfrak{E}_y .$$

La soluzione cercata è espressa dalle seguenti formule

$$(1) \qquad \mathfrak{E}_x = 0 \qquad \mathfrak{E}_y = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad \mathfrak{E}_z = 0$$

$$(2) \qquad \mathfrak{H}_x = 0 \qquad \mathfrak{H}_y = 0 \qquad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathfrak{E}_y$$

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_x = 0 \qquad \mathfrak{D}_y = \varepsilon^*\mathfrak{E}_y \qquad \mathfrak{D}_z = 0$$

$$(4) \qquad \mathfrak{B}_x = 0 \qquad \mathfrak{B}_y = 0 \qquad \mathfrak{B}_z = \mu^*\mathfrak{H}_z .$$

Sovrapponendo a quest'onda un'onda polarizzata tale che la direzione di $\mathfrak{E}$ sia quella dell'asse z e la direzione di $\mathfrak{H}$ sia quella dell'asse y, si trovano le formule

$$(36) \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon^*\mathfrak{E} \quad , \quad \mathfrak{B} = \mu^*\mathfrak{H} .$$

Ciò che ora importa osservare è che ε^* e μ^* differiscono da ε e μ per il coefficiente c_0/c_1 che è ben lungi dal poter essere considerato eguale ad 1, sia pure approssimativamente, come sembra supposto in recenti ricerche riguardanti fenomeni che nascono dall'accoppiamento del moto con azioni magnetiche.

Dalle espressioni di ε^* e μ^* si deduce che

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^* \mu^*}} \tag{37}$$

e quindi nasce l'opportunità di chiamare indice di rifrazione di moto il numero

$$n^* = \sqrt{\varepsilon^* \mu^*} \,. \tag{38}$$

La sua espressione in funzione di n e di β è la seguente

$$n^* = \frac{c_0}{c_1} n \tag{39}$$

e quindi

$$n^* = \frac{\beta + n}{n\beta + 1} \,. \tag{40}$$

Se si sviluppa in serie di potenze di β, si ha

$$n^* = n - n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\beta + \cdots \tag{41}$$

Viene così messo in evidenza l'effetto di 1° ordine riguardante l'indice di rifrazione.

Non insisto su codeste osservazioni concernenti l'indice di rifrazione, perché mi riservo di ritornare sull'argomento in occasione di una più approfondita indagine sui fenomeni di riflessione e rifrazione relativi a corpi in moto con la corrispondente estensione delle formule di Fresnel.

Piuttosto voglio qui portare l'attenzione sulle relazioni che intercedono fra le grandezze $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ e due altre grandezze che, nell'elettrodinamica dei corpi in moto, si considerano al posto di $\mathfrak{E}$ e di $\mathfrak{H}$.

Sono le grandezze che Pauli e Sommerfeld indicano con i simboli $\mathfrak{E}^*$ ed $\mathfrak{H}^*$ e sono definite dalle espressioni

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\, \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\, \boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{D} \,. \tag{42}$$

Queste grandezze rappresentano le forze misurate nel sistema S di osservazione che si esercitano rispettivamente su di una carica elettrica unitaria e su di un polo magnetico unitario trascinati dal corpo in moto.

Se si cercano le relazioni che intercedono fra le grandezze $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{B}$ ed $\mathfrak{H}^*$ nel caso della nostra onda piana si trovano le seguenti formule

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{1 - \beta^2}\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\mathfrak{E}^* \tag{43}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu}{1 - \beta^2}\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\mathfrak{H}^* \,. \tag{44}$$

Chimica fisica. — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi con un componente a struttura ramificata* (*). Nota (**) di FERDINANDO DANUSSO, presentata dal Corrisp. G. NATTA.

In un precedente lavoro (1) si erano effettuate misure di densità e di velocità ultrasonora su tutti i sistemi binari possibili dei seguenti idrocarburi:

n–eptano	cetano
cicloesano	decalina
benzolo	

Oltre ai dati sperimentali diretti di densità ρ e di velocità ultrasonora u, si erano anche determinati i valori del volume molecolare V e della compressibilità adiabatica molecolare B, mediante la seguente relazione:

$$B = \frac{M}{\rho^2 u^2}$$

in cui M è la massa molecolare.

Tutti i dati direttamente o indirettamente ottenuti dall'esperienza sono stati confrontati, per ogni miscela esaminata, con corrispondenti dati calcolati considerando la stessa miscela come ideale ed utilizzando le leggi per miscele liquide atermiche o ideali già discusse in un primo lavoro sull'argomento (2). Ottenute in tal modo le deviazioni percentuali dei valori delle suddette grandezze dai corrispondenti valori ideali, sono state messe in evidenza alcune regolarità che sono apparse fondamentali.

In questa breve Nota viene completato il citato lavoro sugli idrocarburi, estendendo l'esame a miscele di ognuno dei cinque idrocarburi sopra ricordati con isottano, onde poter trarre qualche prima conclusione sull'influenza di un componente a struttura notevolmente ramificata.

Nella Tabella I sono riportati tutti i dati ottenuti dall'esperienza nello stesso modo e con le stesse tecniche sperimentali descritte nel precedente lavoro.

Calcolando le deviazioni dall'idealità, si osserva che il sistema isottano–*n*–eptano ha deviazioni comprese negli errori sperimentali, per cui è da ritenersi, rispetto alla sensibilità dei metodi utilizzati, un sistema praticamente atermico.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.
(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1954.
(1) F. DANUSSO « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *13*, 131 (1952).
(2) F. DANUSSO « Rend. Accad. Naz. Lincei », *10*, 235 (1951).

Tabella I.

Densità ρ, *volume molecolare* V, *velocità ultrasonora u e compressibilità adiabatica molecolare* B *di miscele binarie di isottano con vari idrocarburi a* 30°C.

N.	Componenti	x moli °/o	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
1	Isottano	0,00	0,6833	167,16	1063	21,2
		18,26	0,6819	163,75	1073	20,4
		30,38	0,6810	161,47	1077	20,0
		41,14	0,6802	159,44	1085	19,5
		62,40	0,6781	155,47	1095	18,6
		77,65	0,6771	152,62	1100	18,2
		89,74	0,6759	150,38	1108	17,7
	n–Eptano. . . .	100,00	0,6748	148,49	1113	17,4
2	Isottano	0,00	0,6833	167,16	1063	21.2
		21,08	0,7119	193,66	1148	20,2
		29,61	0,7211	204,46	1178	20,0
		47,45	0,7367	227,31	1231	20,0
		61.23	0,7466	245,02	1261	20,2
		78,10	0,7566	266,86	1297	20,6
		87,43	0,7614	278,85	1310	20,9
	Cetano	100,00	0,7672	295,14	1323	21,6
3	Isottano	0,00	0,6833	167,16	1063	21,2
		20,64	0,6954	155,32	1087	18,5
		34,19	0,7048	147,47	1110	16,7
		50,60	0,7175	137,99	1132	14,7
		61,62	0,7269	131,65	1149	13,5
		76,81	0,7416	122,88	1185	11.6
		91,36	0,7578	114,49	1207	10,2
	Cicloesano . . .	100,00	0,7685	109,51	1224	9,33

Segue: TABELLA I.

N.	Componenti	x moli %	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
4	Isottano	0,00	0,6833	167,16	1063	21,2
		20,42	0,7234	164,67	1131	17,5
		34,86	0,7516	163,10	1170	15,5
		49,41	0,7798	161,69	1210	13,9
		64,15	0,8085	160,33	1257	12,3
		77,40	0,8338	159,28	1297	11,1
		90,16	0,8580	158,37	1339	10,1
	Decalina (*a*) . .	100,00	0,8768	157,66	1363	9,49
5	Isottano	0,00	0,6833	167,16	1063	21,2
		16,27	0,6995	154,88	1080	18,6
		34,09	0,7207	141,40	1103	15,8
		52,75	0,7488	127,10	1133	13,0
		63,26	0,7681	118,97	1153	11,4
		78,77	0,8027	106,86	1192	9,19
		91,87	0,8391	96,59	1237	7,40
	Benzolo	100,00	0,8669	90,10	1277	6,25

(*a*) Miscela di isomeri cis e trans.

Per i rimanenti quattro sistemi si possono invece osservare in fig. 1 le deviazioni percentuali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare dai corrispondenti valori calcolati per una miscelazione ideale. Nella stessa figura e sugli stessi assi sono riportate le deviazioni delle stesse grandezze per quattro sistemi già studiati in cui, fermo restando il secondo componente, in luogo dell'isottano si era usato il *n*–eptano.

Dall'esame dei diagrammi è possibile osservare che, sostituendo nelle varie miscele l'isottano al *n*–eptano, le deviazioni percentuali dall'idealità subiscono variazioni sempre nello stesso senso. Precisamente, assumendo come unitari i valori ideali, il componente a struttura ramificata porta sempre ad una contrazione di volume, ad un aumento di velocità ultrasonora e quindi ad una sistematica diminuzione della compressibilità molecolare

rispetto alle analoghe miscele ottenute col componente simile a struttura lineare.

È interessante notare che, per quanto riguarda la velocità ultrasonora, tale constatazione ricorda quella in certo qual modo inversa che può essere fatta sui liquidi puri: per questi, passando da un liquido a struttura lineare ad uno simile a struttura ramificata, in un confronto a temperature in generale diverse, ma ad uguale densità, si osserva una diminuzione della velo-

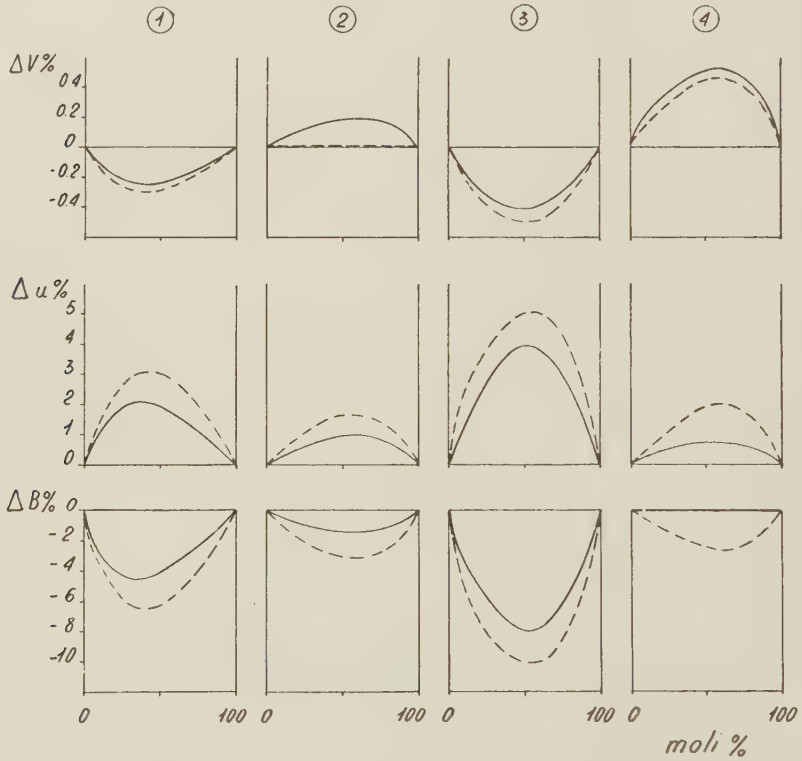


Fig. 1. — Deviazioni percentuali del volume molecolare V, della velocità ultrasonora u e della compressibilità adiabatica molecolare B dai corrispondenti valori ideali, in funzione della frazione molare del secondo componente, nei seguenti sistemi di idrocarburi:

(1) —— *n*-eptano-cetano
– – – isottano-cetano

(2) —— *n*-eptano-cicloesano
– – – isottano-cicloesano

(3) —— *n*-eptano-decalina
– – – isottano-decalina

(4) —— *n*-eptano-benzolo
– – – isottano-benzolo

cità ultrasonora [3]. Ciò vale anche per due miscele di una data concentrazione molecolare, aventi il primo componente comune e come secondo componente rispettivamente un composto a struttura lineare ed uno simile a struttura ramificata. In un confronto, invece, delle due stesse miscele ad egual temperatura, passando da quella a componente lineare a quella a componente ramificato, si ha un aumento del valore sperimentale della velocità commisurato al corrispondente valore ideale.

(3) F. Danusso « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, 9, 351 (1950).

Quanto sopra si può anche esprimere dicendo che, se A e B sono due liquidi di composizione simile, ma A è lineare e B ramificato, nei diagrammi delle deviazioni percentuali dall'idealità, del tipo di quelli della fig. 1, le curve di una miscela di B con un terzo componente C giacciono per i volumi e per le compressibilità al disotto e per le velocità al disopra delle curve relative ad una miscela di A con C.

Nella fig. 1 si può infine osservare che tutto ciò si verifica sia in sistemi a contrazione di volume che in sistemi ad aumento di volume nella miscelazione, anche quando questi ultimi manifestano contemporaneamente aumento di velocità ultrasonora, anziché diminuzione, e sono quindi da riguardarsi come particolari [4].

Nel corso di lavori di prossima pubblicazione su miscele alcoliche avremo occasione di ritornare su questa regolarità, che risulta sistematicamente verificata anche in miscele più complesse di quelle fin qui considerate.

CONCLUSIONI. – Determinazioni di volume molecolare, velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica molecolare sono state effettuate su miscele binarie di isottano con *n*-eptano, cetano, cicloesano, decalina e benzolo (Tabella I), a completamento di un recente lavoro su miscele di idrocarburi.

Per ogni sistema sono state determinate, alle varie concentrazioni, le deviazioni percentuali dei valori sperimentali delle suddette grandezze dai corrispondenti valori calcolati nell'ipotesi che il sistema stesso fosse ideale.

Dai diagrammi delle deviazioni (fig. 1), opportunamente confrontati con quelli di sistemi studiati in precedenza, si può osservare che, assumendo i valori ideali delle tre grandezze esaminate come unitari, il componente a struttura ramificata (isottano) porta, nelle miscele studiate, ad una contrazione di volume, ad un aumento di velocità ultrasonora e, quindi, ad una diminuzione di compressibilità adiabatica molecolare rispetto a corrispondenti analoghe miscele in cui, fermi restando gli altri componenti, si sia posto in luogo del componente a struttura ramificata un componente simile a struttura lineare (*n*-eptano).

Questa regolarità, che si manifesta sia in sistemi a contrazione di volume che in sistemi ad aumento di volume nella miscelazione, risulta sistematicamente verificata anche in miscele più complesse, che saranno trattate nel corso di lavori di prossima pubblicazione.

(4) F. DANUSSO, loc. cit. ([1]), p. 133, capov. *b*).

Chimica fisica. — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli* (*). Nota (**) di FERDINANDO DANUSSO, presentata dal Corrisp. G. NATTA.

In alcuni precedenti lavori [1-3] è stato proposto ed applicato, per lo studio di miscele di idrocarburi, un metodo di trattazione quantitativa dei risultati di misure dirette di densità e di velocità di propagazione degli ultrasuoni a varie composizioni.

In questa Nota tale studio viene proseguito prendendo in considerazione miscele binarie contenenti esclusivamente alcoli, allo scopo di accertare se le stesse regolarità osservate per miscele di idrocarburi appaiono in miscele di alcoli e se altre regolarità si possono rilevare come caratteristiche delle miscele alcoliche in connessione con la natura più complessa delle interazioni che esistono tra le molecole componenti e che sono sicuramente rilevabili anche con altri metodi di indagine.

Analogamente a quanto è stato fatto nei precedenti lavori e con le medesime tecniche sperimentali, già descritte, oltre ai dati diretti di densità ρ e di velocità ultrasonora u, riporteremo spesso anche i valori del volume molecolare V e della compressibilità adiabatica molecolare B, calcolabile mediante la relazione:

$$B = \frac{M}{\rho^2 u^2}$$

in cui M è la massa molecolare.

Nella Tabella I sono raccolti i dati relativi a miscele di alcuni alcoli alifatici tra loro e precisamente a miscele binarie di alcol metilico con alcol n–butilico, isoamilico, ottilico e n–dodecilico, e ad una miscela di alcol isopropilico con alcol n–butilico.

Nella Tabella II, invece, figurano i dati ottenuti da miscele di vari alcoli e polialcoli con uno stesso alcol aliciclico, e precisamente di alcol metilico, propilico, isopropilico, butilico, isobutilico, ottilico, di glicol etilenico e di glicerina con cicloesanolo.

Per la preparazione delle miscele si sono usati alcoli ottenuti come frazioni centrali di rettifica dei prodotti più puri trovati in commercio. La purezza è stata verificata, oltreché attraverso le nostre misure, anche mediante indice di rifrazione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1954.

(1) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *10*, 235 (1951).

(2) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *13*, 131 (1952).

(3) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », questo fascicolo, pp. 109-113 (1954).

TABELLA I.

Densità ρ, *volume molecolare* V *e velocità ultrasonora u di alcune miscele di alcoli alifatici, in funzione della frazione molare x del secondo componente*, a 30 °C.

N.	Componenti	*x* moli °/o	ρ g/cm³	V cm³/mole	*u* m/s
1	Metilico	0,00	0,7832	40,91	1092
		23,03	0,7897	52,84	1135
		41,00	0,7944	62,05	1167
		77,96	0,8000	81,06	1210
	n–Butilico	100,00	0,8026	92,35	1228
2	Metilico	0,00	0,7832	40,91	1092
		23,28	0,7932	56,86	1143
		36,45	0,7966	65,89	1164
		58,26	0,8012	80,79	1192
		78,65	0,8044	94,69	1211
	iso–Amilico . . .	100,00	0,8066	109,29	1228
3	Metilico	0,00	0,7829	40,92	1091
		6,18	0,7865	48,45	1126
		14,50	0,7911	58,50	1165
		24,11	0,7956	70,02	1201
		36,96	0,8001	85,40	1242
		68,25	0,8066	122,80	1294
	Ottilico (*a*). . . .	100,00	0,8106	160,65	1325
4	Metilico	0,00	0,7828	40,93	1090
		5,06	0,7909	50,38	1139
		14,30	0,8014	67,51	1205
		16,81	0,8037	72,14	1217
		25,41	0,8092	88,04	1265
		38,82	0,8159	112,68	1313
		66,75	0,8220	164,27	1362
		84,75	0,8246	197,42	1380
	n–Dodecilico . . .	100,00	0,8268	225,36	1391
5	Isopropilico . . .	0,00	0,7770	77,34	1125
		41,56	0,7893	83,52	1170
		59,37	0,7940	86,17	1187
	n–Butilico	100,00	0,8026	92,35	1228

(*a*) Alcol n–ottilico impuro per isomeri.

Tabella II.

Densità ρ, *volume molecolare* V, *velocità ultrasonora u e compressibilità adiabatica molecolare* B *di miscele binarie di alcuni alcoli alifatici e polialcoli con cicloesanolo a* 30° C.

N.	Componenti	*x* moli %	ρ g/cm³	V cm³/mole	*u* m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
6	Metilico	0,00	0,7829	40,92	1091	4,31
		9,44	0,8164	47,12	1154	4,25
		25,42	0,8566	57,62	1239	4,29
		44,17	0,8886	69,91	1316	4,45
		49,33	0,8957	73,28	1335	4,50
		65,43	0,9136	83,85	1378	4,74
	Cicloesanolo . . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
7	n–Propilico . .	0,00	0,7966	75,43	1193	6,53
		17,20	0,8301	80,69	1251	6,09
		38,52	0,8650	87,31	1311	5,76
		66,30	0,9030	95,97	1379	5,48
		85,29	0,9252	101,89	1418	5,37
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
8	iso–Propilico	0,00	0,7772	77,32	1125	7,71
		15,41	0,8119	81,61	1197	6,88
		16,63	0,8140	82,00	1198	6,90
		37,00	0,8527	87,93	1273	6,24
		65,82	0,8980	96,28	1360	5,69
		85,26	0,9234	102,07	1411	5,45
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
9	n–Butilico	0,00	0,8026	92,35	1228	7,48
		19,61	0,8332	95,09	1271	6,93
		43,14	0,8673	98,41	1326	6,33
		69,94	0,9031	102,24	1384	5,80
		85,94	0,9239	104,45	1421	5,49
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29

Segue: TABELLA II.

N.	Componenti	x moli °/₀	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3\ 10^{-3}}{mole\ at}$
10	iso-Butilico . .	0,00	0,7949	93,24	1178	8,29
		20,75	0,8296	95,85	1239	7,38
		40,74	0,8606	98,45	1297	6,67
		68,91	0,9007	102,21	1372	5,91
		87,45	0,9250	104,75	1412	5,57
	Cicloèsanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
11	Ottilico (*a*) . . .	0,00	0,8106	160,65	1325	11,07
		34,68	0,8432	142,06	1347	9,11
		54,19	0,8663	131,51	1369	7,95
		73,81	0,8935	120,91	1395	6,82
		92,05	0,9253	110,83	1422	5,81
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
12	Glicol	0,00	1,1047	56,19	1643	1,85
		14,37	1,0626	63,56	1563	2,40
		28,75	1,0306	70,85	1523	2,91
		47,80	0,9961	80,59	1481	3,62
		73,26	0,9632	93,41	1457	4,48
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29
13	Glicerina	0,00	1,2544	73,41	1911	1,57
		13,24	1,2004	77,61	1769	2,03
		26,56	1,1491	82,00	1613	2,69
		47,18	1,0763	89,10	1529	3,47
		73,25	1,0016	97,84	1478	4,39
	Cicloesanolo . .	100,00	0,9409	106,45	1448	5,29

(*a*) alcool n-ottilico impuro per isomeri.

Per i sistemi compresi nella Tabella I, calcolando i valori ideali del volume molecolare e della velocità ultrasonora, si rilevano deviazioni dei valori sperimentali in genere di piccola entità, che, sopratutto nel caso della velocità ultrasonora, spesso si avvicinano agli errori di misura.

Le miscele di alcol metilico con alcoli alifatici lineari sono comunque caratterizzate da aumento di volume nella miscelazione. A questo aumento non sempre corrisponde diminuzione di velocità ultrasonora rispetto al corrispondente valore ideale. Gli andamenti approssimativi delle deviazioni percentuali dall'idealità del volume molecolare e della velocità ultrasonora sono, per queste miscele, indicati nei diagrammi della fig. 1: si vede da questi che le curve delle deviazioni di velocità tendono a formare un flesso per lo zero delle ordinate, a composizioni variabili col peso molecolare del secondo componente. Le deviazioni di velocità nel senso della diminuzione si verificano però sempre nel campo delle alte concentrazioni di alcol metilico ed è pure in questo campo che tendono a manifestarsi le più forti deviazioni positive di volume.

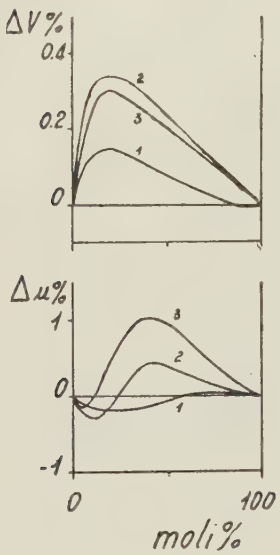


Fig. 1. – Deviazioni percentuali del volume molecolare e della velocità ultrasonora da corrispondenti valori ideali, in funzione della frazione molare del secondo componente, nelle miscele di alcoli: 1) metilico–n–butilico; 2) metilico–n–ottilico; 3) metilico–n–dodecilico.

Tali miscele sembrano quindi avere andamento regolare solo per alte concentrazioni di alcol metilico, mentre per le basse concentrazioni dimostrano un andamento particolare, per simultaneo aumento di volume e di velocità, già messo in evidenza nel primo lavoro su miscele di idrocarburi [4].

Per le miscele di alcoli metilico–isoamilico il confronto con valori ideali rivela un lievissimo aumento di volume e per le miscele di alcoli isopropilico–n–butilico una lieve contrazione; le velocità corrispondenti hanno andamento regolare, con lieve diminuzione rispetto all'idealità nel primo caso e lieve aumento nel secondo.

In fig. 2 sono invece riportate le deviazioni percentuali dai valori ideali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare dei sistemi contemplati nella Tabella II, a secondo componente comune. I diagrammi sono ordinati nella figura secondo tre colonne, che corrispondono rispettivamente ai sistemi a contrazione di volume, ad aumento di volume e ad andamento misto di contrazione ed aumento di volume, con flesso nella relativa curva.

Per le miscele a contrazione di volume (fig. 2, 1ª colonna) l'andamento è nettamente regolare: la contrazione di volume comporta notevoli aumenti di velocità ultrasonora e, conseguentemente, un'accentuata diminuzione di compressibilità molecolare. Inoltre, i sistemi contenenti alcoli secondari o ramificati (isopropilico ed isobutilico) manifestano contrazioni di volume più forti di quelli contenenti i rispettivi isomeri primari o lineari, con con-

(4) F. Danusso, loc. cit. (2), p. 133, capov. *b*).

seguente aumento delle deviazioni percentuali delle velocità dei primi rispetto a quelle dei secondi e relativa diminuzione delle compressibilità.

Tra le miscele ad aumento di volume (fig. 2, 2ª colonna) si osserva un andamento regolare volume–velocità–compressibilità per il sistema glicol–cicloesanolo, mentre per gli altri due sistemi (metanolo–cicloesanolo e alcol ottilico–cicloesanolo) l'andamento è particolare, per simultaneo aumento di volume e di velocità.

Infine il sistema glicerina–cicloesanolo (fig. 2, 3ª colonna) si comporta in modo diverso dai precedenti. Per esso le curve delle deviazioni di volume, velocità e compressibilità hanno tutte un flesso che interseca l'asse delle concentrazioni. A concentrazioni lontane da quella del flesso l'andamento volume–velocità–compressibilità si può considerare regolare, ma il sistema non è nel complesso regolare, poiché il flesso non si verifica, per le tre grandezze determinate, alla stessa composizione.

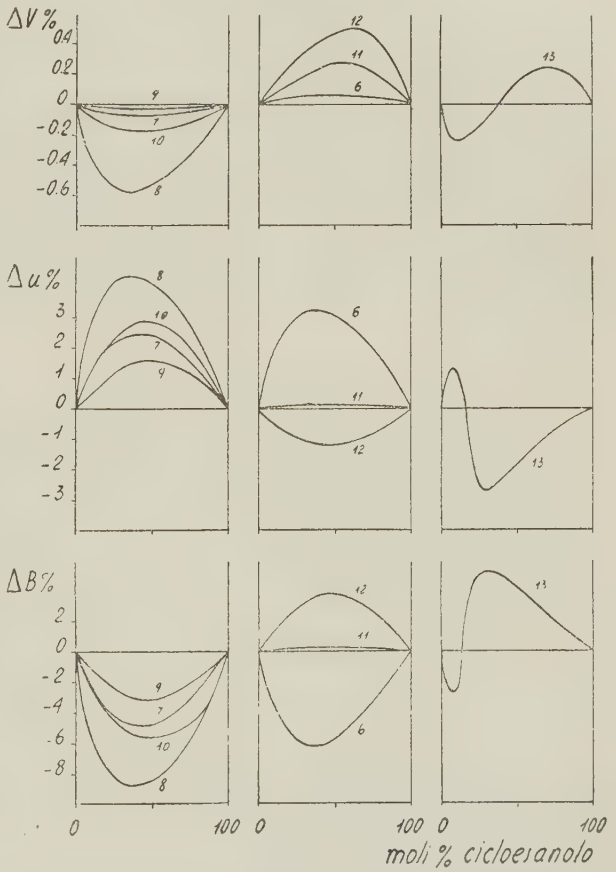


Fig. 2. – Deviazioni dall'idealità del volume molecolare V, della velocità ultrasonora u e della compressibilità adiabaticamolecolare B in miscele di vari alcoli con cicloesanolo (inumeri che contrassegnano le curve corrispondono alnumero d'ordine delle miscele nella Tabella II).

Escludendo quest'ultimo sistema, che verrà meglio inquadrato in una Nota successiva su miscele di alcoli e polialcoli, si può in definitiva concludere che, per le miscele alcoliche studiate, gli andamenti relativi volume–velocità–compressibilità non sono essenzialmente diversi da quelli già riscontrati in miscele di idrocarburi e che quindi anche per tali miscele valgono, in prima approssimazione, le regolarità messe in evidenza nei precedenti lavori sugli idrocarburi [2,3].

CONCLUSIONI. – Lo studio di miscele liquide mediante determinazioni di volume molecolare, di velocità ultrasonora e di compressibilità adiabatica molecolare, iniziato in precedenti lavori su miscele di idrocarburi, è

stato proseguito su due serie di miscele binarie contenenti esclusivamente alcoli.

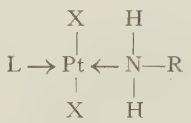
Per la trattazione dei risultati sperimentali (Tabelle I e II) si è seguìto un metodo già applicato in precedenza, che consiste nel confrontare i dati sperimentali con corrispondenti dati calcolati nell'ipotesi che le miscele esaminate fossero tutte ideali. Le deviazioni percentuali dei valori sperimentali da quelli ideali sono rappresentate nelle figg. 1 e 2 per la quasi totalità delle miscele esaminate.

Prescindendo dal sistema glicerina–cicloesanolo, il cui comportamento particolare sarà trattato successivamente, per gli altri dodici sistemi studiati si è potuto concludere che gli andamenti relativi delle deviazioni del volume, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica sono dello stesso tipo di quelli riscontrati su miscele di idrocarburi, per cui possono essere ritenute ancora valide le regolarità messe in evidenza nei precedenti lavori.

Chimica. — *Associazione tramite legami idrogeno nei complessi amminici del platino bivalente* (*). Nota (**) di Joseph Chatt, Andrew Duncanson e Luigi Venanzi, presentata dal Corrisp. V. Caglioti.

L'esame degli spettri d'assorbimento nell'infra–rosso di alcuni complessi del tipo:

(I)



(L = legante neutro, X = alogeno ed R = gruppo alchilico o arilico), ha mostrato che detti composti, sia in soluzione che allo stato solido, sono associati tramite legami idrogeno.

Per tale studio ci siamo serviti di uno spettrofotometro Grubb–Parsons mod. S3A, dotato di prisma a fluoruro di litio, usando celle di quarzo di 1 cm. di spessore e mantenendo costante la larghezza della fenditura (0.2 mm).

Lo spettro di *trans*–[(n–C_3H_7)$_3$P , p–toluidina , $PtCl_2$], (II), in soluzioni circa 0.01 molari di tetracloruro di carbonio, mostra quattro bande d'assorbimento ben distinte nella regione tra 3000 e 3500 cm^{-1} che sono state attribuite alle vibrazioni simmetriche ed antisimmetriche del gruppo $=NH_2$. Due, di aspetto aguzzo, sono nella regione 3200–3500 cm^{-1} e sono state assegnate alle frequenze $=NH_2$ « libere », ossia appartenenti a gruppi che non hanno preso parte alla formazione di legami idrogeno. Le altre due sono

(*) Lavoro eseguito nel Butterwick Research Laboratories, della Imperial Chemical Industries Limited, The Frythe, Welwyn, Herts.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1954.

più arrotondate ed ognuna a frequenze circa 140 cm^{-1} più basse, rispetto alla ν « libera » corrispondente. Esse sono state assegnate alle frequenze $=NH_2$ « associate », ossia appartenenti a gruppi amminici che hanno preso parte alla formazione di legami idrogeno.

Gli spettri del composto (II) mostrano che la diluizione della soluzione in tetracloruro di carbonio provoca una diminuzione graduale dell'intensità delle bande « associate » ed allo stesso tempo un aumento graduale dell'intensità delle bande « libere ».

Queste osservazioni portano alla conclusione che i gruppi $=NH_2$ nei complessi di cui sopra, prendono parte alla formazione di legami idrogeno e che questa associazione è inter-molecolare. Conferma di ciò è il fatto che nello spettro di (II) in soluzione di tetracloruro di carbonio-diossano (5 : 1), le due bande aguzze nella regione 3200-3500 cm^{-1} sono scomparse, mentre quelle a frequenza più bassa sono aumentate d'intensità.

TABELLA I.

Bande d'assorbimento del gruppo N—H *nel complesso* (II).

Vibrazione	Soluzione di CCl_4		Soluzione di CCl_4 + diossano; bande « associate » cm^{-1}
	Bande « libere » cm^{-1}	Bande « associate » cm^{-1}	
ν_A	3348	3218	3232
ν_S	3277	3131	3138

Le bande d'assorbimento del gruppo N—H osservate nello spettro di una soluzione 0.01 molare di (II) sono elencate nella tabella I.

L'atomo donatore più probabile in (II) è quello di cloro. Le forti proprietà donatrici dell'atomo di cloro quando questo è coordinato al platino sono ben note (vedi la notevole tendenza a formare complessi bi- o polinucleari con ponti di cloro, ad alta stabilità). Gli spettri del bromo- e dello iodiocomplesso analogo a (II) confermano l'idea che l'alogeno costituisce l'atomo donatore nella formazione di legami idrogeno. Il bromocomplesso analogo a (II) mostra proprietà associative meno marcate del clorocomplesso (II), mentre l'iodiocomplesso in tetracloruro di carbonio, sino a concentrazioni 0.006 molari non mostra alcuna evidenza d'associazione (tabella II). Ciò nonostante, tutti questi complessi, in soluzione in tetracloruro di carbonio-diossano, mostrano associazione completa. La diminuzione del grado d'associazione lungo la serie clorocomplesso > bromocomplesso > > iodiocomplesso, segue l'ordine previsto dalla teoria nel caso che l'alogeno funzioni da atomo donatore nella formazione di legami idrogeno.

Fino a concentrazioni < 0.07 molari l'associazione sembra essere bimolecolare, ma il *trans*–[$(n$–$C_4H_9)_3P$, p–toluidina , $PtCl_2$], del quale si poterono ottenere soluzioni in tetracloruro di carbonio più concentrate, forma senza dubbio dei polimeri, a concentrazioni più alte.

TABELLA II.

Costanti d'equilibrio per la dimerizzazione dei complessi p–toluidinici del platino bivalente in soluzione di tetracloruro di carbonio a $25 \pm 1°$ C.

COMPLESSO	k (± 10 %) moli^{-1} litro
trans [C_2H_4 , p–toluidina , $PtCl_2$]	115
trans–[$(n$–$C_3H_7)_2S$, p–toluidina , $PtCl_2$]	40
trans–[$(n$–$C_3H_7)_3As$, p–toluidina , $PtCl_2$] . . .	24
trans–[$(n$–$C_3H_7)_3P$, p–toluidina , $PtCl_2$]	17
trans–[$(n$–$C_3H_7)_3P$, p–toluidina , $PtBr_2$]	7.5
trans–[$(n$–$C_3H_7)_3P$, p–toluidina , PtI_2]	—

Impiegando soluzioni diluite ed assumendo che in queste l'associazione è solamente bimolecolare, la frazione di monomero presente in soluzione può venir calcolata dalla deviazione della legge di Beer. Da questa si possono ottenere delle costanti d'equilibrio, k, usando la formula:

$$k = (1 - \alpha)/2\,\alpha^2 c,$$

dove α è la frazione della concentrazione totale, c, che è presente in forma monomerica (tabella II).

È interessante notare che mantenendo costante la p–toluidina, la sostituzione degli altri leganti coordinati al platino altera considerevolmente la costante d'equilibrio, k. Il cambiamento di k causato dalla sostituzione degli atomi d'alogeno è dovuto, con tutta probabilità, all'indebolimento delle proprietà donatrici causato da una diminuzione della elettronegatività dell'alogeno stesso; per quanto non sia da escludersi che effetti sterici dovuti all'aumento di volume dell'alogeno possano contribuire all'indebolimento del grado di associazione. L'effetto della sostituzione del legante elettricamente neutro, L (fig. 1), sul valore di k può anche essere dovuta a ragioni steriche. Ciò nonostante è poco probabile che il notevole cambiamento osservato nelle costanti d'equilibrio, k, sia dovuto esclusivamente a questo fattore. Vi sono forti ragioni per credere che questo cambiamento rifletta il cambiamento d'acidità dell'idrogeno amminico, e quindi la sua capacità d'accet-

tore. Questo cambiamento d'acidità sembra essere dovuto ad effetti sia elettrostatici che mesomerici prodotti dal legante neutro, L, e trasmessi attraverso l'atomo di platino. La prova del cambiamento d'acidità dell'idrogeno amminico è fornita dal fatto che anche le vibrazioni « libere » del gruppo $=NH_2$ dipendono dalla natura dei leganti coordinati al platino, ma non dalla introduzione di sostituenti vari nell'anello benzenico (tabella III). Ciò porta alla conclusione che gli effetti trasmessi attraverso l'atomo di platino sono maggiori di quelli trasmessi attraverso l'anello benzenico.

TABELLA III.

*Comportamento delle vibrazioni di valenza dell'*N—H *col variare di* L *ed* R (*fig. 1*).

COMPLESSO	Bande in soluzione di CCl_4				Bande « associate » in CCl_4 + diossano (5 : 1) cm^{-1}	
	« libere » cm^{-1}		« associate » cm^{-1}			
	ν_A	ν_S	ν_A	ν_S	ν_A	ν_S
trans-[C_2H_4 , p-toluidina , $PtCl_2$]	3304	3240	3173	3094	3199	3091
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_2S$, p-toluidina , $PtCl_2$]	3329	3262	3196	3106	3225	3124
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_3As$, p-toluidina , $PtCl_2$] . . .	3342	3271	3207	3123	3229	3134
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, p-toluidina , $PtCl_2$]	3348	3277	3218	313.	3232	3138
trans [$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, p-cloroanilina , $PtCl_2$] . . .	3346	3274	3215	3129	3231	3134
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, p-nitroanilina, $PtCl_2$] . . .	3347	3275	3208	3125	3229	3128
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, metilammina , $PtCl_2$] (*) .	3347	3284	3241	3122	3254	3156
trans-[$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, benzilammina , $PtCl_2$] (*) . .	3332	3268	3218	3120	3234	3139

(*) Gli spettri di questi due complessi mostrano un'altra banda d'assorbimento in soluzione di tetracloruro di carbonio a circa 3330 cm^{-1}. Questa banda aumenta d'intensità ed è spostata a circa 3220 cm^{-1} in presenza di diossano. L'aspetto ed il comportamento di questa banda è tale da far ritenere che essa sia una banda « associata ».

Tutti i complessi di tipo (I) con ammine primarie che abbiamo studiato (elencati nella tabella III), mostrano gradi d'associazione simili a quelli dei complessi con ammine aromatiche primarie.

I complessi di tipo (I) con ammine secondarie mostrano scarsissima tendenza alla formazione di legami idrogeno. Lo spettro di *trans*-[$(n\text{-}C_3H_7)_3P$, piperidina , $PtCl_2$], (III), in soluzione di tetracloruro di carbonio mostra una sola banda d'assorbimento nella regione 3000–3500 cm^{-1} che può essere attribuita alle vibrazioni N—H. Questa ha un aspetto aguzzo, non viene arrotondata o spostata dalla presenza di diossano ed è stata attribuita alla

vibrazione N—H « libera ». Gli spettri d'assorbimento del *trans*–[C_2H_4 , piperidina , $PtCl_2$] mostrano piccole deviazioni dalla legge di Beer indicando una leggera associazione. Lo spettro di *trans*–[$(n$–$C_3H_7)_3P$, dietilammina , $PtCl]_2$ nella regione delle vibrazioni N—H è identico a quello di (III). In soluzione di tetracloruro di carbonio anche lo spettro di *trans*–[$(n$–$C_3H_7)_3P$, N–metilanilina , $PtCl_2$] presenta una sola banda N—H a 3261 cm^{-1}, ma l'apparizione di una seconda banda a 3229 cm^{-1} in presenza di diossano è prova di una certa quale associazione del gruppo ≡N—H con l'ossigeno del diossano.

I risultati indicano che per l'interpretazione delle vibrazioni N—H in termini di struttura molecolare nei composti di coordinazione del tipo di quelli da noi esaminati è necessario fare le misure su soluzioni diluite.

Ulteriori studi sono in corso al fine di determinare l'effetto di altri leganti sulle vibrazioni N—H, nonché per ottenere prove degli effetti elettrostatici e mesomerici esercitati dai vari gruppi coordinati all'atomo di platino.

Biologia. — *Osservazioni preliminari sul comportamento del nucleolo e delle ribonucleoproteine negli ovociti e nelle cellule nutrici di « Simocephalus vetulus »* (« *Cladocera, Daphnidae* ») (*). Nota (**) di Maria Paola Reggiani, presentata dal Corrisp. U. D'Ancona.

L'ovogenesi dei Cladoceri è stata oggetto di numerose ricerche, fino da quando Weismann (1874–1880) e Weismann e Ischikawa (1887, 1891) analizzarono su questi animali il ciclo delle attività riproduttive. Come è ben noto, queste si possono svolgere per partenogenesi, con formazione di « uova subitanee », oppure per anfigonia, con formazione di « uova durature ». Limitandomi qui a considerare soltanto il primo caso, che è il più frequente, ricorderò la dettagliata descrizione dello sviluppo delle uova subitanee fatta da Kühn (1908) su *Daphnia pulex* e *Polyphemus pediculus*, e quelle successive di Schrader (1925), Mortimer (1936), Lumer (1937) su varie specie di *Daphnia*, di Allen e Banta (1929) su *Moina macrocopa* e di von Dehn (1948) su *Moina rectirostris* (1).

(*) Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena, diretto dal prof. Enrico Vannini. Lavoro eseguito con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1954.

(1) A. Kühn, *Die Entwicklung der Keimzellen in den parthenogenetischen Generationen der Cladoceren Daphnia pulex De Geer und Polyphemus pediculus De Geer.* « Arch. Zellforsch. », Bd. I, p. 538 (1908); F. Schrader, *The cytology of the pseudo-sexual eggs in a species of Daphnia.* « Z. indukt. Abst. Vererb. », Bd. XL, p. 1 (1925); C. H. Mortimer, *Experimentelle und cytologische Untersuchungen über den Generationswechsel der Cladoceren.* « Zool. Jahrb., Physiol. », Bd. LVI, p. 323 (1936); H. Lumer, *Growth and maturation in the parthenogenetic eggs of Daphnia magna Straus.* « Cytologia », vol. VIII, p. 1 (1937); E. Allen a. A. M. Banta, *Growth and maturation in the parthenogenetic and sexual eggs of Moina macrocopa.* « Journ. Morphol. », vol. XLVIII, p. 123 (1929); M. von Dehn, *Experimentelle Untersuchungen über den Generationswechsel der Cladoceren. II. Cytologische Untersuchungen bei Moina rectirostris.* « Chromosoma », Bd. III, p. 167 (1948).

Buona parte delle suddette ricerche è stata dedicata all'esame del comportamento del corredo cromosomico e, pertanto a problemi che, per il momento, non verranno da me considerati. Anche altri aspetti del processo ovogenetico tuttavia hanno mostrato particolarità di notevole rilievo. Come è stato ben riassunto da Wagler (1927) [2], gli ovociti di I ordine in profase, poco dopo avere iniziato il periodo di « grande accrescimento », si dispongono nell'ovaio in gruppi di quattro cellule fra loro identiche e assai ravvicinate. In ognuno di questi gruppi, soltanto uno dei quattro ovociti (il terzo o più raramente il secondo a partire dal « territorio germinale », che è la zona più immatura dell'ovaio) è destinato ad accumulare tuorlo ed altre sostanze di riserva, trasformandosi così in un uovo maturo che, attraversato l'ovidotto e completata la divisione maturativa, verrà deposto nella « camera incubatrice » per cominciare a segmentarsi dando origine ad un embrione. I tre ovociti rimanenti si comportano, invece, come « cellule nutrici », che si consumano a vantaggio dell'elemento destinato a maturare.

Fin dalle indagini citologiche più antiche fu rilevata l'importanza del nucleolo nei processi ovogenetici descritti. Tale nucleolo assume infatti eccezionali dimensioni sia negli elementi destinati a trasformarsi in uova mature, che nelle cellule nutrici. Già il Kühn ammise, pertanto, che il nucleolo svolga funzioni importanti durante l'accrescimento ovocitario e prospettò l'esistenza di rapporti da un lato fra cromatina e sostanza nucleolare, e dall'altro fra nucleolo e citoplasma.

Nei tempi più recenti, Fautrez e Fautrez–Firlefyn (1951) [3] hanno ripreso lo studio degli ovociti dei Cladoceri con metodi citochimici moderni, atti a mettere in particolare rilievo il comportamento delle nucleoproteine. Le loro osservazioni sono state effettuate su femmine partenogenetiche di *Daphnia pulex*, con la reazione di Feulgen per la ricerca degli acidi desossiribonucleici e con la colorazione con verde di metile e pironina per la ricerca degli acidi ribonucleici.

Secondo questi autori, nei giovani ovociti che hanno appena superato gli stadi sinaptici della profase meiotica la cromatina dei cromosoni si frammenta in piccoli blocchi Feulgen–positivi, che si dispongono alla periferia del nucleo sotto la membrana nucleare; quando compare o comincia ad accrescersi il nucleolo, un blocchetto cromatinico Feulgen–positivo, che essi considerano un cromocentro, appare costantemente accollato al nucleolo in via di accrescimento. All'inizio del grande accrescimento ovocitario, come il nucleolo anche il citoplasma si carica di ribonucleoproteine, divenendo perciò molto pironinofilo. Scompare la cromatina perinucleare, mentre il nucleolo, che si accresce ulteriormente e a cui rimane accollato il cromocentro Feulgen–positivo, acquista una struttura più complessa, con una parte centrale ricca di ribonucleoproteine ed una parte corticale disseminata di granuli provvisti di desossiribonucleoproteine. Secondo gli autori, nel periodo che precede la formazione del tuorlo non tutti i nucleoli appaiono ugualmente colorabili con la pironina, ma – anche fra cellule delle stesse dimensioni – alcune hanno un nucleolo con la parte centrale fortemente basofila, ed altre invece un nucleolo che, nella colorazione con verde di metile e pironina, mostra una parte centrale quasi completamente scolorata. Ciò è stato interpretato come il segno di una intensa attività del nucleolo nel periodo che precede la genesi del tuorlo, con fenomeni alterni di accumulo e di eliminazione di ribonucleoproteine; tale intensa attività del nucleolo sembra pure dimostrata dal fatto che alla sua periferia compaiono frequentemente molte piccole vescicole a forma di vacuolo, che talvolta vengono ad aprirsi in superficie.

All'inizio della vitellogenesi, il nucleo degli ovociti si rigonfia maggiormente; nel suo grosso nucleolo diminuisce l'affinità verso la pironina, scompaiono le granulazioni Feulgen–positive e si attenua la distinzione in una parte centrale ed una corticale. Alla fine della

(2) E. WAGLER, *Branchiopoda, Phyllopoda = Kiemenfüsser*. (In: W. KÜKENTHAL u. T. KRUMBACH, *Handbuch der Zoologie*, Bd. III, H. 1, p. 305, 1927).

(3) J. FAUTREZ et N. FAUTREZ–FIRLEFYN, *À propos de la chromatine et des nucléoles dans la vésicule germinative de l'oöcyte de quelques Crustacés*. « Biolog. Jaarboek », vol. VIII, p. 27 (1951).

vitellogenesi, il nucleo ovocitario infine si avvicina alla superficie cellulare e, esternamente al nucleolo, vi ricompare la cromatina Feulgen–positiva, sotto forma di piccoli cromosomi granulari che si preparano evidentemente alla metafase della divisione maturativa.

La descrizione dell'ovogenesi di *Daphnia*, eseguita da Fautrez e Fautrez–Firlefyn, costituisce un primo interessante contributo ad un'indagine citochimica moderna dell'ovogenesi nei Cladoceri. Nelle loro osservazioni – destinate soprattutto ad un confronto con quanto accade in altri Crostacei – tali autori però non hanno tenuto conto dell'esistenza delle cellule nutrici, accanto agli ovociti veri e propri. Rimane aperta, pertanto, la possibilità di uno studio maggiormente approfondito, che consideri separatamente le prime ed i secondi, analizzando le modalità della loro differenziazione da un medesimo ceppo iniziale di elementi di tipo ovocitario e precisando le diversità del loro comportamento successivo. Si tratta, insomma, di stabilire fin da quando ed in cosa diversifichino, per struttura e composizione citochimica, gli ovociti e le cellule nutrici; e di portare un qualche contributo allo studio dei meccanismi con cui le cellule nutrici partecipano al processo di maturazione ovocitaria.

Le ricerche da me iniziate in questo campo, delle quali espongo qui in via preventiva i primi risultati, sono state compiute sul *Simocephalus vetulus* (O. F. Müller), un comunissimo Cladocero della famiglia dei Dafnidi. Gli esemplari, in ciclo partenogenetico ed in vari stadi di sviluppo, sono stati raccolti in uno specchio d'acqua della periferia di Modena ed in parte sono stati anche allevati in laboratorio., Fra vari fissativi sperimentati, mi hanno dato finora i migliori risultati il liquido di Bouin e quello di Helly. Dopo inclusione in paraffina e taglio in serie in fette di 5 o 7 μ, talune serie di fette sono state colorate con emallume–eosina per un primo orientamento, ed altre invece con il metodo di Feulgen o con il verde di metile – pironina per lo studio delle nucleoproteine. Ho eseguito anche prove con la ribonucleasi.

Dato il carattere di queste prime ricerche, non ho ancora effettuato studi con metodi di striscio o schiacciamento, o con altri sistemi di colorazione.

L'*esame dei preparati colorati con emallume–eosina* mi ha permesso di rendermi conto della struttura delle ovaie, che si presentano come due cordoni disposti sui lati del canale digerente. La loro parte più immatura (territorio germinale), occupata da ovogoni e dai più giovani ovociti, è situata caudalmente: procedendo in senso cefalico, vi si incontrano gli elementi germinali in stadi via via più progrediti, ed infine gli ovociti più maturi che si preparano a cadere nella camera incubatrice attraverso gli ovidotti. Gli ovogoni ed i giovanissimi ovociti all'inizio della profase maturativa, situati nel territorio germinale, sono cellule di esigue dimensioni con un piccolo nucleo ricco di cromatina, che assume l'ematossilina, e con scarso citoplasma eosinofilo. In una fase immediatamente successiva, negli ovociti che iniziano il periodo del grande accrescimento il citoplasma diviene intensamente basofilo, infarcendosi di sostanze che si tingono con l'ematossilina, mentre il

nucleo assume l'aspetto di una vescicola chiara, priva di evidente cromatina, in cui compare un grosso nucleolo molto basofilo, che si colora fortemente con l'ematossilina, ma in parte anche con l'eosina. Tale aspetto continua a esser presente quando gli ovociti, che seguitano ad aumentare di volume, cominciano ad apparire distribuiti in gruppi di quattro cellule, di cui tre sono destinate a divenire cellule nutrici; il nucleolo, nei quattro elementi, comincia allora generalmente a presentare numerosi vacuoli, situati alla sua periferia, a contenuto più eosinofilo che le parti rimanenti.

Nei gruppi di quattro cellule, l'elemento destinato a maturarsi in ovocita ben presto comincia ad attenuare la basofilia del proprio citoplasma, che pertanto gradatamente perde l'affinità per l'ematossilina e progressivamente si infarcisce di piccole sferule di tuorlo eosinofile; più tardi vi compaiono anche ampi vacuoli sferoidali privi di contenuto, *in vivo* verosimilmente provvisti di lipidi discioltisi durante l'allestimento dei preparati. Il nucleolo di tali ovociti rimane però intensamente colorabile con l'ematossilina, con vacuoli periferici a contenuto eosinofilo; al suo centro, prima o poi, compare un'ampia cavità sferoidale, il contenuto della quale non si tinge con l'ematossilina, ma presenta un certo grado di affinità verso l'eosina. Diversamente si comportano le tre cellule nutrici di ogni gruppo, che si accrescono meno di quanto faccia l'ovocita. Il loro citoplasma si conserva completamente infarcito di sostanze basofile, avidissime dell'ematossilina, ed in esso non si accumulano sferule di tuorlo; il loro nucleolo presenta tuttavia lo stesso aspetto e la stessa colorabilità del nucleolo ovocitario ed anch'esso finisce spesso con lo scavarsi ampiamente al proprio centro.

Verso la fine del loro accrescimento, gli ovociti raggiungono dimensioni assai considerevoli ed il loro citoplasma, oramai completamente riempito di sferule di tuorlo e di grossi vacuoli, non mostra più un'apprezzabile affinità per l'ematossilina. Tali voluminosi ovociti, occupando tutto lo spazio disponibile, assumono una caratteristica forma allungata nel senso dell'asse cefalo-caudale dell'animale e il loro corpo cellulare si espande in alcuni grossi lobi più o meno irregolari, simili agli pseudopodi di un'ameba, mediante i quali forse l'ovocita può spostarsi attivamente per raggiungere la camera incubatrice attraverso l'ovidotto. Fra questi lobi citoplasmatici vengono ad essere comprese, fra l'altro, le tre cellule nutrici, che ne sono talvolta completamente circondate. In tal maniera le cellule nutrici, che conservano fino all'ultimo le caratteristiche strutturali e tintoriali già descritte, vengono infine assorbite dall'ovocita, quasi per fagocitosi, e si dissolvono rapidamente nel suo citoplasma. In alcuni dei più grossi ovociti infatti talvolta è reperibile, incluso nel citoplasma, qualche residuo in via di distruzione delle cellule nutrici ormai assorbite.

Il nucleo dei più grossi ovociti, che hanno assorbito le cellule nutrici o le stanno digerendo, perde la forma regolarmente sferoidale, caratteristica per le cellule fin qui considerate; la membrana nucleare assume infatti un contorno irregolarmente dentellato. Il succo nucleare, che negli stadi più gio-

vanili non appariva colorato, mostra ora una certa affinità per l'ematossilina e per l'eosina. Il nucleolo, tuttora molto grande, conserva sempre la sua intensa colorabilità con ematossilina, ma va scavandosi sempre più ampiamente al proprio centro.

È evidente che gli ovociti, in questo stadio, sono ormai prossimi a completare la profase della divisione maturativa e ad emettere il globulo polare. Io però non ho ancora esaminato tale fase finale della maturazione ovocitaria.

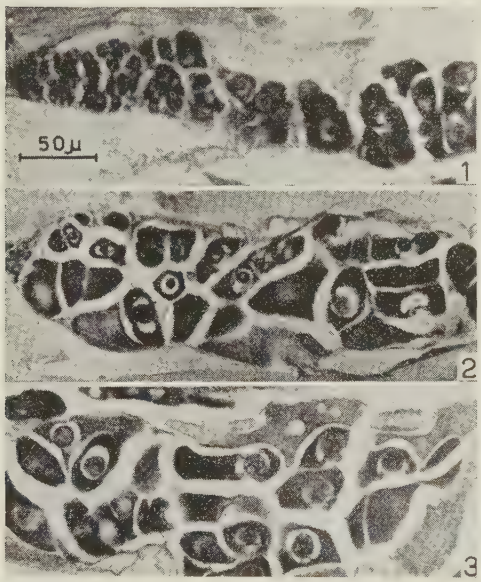


Fig. 1. – All'estrema sinistra, il piccolo « territorio germinale » le cui cellule minutissime non si tingono con la pironina; verso destra, ovociti in graduale accrescimento con citoplasma e nucleolo assai pironinofili; i più grandi cominciano a formare gruppi di quattro elementi. Fig. 2 e Fig. 3: Inizia la differenziazione fra ovociti veri e cellule nutrici; nel citoplasma dei primi si attenua l'affinità verso la pironina. Si noti la vacuolizzazione dei nucleoli.

Oltre alle cellule del ceppo germinale ora descritte, non si scorgono nelle ovaie altri tipi di elementi cellulari, che possano venire interpretati come cellule somatiche avvolgenti gli ovociti o le loro cellule nutrici.

L'*esame dei preparati colorati con il metodo di Feulgen* non mi ha permesso di rilevare nuovi fatti, oltre a quelli già descritti da Fautrez e Fautrez-Firlefyn su *Daphnia pulex*. All'inizio del periodo del grande accrescimento ovocitario, la cromatina cromosomica Feulgen-positiva si riduce a granulazioni assai minute, che si addossano alla faccia interna della membrana nucleare e gradualmente scompaiono nelle fasi successive. Un cromocentro più grosso Feulgen-positivo però rimane accollato al nucleolo in via di accrescimento, situato verso il centro del nucleo. In stadi successivi, il nucleolo in accrescimento degli ovociti e delle cellule nutrici appare costantemente cosparso, alla sua periferia, di molte piccole granulazioni Feulgen-positive; queste scompaiono soltanto nei nucleoli dei più grossi fra gli ovociti qui studiati, che hanno già consumato le loro cellule nutrici. È evidente che si deve trattare della così detta « cromatina associata al nucleolo », nel noto senso attribuito a tale espressione dalla scuola del Caspersson.

L'*esame dei preparati colorati con verde di metile-pironina* mi ha infine fornito i dati maggiormente interessanti, che riguardano il comportamento delle ribonucleoproteine nucleolari e citoplasmatiche, durante il ciclo evolutivo sia degli ovociti che delle cellule nutrici. Le fotografie che riporto sono state tutte ricavate da preparati allestiti con tale metodo di colorazione.

Nelle cellule germinali più giovani (ovogoni ed ovociti che non hanno ancora iniziato il grande accrescimento), contenute nel territorio più immaturo delle ovaie, né il nucleo né il citoplasma presentano una notevole affinità verso la pironina, che ci indichi un rilevante contenuto in acidi ribonucleici. La situazione si trasforma nettamente in uno stadio immediatamente successivo, negli ovociti che cominciano ad accrescersi dopo aver superato le fasi iniziali di sinapsi (fig. 1). Il nucleolo, che compare in queste cellule, si dimostra infatti assai pironinofilo, ed anche il citoplasma si carica rapidamente di sostanze intensamente colorabili con la pironina. Più tardi, dopo che le cellule si sono ripartite in gruppi di quattro (figg. 2, 3), l'affinità del nucleolo e del citoplasma verso la pironina si conserva e si va accentuando solamente nei tre elementi che acquistano il valore di cellule nutrici; invece, nell'elemento che si differenzia definitivamente in ovocita solo il nucleolo si mantiene fortemente tingibile con la pironina, mentre all'opposto il citoplasma va attenuando gradatamente l'affinità per il suddetto colorante (figg. 4, 5). Nel citoplasma ovocitario rimangono infine colorabili in rosso, dalla pironina, soltanto scarse granulazioni assai minute, distribuite attorno al nucleo ed attorno alle sferule di tuorlo od ai vacuoli vuoti che si sono andati sviluppando. Il contenuto dei vacuoli o delle cavità centrali, che si formano nei nucleoli degli ovociti e delle cellule nutrici, non si tinge con la pironina, ma rimane scolorato.

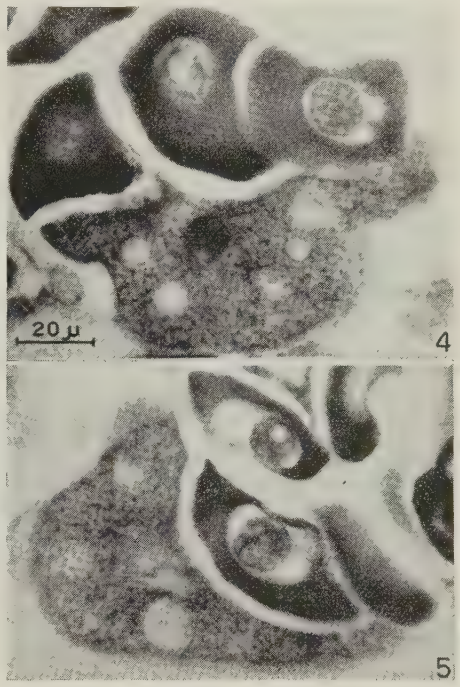


Fig. 4. – Un ovocita (in basso) con le tre cellule nutrici. Nel citoplasma del primo si è attenuata la pironinofilia, si sono accumulate sferule di tuorlo e si sono formati alcuni grossi vacuoli; il citoplasma delle cellule nutrici invece è molto pironinofilo. I nucleoli delle quattro cellule sono vacuolizzati e quello della cellula nutrice centrale è anche scavato al suo centro. Fig. 5: Altro ovocita (a sinistra) con cellule nutrici; del nucleo dell'ovocita, sezionato tangenzialmente, si scorge solo una piccola parte della membrana.

Anche in stadi successivi, negli ovociti completamente accresciuti e carichi di tuorlo, che hanno inglobato e assimilato le proprie cellule nutrici (figg. 6, 8), il citoplasma non mostra più un'affinità verso la pironina, tranne al livello delle scarse granulazioni sopra ricordate; le sole zone del corpo cellulare che talvolta presentano una netta colorabilità da pironina, sono quelle includenti eventuali residui di cellule nutrici (lembi di citoplasma o nucleoli in via di distruzione). Il nucleolo, vacuolizzato e scavato al proprio centro, si conserva però molto pironinofilo anche in questi ovociti di

maggiori dimensioni, il cui nucleo, che ha acquistato contorni frastagliati, mostra inoltre generalmente una cariolinfa distintamente basofila, anziché scolorata come negli stadi precedenti (figg. 7, 9).

In complesso si rileva dunque che, nella colorazione con verde di metile–pironina, assumono il colore rosso della pironina quei medesimi costituenti cellulari, che nella colorazione con emallume–eosina avevo visto acquistare la tinta violacea dell'ematossilina. Facendo precedere la colorazione con verde di metile–pironina da un trattamento con ribonucleasi, secondo il metodo introdotto da Brachet (digestione per un'ora a 55° C. in una soluzione 1/5000 di ribonucleasi cristallina), ho potuto constatare che tali costituenti cellulari rimangono completamente scolorati; posso affermare pertanto che *la loro normale colorabilità con pironina dipende dal loro contenuto in acidi ribonucleici*, e che perciò *essi risultano costituiti da ribonucleoproteine*.

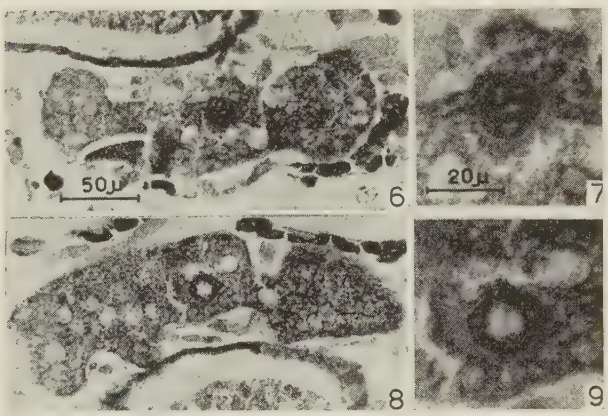


Fig. 6 e Fig. 8. – Ovociti completamente accresciuti, dopo l'inglobamento delle cellule nutrici. Il citoplasma, non più pironinofilo, è provvisto di vacuoli e infarcito di sferule di tuorlo. Fig. 7 e Fig. 9: Particolari con il nucleo ed il nucleolo dei medesimi ovociti. Si noti l'ampia cavità centrale nel nucleolo della fig. 9.

* * *

Il comportamento delle ribonucleoproteine durante l'ovogenesi del Cladocero studiato può venire riassunto, rilevando che tali sostanze dapprima si accumulano nel nucleolo e nel citoplasma di tutti gli ovociti in iniziale accrescimento; più tardi invece, quando questi giovani ovociti si differenziano in ovociti definitivi ed in cellule nutrici, solo le cellule nutrici continuano ad accumulare ribonucleoproteine nel proprio citoplasma, mentre all'opposto gli ovociti le consumano durante la genesi del tuorlo. Il nucleolo sia degli ovociti che delle cellule nutrici si conserva però sempre ricco di ribonucleoproteine.

In accordo con quanto è noto sulla funzionalità del nucleolo nella generalità degli elementi cellulari, sembra lecito ammettere che tale struttura nucleare, originatasi a contatto di un cromocentro Feulgen–positivo, sia un organite regolante l'accumulo delle ribonucleoproteine nel citoplasma sia dei più giovani ovociti che delle cellule nutrici. A differenza di quanto è stato descritto da Fautrez e Fautrez–Firlefyn per l'ovogenesi di *Daphnia*, nei nucleoli di *Simocephalus* non ho potuto rilevare sicuri segni di una ciclica produzione ed eliminazione di ribonucleoproteine; ma i numerosi vacuoli, che come in *Daphnia* compaiono sempre alla periferia del nucleolo a partire da un dato stadio dell'accrescimento, possono essere ugualmente

considerati un buon indizio di un'intensissima attività nucleolare con emissione di sostanze. L'escavazione centrale, che compare nel nucleolo verso la fine del suo ciclo evolutivo per confluenza o ampliamento di vacuoli meno grandi, può essere invece considerata, forse, come un segno di esaurimento, che prelude alla distruzione finale dell'organite nucleare.

Possiamo ammettere che, come nella generalità degli ovociti, anche in quelli di *Simocephalus* le ribonucleoproteine, precocemente accumulatesi in seno al citoplasma, costituiscano un materiale indispensabile, perché possa avvenire successivamente la sintesi del tuorlo. Comunemente, nell'ovogenesi di animali privi di cellule nutrici, gli ovociti in accrescimento attraversano dapprima una fase di accumulo di ribonucleoproteine nel proprio citoplasma, e poi una fase di consumo delle ribonucleoproteine e di accumulo di tuorlo. In *Simocephalus*, accanto agli ovociti veri e propri, che si comportano nella maniera ora accennata, esistono anche le cellule nutrici, che si comportano invece come se fossero ovociti incapaci di oltrepassare la fase di accumulo delle ribonucleoproteine. Tali cellule nutrici possono essere perciò considerate come ovociti a carattere abortivo.

Il fattore che determina il differenziamento dei giovani ovociti in ovociti definitivi od in cellule nutrici sembra essere di natura puramente topografica. Quando si formano i gruppi di quattro ovociti in iniziale accrescimento, soltanto uno fra i due centrali comincia a consumare le proprie ribonucleoproteine citoplasmatiche e a elaborare il tuorlo, mentre i tre rimanenti divengono cellule nutrici, capaci solo di continuare a produrre ribonucleoproteine. Non esiste nessun indizio che tali cellule nutrici divengano poliploidi o politeniche, come accade invece, per esempio, nelle ovaie di *Drosophila*, *Artemia* ed *Ophryotrocha* [4]. Alcuni saggi con la reazione di Mc Manus mi hanno inoltre mostrato che le cellule nutrici qui studiate non accumulano polisaccaridi, come fanno invece, secondo Bacci, le cellule nutrici di *Ophryotrocha*.

Sembra evidente che, in *Simocephalus*, le cellule nutrici debbono avere essenzialmente la funzione di fornire all'ovocita un'abbondante scorta di ribonucleoproteine, necessarie per la genesi del tuorlo, in aggiunta a quelle che l'ovocita stesso aveva inizialmente accumulato per proprio conto e che continua probabilmente a elaborare fino all'ultimo per effetto dell'attività del suo nucleolo, che si conserva sempre carico delle medesime sostanze. L'esame microscopico non permette di rilevare un diretto passaggio di ribonucleoproteine dal citoplasma delle cellule nutrici all'ovocita, prima che avvenga il terminale inglobamento delle prime da parte del secondo; ma i rapporti di stretta vicinanza, che sussistono a lungo fra le cellule suddette,

(4) T. S. PAINTER a. E. C. REINDORP, *Endomitosis in the nurse cells of the ovary of «Drosophila melanogaster»*, «Chromosoma», vol. I, p. 276 (1939); N. FAUTREZ-FIRLEFYN, *Étude cytochimique des acides nucléiques au cours de la gamétogénèse et des premiers stades du développement embryonnaire chez «Artemia salina» L.*, «Arch. Biol.», vol. LXII, p. 391 (1951); G. BACCI, *Alcuni saggi istochimici sugli ovociti e cellule nutrici di «Ophryotrocha puerilis»*, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», vol. XXVIII, p. 1293 (1952).

fanno pensare a un effettivo e continuo scambio di sostanze, mascherato forse dal fatto che le ribonucleoproteine cedute dalle cellule nutrici vengono rapidamente consumate nel citoplasma ovocitario.

Potremmo pure supporre che le ribonucleoproteine delle cellule nutrici vengano scisse in sostanze più semplici, non rilevabili citochimicamente, prima del loro passaggio in seno all'ovocita. Un tale meccanismo sarebbe simile a quello che si ammette, comunemente, per il passaggio delle ribonucleoproteine dal nucleolo al citoplasma di una medesima cellula; pure in questo caso si pensa che le ribonucleoproteine del nucleolo si decompongano in molecole meno complesse, prima di attraversare la membrana nucleare, per poi ricostruire nel citoplasma sostanze simili, se non identiche, a quelle di partenza. Nel caso qui studiato, la terminale utilizzazione delle ribonucleoproteine delle cellule nutrici è, comunque, sicuramente dimostrata dal fatto che gli ovociti ormai accresciuti finiscono sempre con il fagocitare le cellule nutrici, distruggendole integralmente nel proprio citoplasma.

Biologia. — *Neurosecrezione nel maschio di «Lacerta s. sicula» Raf.* (*). Nota (**) di Gianfranco Ghiara, presentata dal Socio N. Beccari.

I fenomeni neurosecretorî, nei Rettili, sono poco noti, e il numero delle specie studiate è relativamente esiguo. Le nostre conoscenze in proposito si fondano praticamente su di un limitato gruppo di lavori, concernente in prevalenza Ofidî [E. Scharrer, 1933 (1); Bargmann e Collab., 1950 (2); Hild, 1951 (3); Wingstrand, 1951 (4); E. Scharrer, 1951 (5); E. e B. Scharrer, 1954 (6)] e Cheloni [Kurotsu, 1935 (7)]. Per quanto riguarda i Sauri, solo Stutinsky (1953) (8) accenna all'esistenza di un nucleo ipotalamico ridotto, con segni di attività neurosecretoria.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Istologia ed Embriologia dell'Università di Napoli, diretto dal prof. Mario Galgano, utilizzando in parte un contributo del C. N. R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1954.

(1) E. Scharrer, «Z. Neurol.», *145*, 462 (1933).

(2) W. Bargmann, W. Hild, R. Ortmann, Th. H. Schiebler, «Acta Neuroveg.», *1*, 233 (1950).

(3) W. Hild, «Z. Anat.», *115*, 459 (1951).

(4) K. G. Wingstrand, *The structure and development of the Avian pituitary*, «C W K Gleerup», Lund (1951).

(5) E. Scharrer, «Biol. Bull.», *101*, 106 (1951).

(6) E. e B. Scharrer, «Handbuch d. mikr. Anat. d. Mensch», B. 6, T. 5, 953 (1954).

(7) T. Kurotsu, «Proc. Kon. Akad. Wetensch.», Amsterdam, XXXVIII, 7 (1935).

(8) F. Stutinsky, «L'Année biol.», LVII, 3e S., T. 29; Fasc. 11-12 (1953).

Per queste ragioni ho ritenuto utile iniziare una ricerca per stabilire se nel maschio di *Lacerta s. sicula* Raf. esistono fenomeni neurosecretori simili a quelli noti in altre specie di Rettili, e per cercar di chiarire gli eventuali rapporti tra neurosecrezione, ciclo citologico adenoipofisario e ciclo sessuale annuo (già esaminato, quest'ultimo, da Galgano e D'Amore, 1953 [9]).

Nella presente Nota riferirò brevemente intorno ai principali risultati conseguiti nello studio dei nuclei neurosecernenti diencefalici, e del decorso di fibre neurosecretorie nell'eminenza mediana e nella neuroipofisi. Lo studio è stato condotto, finora, su 22 encefali di maschi adulti, completi di ipofisi, fissati in Stieve o in Sanfelice, sezionati a 7 μ in serie sagittali o trasverse, e colorati con il metodo di Gomori alla ematossilina cromica–floxina, secondo le modifiche di Bargmann e collaboratori (1950, lav. cit.).

Ho in corso ricerche particolari intorno all'anatomia e all'istologia del diencefalo di *Lacerta*; per il momento, mi sono attenuto alle descrizioni che ne dànno Kuhlenbeck (1931) [10], Kurotsu (1935, lav. cit.), Beccari (1943) [11], e Ariëns Kappers (1947) [12].

Nel diencefalo del maschio di *Lacerta s. sicula* Raf. ho rilevato attività neurosecretoria essenzialmente in tre gruppi di cellule. Il più cospicuo è il nucleo peri– o paraventricolare magnocellulare. Rostralmente a questo, nelle pareti laterali del recesso preottico, è situato un nucleo magnocellulare assai meno esteso: il nucleo sopraottico magnocellulare. Infine, in posizione dorso–laterale rispetto al recesso preottico, si trova un nucleo che fascia dorsalmente e medialmente il cordone telencefalico laterale, e che propongo, provvisoriamente, di chiamare «nucleo giustapeduncolare magnocellulare». Il nucleo giustapeduncolare e il nucleo sopraottico sono fra loro collegati da una fila serrata di grosse cellule neurosecernenti, che fasciano esternamente il cordone telencefalico laterale e il tratto ottico.

Nel nucleo paraventricolare magnocellulare ho riconosciuto i due gruppi cellulari descritti da Kurotsu (lav. cit.) in *Lacerta agilis*, e cioè un «Hauptkern» e un «Nebenkern», che io chiamerò rispettivamente «gruppo principale» e «gruppo accessorio». Il gruppo principale (microfot. 1 e 2), costituito da grandi cellule rade, cariche di secreto in forma granulare, appare, nel mio materiale, molto esteso in senso ventro–dorsale, e alcune sue cellule si rinvengono in prossimità della commessura posteriore del pallio. Il gruppo si estende rostro–caudalmente in un territorio compreso tra la suddetta commessura e i gangli abenulari, con disposizione piuttosto obliqua in senso dorso–ventrale; la parte dorsale, che è la più cospicua, ha disposizione obliqua anche in senso latero–mediale.

(9) M. GALGANO e C. D'AMORE, «Atti XV Conv. Soc. Ital. Anat.» (1953).
(10) H. KUHLENBECK, «Morph. Jahrb.», *66*, 244 (1931).
(11) N. BECCARI, *Neurologia comparata*, Sansoni, Firenze (1943).
(12) C. U. ARIËNS KAPPERS, *Anat. du système nerveux*, Masson, Paris (1947).

Il gruppo accessorio, costituito da cellule più piccole e strettamente addensate (microfot. 1, in basso a sinistra), ha forma di corta lamina situata ventro–caudalmente al gruppo principale, e regolarmente parallela alla parete ventricolare. Il neurosecreto vi è molto meno abbondante e si trova, in genere, grossolanamente addensato attorno alla membrana nucleare. Alcune cellule, che, per i caratteri morfologici, sono ascrivibili al gruppo principale, si insinuano tra il gruppo accessorio e la parete ventricolare, facendo talvolta ernia tra le cellule ependimali.

Tra i due gruppi cellulari del nucleo paraventricolare magnocellulare sono disposte numerose fibre a rosario, che per lo più si originano dalle grandi cellule del gruppo principale.

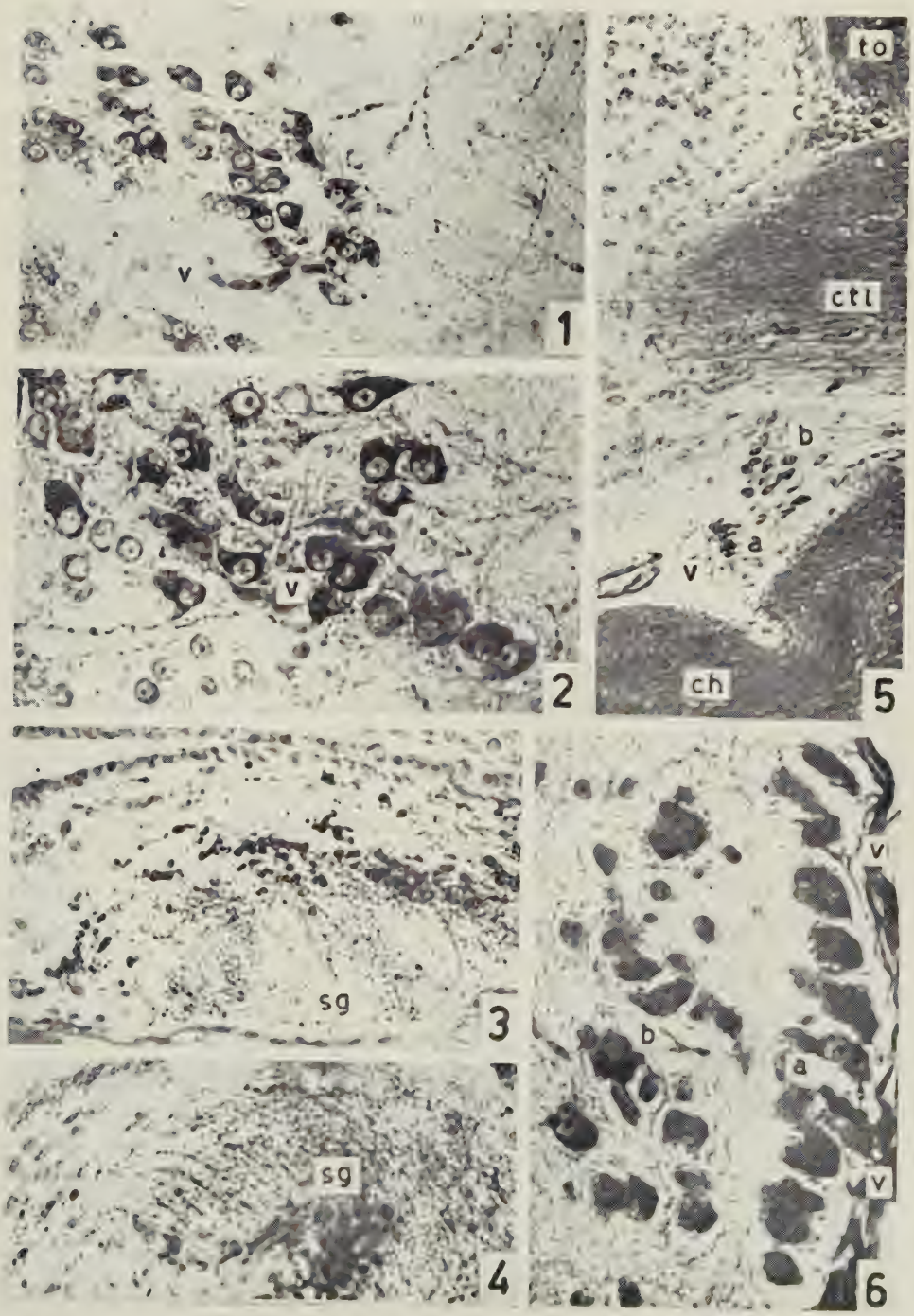
Anche nel nucleo sopraottico magnocellulare è possibile riconoscere, in base alla posizione topografica e alle caratteristiche citologiche, due raggruppamenti cellulari. L'uno è costituito da cellule che sono le più grandi e le più ematossilinofile fra quelle che fanno parte dei nuclei neurosecernenti diencefalici; tali cellule formano uno spesso cordone (microfot. 5 *a* e 6 *a*) addossato ai vasi (microfot. 5 *v* e 6 *v*) che decorrono alla superficie esterna dell'ipotalamo, tra questa e il chiasma ottico. Il neurosecreto ha forma di masse irregolari, e non sono rari i corpi di Herring, i quali, com'è noto (Bargmann e collaboratori, lav. cit.), sono rigonfiamenti delle fibre neurosecretorie.

Il secondo raggruppamento è costituito da cellule un po' più piccole, disposte lassamente in un'area piuttosto estesa in senso rostro–caudale (microfot. 5 *b* e 6 *b*); il neurosecreto ha aspetto prevalentemente granulare. È interessante rilevare la presenza, fra questo raggruppamento cellulare del nucleo sopraottico e il gruppo principale del nucleo paraventricolare magnocellulare, di cellule sparse e di fibre neurosecretorie.

Il nucleo, che ho provvisoriamente denominato « giustapeduncolare magnocellulare » (microfot. 5 *c*), è costituito da cellule di media grandezza, con neurosecreto in prevalenza granulare; esso, come già ho accennato, è collegato da una fila di cellule neurosecernenti al raggruppamento ventrale del nucleo sopraottico. Inoltre è da rilevare che, tra l'area del nucleo giustapeduncolare magnocellulare e quella del gruppo principale del nucleo paraventricolare magnocellulare, decorrono alcuni vasi, ai quali si trovano frequentemente addossate grosse cellule neurosecernenti.

Non ho preso in particolare esame il problema morfologico delle vie neurosecretorie: d'altra parte, esso è strettamente legato alla conoscenza delle connessioni dei nuclei neurosecernenti ipotalamici, che, almeno nei Rettili, sono tutt'altro che chiarite. Naturalmente ho riconosciuto una via ipotalamo–ipofisaria, ma non sono in grado di precisare da quali fasci sia costituita. Mi sono invece interessato allo studio del comportamento di questa via nell'eminenza mediana, nel peduncolo ipofisario e nella neuroipofisi. A questo proposito, posso anticipare quanto segue.

Nell'eminenza mediana di *Lacerta s. sicula* Raf. si possono riconoscere, in accordo con quanto ha visto Wingstrand (1951, lav. cit.) in diverse specie


v
1
v
2
to
c
ctl
b
a
v
ch
5
sg
3
sg
4
v
b
a
v
6

di Uccelli, tre strati, e cioè, in senso dorso–ventrale (microfot. 3 e 4): 1° lo *strato ependimale*, costituito dalle cellule ependimali; 2° lo *strato delle fibre*, attraversato longitudinalmente dal fascio ipotalamo–ipofisario; 3° lo *strato* (cosiddetto) *ghiandolare*, nel quale si espandono i capillari del plesso primario del sistema portale ipofisario (si veda anche Green, 1951 [13]). La via neurosecretoria, che nel pavimento ipotalamico decorre molto superficialmente, giunta all'eminenza mediana si porta, con angolo assai marcato, nello *strato delle fibre* (qualche fibra sottile è evidente pure al di sotto dell'ependima), ove decorre in senso longitudinale, presentando frequentemente dilatazioni anche cospicue. Nello *strato ghiandolare* (microfot. 3 *sg* e 4 *sg*) sono riconoscibili fibre più sottili, spesso regolarmente moniliformi, ad andamento pressoché perpendicolare alla direzione del fascio ipotalamo–ipofisario e alla superficie dell'eminenza; la presenza, in questo strato, di fini granulazioni di neurosecreto è stata segnalata anche da Benoit e Assenmacher (1953) [14] nell'anatra.

Le pareti ventrale e dorsale del breve peduncolo ipofisario sono attraversate da sottili fibre neurosecretorie decorrenti longitudinalmente sotto l'ependima. La neuroipofisi, carica di neurosecreto, ha struttura lobata (tre o quattro lobi): nei setti interlobulari sono situati vasi sanguigni contro i quali, talvolta, sono visibili le terminazioni a palizzata caratteristiche delle fibre neurosecretorie. La parete del recesso ipofisario, nel tratto prossimale, è sovente attraversata da fibre cariche di neurosecreto che si dilatano a clava tra le cellule ependimali.

Quanto ad altre vie neurosecretorie, per il momento sono in grado di confermare, in *Lacerta*, soltanto la presenza di fibre cariche di neurosecreto che si dirigono verso la zona della commessura posteriore del pallio, come ha già segnalato E. Scharrer (1951, lav. cit.) in *Thamnophis* (Ofidio). Dai reperti che ho finora conseguiti, non risulta tuttavia che detta commessura possa paragonarsi, come organo di accumulo del neurosecreto, alla neuroipofisi, secondo l'ipotesi avanzata dall'Autore (si veda in proposito anche E. e B. Scharrer, 1954, lav. cit.).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Tutte le microfotografie sono state eseguite su preparati di encefalo di *Lacerta*, fissati in Stieve, colorati con ematossilina cromica–floxina.

Microfot. 1. – Sezione parasagittale. 300 ×.
Gruppo principale (Hauptkern) del nucleo paraventricolare magnocellulare. In *v*, un vaso sanguigno.
In alto a destra, fibre neurosecretorie dirette verso la regione della commessura posteriore del pallio.
In basso a sinistra, alcune cellule del gruppo accessorio (Nebenkern).

(13) J. D. GREEN, « Amer. J. Anat. », *88*; 2, 225 (1951).
(14) J. BENOIT e I. ASSENMACHER, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *24* (suppl.), 27 (1954).

Microfot. 2. – Sezione parasagittale (più mediale della preced.). 550 ×.
Gruppo principale del n. paraventr. magnocellulare.
In *v*, vaso sanguigno.
A destra, fibre neurosecretorie dirette dorsalmente.
In basso a sinistra, alcune cellule della parete ependimale.

Microfot. 3. – Sezione sagittale. 300 ×.
Eminenza mediana. In *sg*, strato ghiandolare. Le altre spiegazioni sono nel testo.

Microfot. 4. – Sezione sagittale–obliqua. 300 ×.
Eminenza mediana. In *sg*, strato ghiandolare. Al disotto di *sg*, gruppo di cellule dell'adenoipofisi (*pars tuberalis*).

Microfot. 5. – Sezione parasagittale (assai laterale). 150 ×.
ch, chiasma ottico; *ctl*, cordone telencefalico laterale; *to*, tratto ottico; *v*, vaso sanguigno. Altre spiegazioni sono nel testo.

Microfot. 6. – Sezione trasverso–obliqua, secondo un piano passante per *a–b* della microfot. precedente. 550 ×.
In *v*, vaso sanguigno. Altre spiegazioni sono nel testo.

D. De Blasi e A. Signorini.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 novembre 1954

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Equazioni differenziali con punti di transizione* (« *turning points* »). Nota (*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. Da qualche tempo, nello studio del comportamento asintotico delle soluzioni di certe equazioni differenziali lineari, è stato più o meno esplicitamente osservato che certi speciali punti, che non potevano in alcun modo considerarsi come « singolari », si comportavano in modo eccezionale dal punto di vista dell'andamento asintotico delle soluzioni al divergere di qualche parametro. Per esempio questo succede pel punto $x = \nu$ nello studio del comportamento delle funzioni di Bessel $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ al divergere di ν e pel punto $x = 4\varkappa$ con $\varkappa = n + (\alpha + 1)/2$ nello studio del comportamento asintotico del polinomio di Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ al divergere di n [1]. Tuttavia solo in questi ultimi anni lo studio di questi speciali punti – detti *turning points* in inglese e *Wendpunkte* in tedesco e che io proporrei di chiamare in italiano: *punti di transizione* – sta assumendo un carattere sistematico, molto per opera di A. Erdélyi che, fra l'altro, ha tenuta una conferenza sull'argomento al recentissimo Congresso internazionale dei matematici di Amsterdam [2].

Lo scopo di questa Nota – che è stata occasionata da un'aggiunta alle mie *Equazioni Differenziali* [3] in vista della traduzione in inglese – è di fare

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cfr. TRICOMI, « Atti Acc. Sc. Torino », *83*, 3–20 (1949), e « Comm. Math. Helvetici », *22*, 150–167 (1949).

(2) Che verrà pubblicata nel vol. I (non ancora uscito) dei *Proceedings* di tale congresso, ERDÉLYI ha anche redatta, assieme con altri, un'utile bibliografia di lavori sui *turning points*, pubblicata (nel 1953) come opuscolo a sè dal *California Institute of Technology* (Pasadena, Calif., U.S.A.).

(3) 2ª Ed. Torino, Einaudi, 1953. L'edizione inglese, in corso di preparazione, uscirà presso Blackie & S., Glasgow.

vedere come, non solo nei due casi particolari suaccennati, ma in generale, il metodo più semplice e spontaneo per trattare i punti di transizione, è quel generale metodo di traduzione di un'equazione differenziale in equazioni integrali del tipo di Volterra, che io ho chiamato « di Fubini » [4] per onorare la memoria del consocio e mio fraterno amico G. Fubini, che giusto oggi la nostra Accademia commemora.

2. È ben nota la fondamentale importanza delle equazioni differenziali della forma

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\,y = 0,$$

dove λ denota un parametro e $p(x)$ una funzione sempre positiva, che, sole o unite a certe condizioni accessorie, si presentano nelle applicazioni più svariate.

È del pari ben noto [5] che, *supposto che anche la funzione $r(x)$ sia sempre positiva nel campo che si considera*, la semplice trasformazione di variabili:

$$(2) \qquad y = \alpha(x)z \quad , \quad \xi = \int \frac{dx}{\alpha^2(x)\,p(x)}$$

con

$$(3) \qquad \alpha(x) = [p(x)r(x)]^{-1/4}$$

cambia la (1) nella forma canonica

$$(4) \qquad \frac{d^2z}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)]z = 0$$

con

$$Q(\xi) = -\alpha^3 p\,(p\alpha'' + p'\alpha' + q\alpha),$$

che ben si presta, fra l'altro, allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni per $\lambda \to \infty$.

La condizione $r(x) > 0$ si rivela però troppo restrittiva in alcune applicazioni e precisamente per quelle in cui si presentano i suaccennati *punti di transizione, che sono appunto gli zeri (d'ordine dispari) della funzione $r(x)$*. L'importanza di tali punti discende dal fatto che, secondochè ci si trovi in un punto in cui è $r(x) > 0$ o invece $r(x) < 0$, al tendere di λ a $+\infty$, il coefficiente

$$P(x) = q(x) + \lambda r(x)$$

di z nella (1) finirà col diventare e restare positivo (o risp. negativo) ciò che, com'è noto, è decisivo per il carattere oscillante o non oscillante degli integrali dell'equazione.

(4) Cfr. op. cit. (3), § 29. Non è tuttavia da tacersi che per l'attuale applicazione basta nn caso particolare del metodo (quello in cui, nel secondo membro dell'equazione differenziale, mancano i termini con le derivate) in cui esso non differisce sostanzialmente dal preesistente *metodo di Liouville–Stekloff–Langer*.

(5) Cfr. op. cit. (3), § 32.

Supposto per semplicità che la funzione $r(x)$ abbia uno zero semplice (isolato) nel punto $x = x_0$ e che il limite inferiore dell'integrale che dà ξ sia questo stesso x_0 (di guisa che ad $x = x_0$ corrisponderà $\xi = 0$), sotto condizioni ben poco restrittive su $r(x)$ potremo rappresentare questa funzione mediante la formula

$$r(x) = \xi \rho(x)$$

avendo indicato con $\rho(x)$ una funzione sempre positiva nell'intorno di x_0, e allora, sostituendo alla (3) l'equazione

$$\alpha(x) = [p(x) \cdot \rho(x)]^{-1/4}, \tag{5}$$

l'equazione canonica (4) verrà rimpiazzata dall'altra

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + [\lambda \xi - Q(\xi)] z = 0,$$

che, riscrivendo x al posto di ξ e ponendo μ^2 al posto di λ (chè se per avventura fosse $\lambda < 0$ si potrebbe cambiare ξ in $-\xi$), assume la forma

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dx^2} + [\mu^2 x - Q(x)] z = 0} \tag{6}$$

3. Da quanto precede risulta che lo studio dei punti di transizione si può, sotto condizioni poco restrittive, ridurre allo studio del comportamento asintotico per $\mu \to \infty$ delle soluzioni della (6) nell'intorno del punto $x = 0$, cioè, eseguendo il cambiamento di variabile

$$x = 3^{-1/3} \mu^{-2/3} t \tag{7}$$

e ponendo

$$3^{2/3} Q(3^{-1/3} \mu^{-2/3} t) = Q^*(t), \tag{8}$$

allo studio del comportamento asintotico degli integrali dell'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3} t z = \mu^{-4/3} Q^*(t) z \tag{9}$$

nell'intorno del punto $t = 0$.

La (9) è un'equazione differenziale particolarmente adatta all'applicazione del metodo di Fubini, sia pel fatto che il coefficiente di z nel 2° membro è $O(\mu^{-4/3})$ per $\mu \to \infty$ anche supponendo soltanto che la funzione Q sia limitata nell'intorno dell'origine, sia perché uguagliando a *zero* il 1° membro si ottiene la nota equazione differenziale cui soddisfa la classica *funzione di Airy*:

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{t}{3}} \{ J_{-1/3}[2(t/3)^{3/2}] + J_{1/3}[2(t/3)^{3/2}] \}$$

nonché l'altra, da me associata alla precedente:

$$A_2(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{t} \{ J_{-1/3}[2(t/3)^{3/2}] - J_{1/3}[2(t/3)^{3/2}] \}.$$

Bastano anzi questi due soli fatti per permetterci di asserire [6] che la (9) ammette due integrali linearmente indipendenti Z_1 e Z_2 dotati della rappresentazione asintotica

$$Z_h = A_h(t) + O(\mu^{-4/3}) \quad , \quad (h = 1, 2),$$

cioè, tornando alla variabile x,

$$(10) \qquad \boxed{Z_h = A_h(3^{1/3}\mu^{2/3}x) + O(\mu^{-4/3})}$$

Questo risultato, la cui importanza è pari alla semplicità con cui è stato ottenuto, giustifica già la denominazione: *punto di transizione* proposta per punti quali attualmente $x = 0$.

Infatti, secondoché è $x > 0$ oppure $x < 0$, l'argomento di A_h in (10) tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$ per $\mu \to \infty$, ed il comportamento asintotico delle funzioni $A_h(t)$ per $t \to +\infty$ è completamente diverso da quello per $t \to -\infty$. Precisamente, nel primo di questi due casi, dalle classiche rappresentazioni asintotiche delle funzioni di Bessel, si ottengono subito le formule

$$(11) \quad A_h(t) = \sqrt{\pi}(3t)^{-1/4}\cos[2(t/3)^{3/2} \mp \pi/4] + O(t^{-7/4}) \ , \ (- \text{ per } h=1 \ , \ + \text{ per } h=2)$$

che pongono in luce il carattere oscillatorio (smorzato) delle nostre funzioni per $t \to +\infty$; mentre, cambiando t in $-t$, si ottengono in modo analogo le altre formule

$$(12) \qquad \begin{cases} A_1(-t) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(3t)^{-1/4}\exp[-2(t/3)^{3/2}]\cdot[1 + O(t^{-3/2})] \\ A_2(-t) = \sqrt{\pi}(3t)^{-1/4}\exp[+2(t/3)^{3/2}]\cdot[1 + O(t^{-3/2})] \end{cases}$$

che mostrano come $A_1(t)$ tenda invece (esponenzialmente) a *zero* ed $A_2(t)$ ad *infinito* per $t \to -\infty$.

4. Qualora l'« approssimazione » fornita dalla (10) non bastasse, non ci sarebbe che da calcolare dei successivi termini dello sviluppo asintotico di Z_h per la via indicata dal metodo di Fubini: costruzione dei successivi termini della serie che dà il nucleo risolvente di una certa equazione integrale di Volterra di 2ª specie.

Per esempio, per ottenere una formula asintotica col termine residuale dell'ordine di $\mu^{-8/3}$ (invece che di $\mu^{-4/3}$), non c'è che da servirsi della [35'] del § 29 delle mie *Equazioni Differenziali* che in questo caso fornisce

$$Z_h = A_h(t) + \int_0^t L(t, \tau)\, \mathfrak{S}_h(\tau)\, d\tau + O(\mu^{-8/3})$$

essendosi posto

$$\mathfrak{S}_h(t) = \frac{Q^*(t)\, A_h(t)}{-\pi/3}\, \mu^{-4/3}$$

e

$$L(t, \tau) = A_1(\tau) A_2(t) - A_1(t) A_2(\tau).$$

(6) Cfr. op. cit. (3), § 29, form. [35].

Pertanto, posto in generale,

$$(13) \qquad \int_0^t Q^*(\tau)\, A_h(\tau)\, A_k(\tau)\, d\tau = B_{hk}(t) \qquad (h, k = 1, 2),$$

avremo la nuova rappresentazione asintotica, « più aderente » della (10):

$$(14) \qquad Z_h = A_h(t) + \frac{3}{\pi}\mu^{-4/3}\left[A_1(t)\, B_{h2}(t) - A_2(t)\, B_{h1}(t)\right] + O(\mu^{-8/3})$$

rinunziando, per brevità, a ritornare alla vecchia variabile x per mezzo della (7).

Nei due casi particolari indicati in principio si trova che gli integrali B_{hk} possono esprimersi, in termini finiti e in modo semplice, mediante le funzioni di Airy e le loro derivate prime.

Geometria. — *Sulle ovali nei piani lineari finiti.* Nota (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. Un problema interessante, che già da alcuni anni si trovava posto sul tappeto, è il seguente.

Sia $\mathfrak{P}$ un piano lineare finito, ossia uno spazio proiettivo sopra un corpo G di Galois. È ben noto (1), che l'ordine q di G è un qualunque numero del tipo $q = p^h$, ove $p \geq 2$, $h \geq 1$ sono interi e p è primo (uguale alla caratteristica di G); e che $\mathfrak{P}$ contiene $q^2 + q + 1$ punti ed altrettante rette, su ciascuna delle quali stanno esattamente $q + 1$ punti di $\mathfrak{P}$. Inoltre, ogni conica non degenere di $\mathfrak{P}$ contiene $q + 1$ punti e, se $q > 3$, può venir identificata col gruppo da questi formato. È chiaro che tali punti risultano a tre a tre non allineati; sicchè, chiamando per brevità o v a l e di $\mathfrak{P}$ un qualunque gruppo di $q + 1$ punti di $\mathfrak{P}$ di cui mai tre (distinti) siano collineari, si ha che ogni conica non degenere di P è un'ovale.

La questione a cui alludevamo in principio, è quella di vedere se e come quest'ultima proprietà possa venir invertita. La possibilità d'inversione è stata di fatto congetturata da P. Kustaanheimo fin dal 1949 (2), nel caso più semplice in cui si abbia $h = 1$ ossia $q = p$; ma la previsione di questo Autore è stata dichiarata « implausible » da Marshall Hall (3), e nessuno – che io sappia – è finora riuscito ad approfondire come vadano effettivamente le cose.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cfr. ad esempio B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948) §§ 12, 17.

(2) Ved. G. JÄRNEFELT e P. KUSTAANHEIMO, *An observation on finite geometries*, « Atti XI Congresso matematico scandinavo » (Trondheim 1949), pp. 166–182.

(3) Nella recensione del suddetto lavoro, pubblicata in « Math. Rev. », *14*, p. 1008 (1953).

Al riguardo è facile intanto constatare che, se $p = 2$, $q > 4$, esistono in $\mathfrak{P}$ delle ovali che non sono coniche. Ma si può dimostrare che questo è il solo caso d'eccezione, e cioè che sussiste il

TEOREMA. – *Se* $p \neq 2$, *ogni ovale di* $\mathfrak{P}$ *è una conica.*

Questo risultato viene così a colmare una lacuna nell'assiomatica delle congruenze per i piani finiti posta da Kustaanheimo in loc. cit., ed a rendere evidenti varie proprietà delle ovali ottenute da Qvist [4]. Esso potrà inoltre avere importanti riflessi in astronomia e nella fisica atomica, se verrà accettata l'idea – ventilata da Järnefelt – di possibili legami fra il mondo fisico e la geometria degli spazi finiti. A questo riguardo vanno tenuti presenti i recenti lavori di vari matematici finlandesi [5], aventi appunto di mira un adeguamento della geometria degli spazi finiti alle applicazioni fisiche.

2. Stabilirò compiutamente il teorema, enunciato nel n. 1, in un lavoro che uscirà nel «Canadian Journal of Mathematics». Qui mi limito a dare un rapido cenno di dimostrazione.

È chiaro anzitutto che, se $\mathfrak{C}$ è un'ovale di $\mathfrak{P}$ ed A denota uno qualunque dei suoi punti, ciascuna delle $q + 1$ rette di $\mathfrak{P}$ uscenti da A può contenere al più uno dei q punti di $\mathfrak{C}$ distinti da A. Ne consegue che ognuna di tali rette contiene precisamente un ulteriore punto di $\mathfrak{C}$, fatta eccezione per una ben determinata fra esse – da chiamarsi la tangente di $\mathfrak{C}$ in A – la quale ha in comune con $\mathfrak{C}$ il solo punto A.

Scelti comunque tre punti distinti di $\mathfrak{C}$, ed applicando a questi le proprietà ottenute per A nell'ultimo periodo (ma pel momento senza utilizzare ulteriormente l'ipotesi che $\mathfrak{C}$ sia un'ovale), si può allora dimostrare che:

Se $p \neq 2$, *il triangolo determinato da tre punti di* $\mathfrak{C}$ *e quello formato dalle relative tangenti risultano fra loro omologici.*

Da qui infine si deduce il teorema del n. 1, utilizzando convenientemente la validità di questo risultato per le varie terne determinate da quattro punti di $\mathfrak{C}$, dei quali tre fissi ed uno variabile.

(4) Cfr. B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, «Ann. Ac. Sc. Fennicæ», ser. A, I, n. 134 (1952).

(5) Oltre ai lavori citati in (2) e (4), cfr. G. JÄRNEFELT, *A plane geometry with a finite number of elements*, «Verröf. des Finnischen Geodätischen Inst.», n. 36 (1949); G. JÄRNEFELT, *Reflections on a finite approximation to Euclidean Geometry. Physical and astronomical prospects*, «Ann. Ac. Sc. Fennicæ», ser. A, I, n. 96 (1951); P. KUSTAANHEIMO, *A note on a finite approximation of the Euclidean plane geometry*, «Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. math.», XV, 19 (1950); P. KUSTAANHEIMO, *On the fundamental prime of a finite world*, «Ann. Ac. Sc. Fennicæ», ser. A, I, n. 129 (1952); P. KUSTAANHEIMO e B. QVIST, *On differentiation in Galois fields*, «Ann. Ac. Sc. Fennicæ», ser. A, I, n. 137 (1952).

Geometria. — *Il teorema di esistenza delle trecce algebriche.* Nota I (*) del Socio OSCAR CHISINI.

INTRODUZIONE.– La teoria delle trecce algebriche (1), le quali dànno le proprietà topologiche di una curva algebrica piana, $f(xy) = 0$, in relazione al piano (proiettivo complesso) in cui è immersa, è stata iniziata e sviluppata (ancora molto parzialmente) per lo studio delle curve di diramazione dei piani multipli. Pertanto interessano principalmente le curve dotate di nodi e cuspidi e non di singolarità superiori.

È ovvio che la treccia di ogni curva d'ordine n si può dedurre per continuità dal caso generale, cioè dalla treccia canonica ad n fili, mediante le variazioni che riflettono la modifica della forma dei cappi (2) dipendente dal loro ordinamento o dalla fusione in uno solo di due (o più) tratti consecutivi. La prima modificazione è rappresentata da una delle due operazioni P ed S ($S = P^{-1}$) secondo la nomenclatura di Dedò (3), ed è sempre possibile; la seconda operazione invece è possibile quando i tratti che si fondono siano uguali (o in qualche altro caso complicato che qui non interessa).

Ora è sperimentalmente risultato che tutte le trecce costruite *a priori*, di cui si è dimostrata, in qualche modo, la corrispondenza con curve algebriche effettivamente esistenti, si potevano anche costruire – a partire dalla treccia canonica – coi procedimenti indicati; mentre, per qualche curva di cui è incerta l'esistenza non si è riusciti (o per mancanza di sufficiente tecnica o per non esistenza della curva) a costruire la corrispondente treccia (4).

È naturale che la esperienza abbia indotto i ricercatori ad ammettere (sia pure nella sola fase di ricerca) che le trecce dedotte dalla treccia canonica con modifica dell'ordine dei tratti e con fusione di questi (curve che la treccia stessa mostra se irriducibili o non) corrispondano a curve algebriche esistenti, cioè siano trecce davvero algebriche.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Per l'introduzione di questo ente e le sue prime proprietà vedi: O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, « Rend. Ist. Lombardo », seduta del 23 novembre 1933, nel qual lavoro la treccia è chiamata fascio caratteristico. Vedi anche M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXIII, 1950.

(2) Questi sono tracciati nel piano π_x rappresentativo della variabile complessa x e vanno ai punti di diramazione (propria o impropria) della $y(x)$ definita dalla $f(xy) = 0$.

(3) Eventualmente può usarsi la operazione K che equivale ad un omeomorfismo operante sul piano della variabile complessa y. Cfr. M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche ecc.*, loc. cit. § 3.

(4) Alludiamo qui principalmente alla curva del settimo ordine con 11 cuspidi. Cfr. B. SEGRE, *Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plueckeriani*, « Rend. Acc. Lincei », serie VI, vol X, 1929 e O. ZARISKI, *On the non existence of curves of order 8 with 16 cusps*, « Amer. Jour. of Math. », vol. 53, 1931.

La dimostrazione del fatto indicato è lo scopo di questo lavoro: lo raggiungiamo con una limitazione alquanto tenue [5] e trasformiamo così un principio di verifica, o di presunzione, in un mezzo di effettiva costruzione.

Il risultato ci sembra di una certa importanza. Costruita infatti che sia la treccia con certi caratteri (in particolare dato numero di nodi e di cuspidi) sarà senz'altro dimostrata l'esistenza di una corrispondente curva algebrica e – se occorra – la sua irriducibilità (che si legge immediatamente sulla treccia); in altri casi, costruendo la treccia di una curva che risulti di diramazione per un piano multiplo, si potrà riconoscere l'esistenza di superfici di un dato tipo (in particolare superfici di un dato ordine con elevato numero di punti doppi) ed anche studiarne le proprietà.

Lo sviluppo della dimostrazione risulta piuttosto complicato; ma ci sembra che esso sia abbastanza naturale, in quanto ha una certa analogia con le dimostrazioni geometriche [6] del teorema di Riemann che afferma l'esistenza di una funzione algebrica ad n valori dotata di un dato gruppo di monodromia legato ad un dato sistema di punti di diramazione (e cappi relativi), si intende soddisfacente alle note condizioni. La trattazione qui svolta presenta anzi, nei suoi preliminari dimensionali, curve di grado minimo per cui sono arbitrari i punti di diramazione.

Naturalmente è certo possibile migliorare la dimostrazione qui esposta; ma l'interessante sarebbe averne un'altra fondata su considerazioni sostanzialmente diverse, o trovare qualche esempio, sicuro, contrario al teorema.

Preliminari dimensionali.

1. *Nomenclatura.* – Indichiamo con Γ_n^s le curve piane d'ordine $n + s$ passanti s volte per il punto Y_∞, improprio dell'asse y (di un sistema cartesiano di riferimento). Similmente indichiamo con C_n^s quelle particolari Γ_n^s il cui genere p vale

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

e sono quindi dotate di ulteriori $s(n-1)$ punti doppi.

Per le Γ_n^s, e in particolare per le C_n^s, chiameremo centro il punto *s-plo* Y_∞; chiameremo poi brevemente g_n^1 la g_n^1 segata dalle parallele all'asse y; anche chiameremo brevemente punti di diramazione della Γ_n^s, e punti di diramazione della g_n^1, i punti di diramazione della funzione $y(x)$ definita dalla equazione $f(xy) = 0$ della curva Γ_n^s.

(5) La limitazione è $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$ ed è soddisfatta per tutte le curve esistenti d'ordine $1 < n < 18$ e per le curve di diramazione dei piani multipli del caso semplice.

(6) Cfr. F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang F, § 8 (Teubner 1921); Enriques Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. III, § 33 (Zanichelli 1924).

2. *Osservazione.* – Le Γ_n^s costituiscono una varietà S lineare, la cui dimensione d è

$$d = \frac{(n+s)(n+s+3)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + s(n+1).$$

Similmente le C_n^s costituiscono una varietà V_s non lineare, immersa nella S, la cui dimensione d_s vale

$$d_s \geqq \frac{n(n+3)}{2} + 2s$$

il segno $>$ valendo solo nella ipotesi che le condizioni imposte alle Γ_n^s di possedere $s(n-1)$ punti doppi non siano fra loro indipendenti.

Qualora la varietà delle C_n^s fosse riducibile, con V_s intenderemo più precisamente una sua componente irriducibile costituita da C_n^s generalmente irriducibili.

3. *Nomenclatura.* – Nel caso particolare in cui si assuma

$$s = \frac{n(n-5)}{2} + 3 = p + 2 - n$$

le C_n^s verranno indicate come C_n^r; dunque per definizione

$$r = p + 2 - n = \frac{n(n-5)}{2} + 3$$

4. *Avvertenza.* – Per le C_n^r supporremo sempre che sia $n > 3$; non ci occuperemo di vedere se, e come, le nostre conclusioni si estendono ai valori di $n \leqq 3$, poiché i corrispondenti casi non interessano la nostra ricerca.

5. LEMMA 1. – Fissato un qualunque valore di n (> 3), esistono delle C_n^r, ed anzi, per la *generica* di esse, la g_n^1 (segata dalle rette uscenti dal centro Y_∞) è completa.

Per la dimostrazione si consideri una curva canonica K_{2p-2} situata in un S_{p-1} (come indicato al numero 1, il genere p vale $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$).

Fra gli S_{p-3} di S_{p-1} (i quali costituiscono una varietà di dimensione $2p-4$) ve ne sono (costituendo una varietà di dimensione, almeno, $n-2$) di quelli che incidono la K_{2p-2} in $2p-2-n$ punti. Precisamente questi $2p-2-n$ punti non giacciono, in generale, in un S_{p-4} e sono i soli in cui lo S_{p-3} incide la K_{2p-2}. Che così sia è, in un certo senso, ovvio *a priori*; tuttavia la delicatezza di questo ordine di questioni obbliga ad una dimostrazione.

Questa dimostrazione si ottiene costruendo una particolare K_{2p-2} canonica ed un particolare S_{p-3}, che soddisfano alle condizioni indicate, cosa che non sarebbe possibile se queste non fossero soddisfatte dai relativi enti generici.

Si consideri dunque una curva piana f, d'ordine n dotata di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi distinti e così razionale, e la si assuma come curva di genere vir-

tuale $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ considerandone dunque i punti doppi come virtualmente inesistenti. Su questa le curve piane φ, d'ordine $n-3$, segano una g^{p-1}_{2p-2}; si ha pertanto in S_{p-1}, come immagine della curva f, una $\overline{K}_{2p-2}$, dotata di p punti doppi, sulla quale gli iperpiani S_{p-2} segano una g^{p-1}_{2p-2} trasformata birazionale della g^{p-1}_{2p-2} suddetta.

Anche la $\overline{K}_{2p-2}$ può considerarsi curva canonica di genere p dotata di p punti doppi accidentali, ed è ovviamente limite di una curva canonica di genere p effettivo, immagine di una curva piana d'ordine n sprovvista di punti doppi.

Osserviamo anzitutto che i punti doppi della $\overline{K}_{2p-2}$ sono linearmente indipendenti $\left(\text{nessuna } \varphi \text{ può contenere gli } \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ punti doppi della } f\right)$.

Presi poi $p-n$ fra i suddetti punti doppi, questi definiscono un S_{p-n-1} che li contiene, ed è base per un sistema (completo) di S_{p-2} che segano sulla $\overline{K}_{2p-2}$ una g_{2n-2} che può considerarsi serie canonica per una curva di genere virtuale n (quale sarebbe la K'_{2n-2} proiezione della $\overline{K}_{2p-2}$, dal suddetto S_{p-n-1}, su un S_{n-1}).

Pertanto la g^{n-1}_{2n-2} non ha punti fissi, e neppure ha punti fissi la

$$g^1_n = g^{n-1}_{2n-2} - G_{n-2}$$

dove G_{n-2} indica un gruppo di $n-2$ punti generici di $\overline{K}_{2p-2}$.

Per questa particolare $\overline{K}_{2p-2}$ valgono dunque le precisazioni indicate; queste precisazioni quindi, come già accennato, varranno anche per ogni generica curva canonica K_{2p-2} che – variata per continuità – si può ridurre alla $\overline{K}_{2p-2}$.

Ciò posto si consideri una generica K_{2p-2} canonica e su di essa la g^1_n completa segata dagli iperpiani del fascio che ha per asse un S_{p-3} secante la K_{2p-2} in $2p-2-n$ punti. Alla g^1_n si sommino r punti generici, $H_1 H_2, \cdots, H_r$. Si ottiene così una g^2_{n+r} (è $r = p+2-n$) che dà, come immagine piana della K_{2p-2}, una C^r_n.

Qui non importa che sommando alla g^1_n i punti H la serie completa definita abbia proprio la dimensione 2 e non dimensione maggiore, cioè che il procedimento indicato conduca ad una sola g^2_{n+r}; importa invece assicurarsi che la g^2_{n+r} non abbia punti fissi. Ciò segue osservando che l'aggiunta successiva degli r punti H_i amplia la g^1_n, e quindi almeno uno di essi è variabile; ma – essendo i punti H_i generici – due qualsiansi sono scambiabili fra loro per continuità, sicché essendo variabile uno, anche ogni altro punto H_i è variabile.

6. Lemma 2. – Sulla C^r_n *generica* le rette del piano segano una g^2_{n+r} completa.

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che ogni C^r_n può essere ottenuta a partire da una K_{2p-2} canonica, prendendo su di essa una g^1_n ed ampliandola in modo da ottenerne una g^2_{n+r} (che poi fornisce la C^r_n). Il caso

generale corrisponde a partire da una g_n^1 completa, e così di indice di specialità

$$i = 1 - n + p;$$

sommando successivamente punti H generici, per il lemma di riduzione, si ottengono serie (con punti fissi) di indice di specialità decrescente; ultima serie speciale è una g_p^1, la successiva è una g_{p+1}^1 ancora con punti fissi, ma non più speciale, e alla fine si ha una $g_{p+2}^2 = g_{n+r}^2$ non speciale (e senza punti fissi come sopra si è visto). Non essendo speciale, questa serie è completa.

7. *Nomenclatura.* – Chiamiamo brevemente birazionalmente identiche due C_n^s (e in particolare due C_n^r) quando siano tali le funzioni $y(x)$ definite da entrambe (s'intende riferite allo stesso sistema di assi e aventi entrambe il centro, cioè il punto *s–plo*, nel punto Y_∞).

8. TEOREMA. – Le C_n^r birazionalmente identiche (nel senso precisato sopra) costituiscono un sistema (varietà) U di dimensione d_u

$$d_u = r + 3.$$

Si considerino infatti due C_n^r birazionalmente identiche e la (unica) curva canonica K_{2p-2} di S_{p-1} che ad esse corrisponde. Le omografie del piano che mutano una nell'altra le due C_n^r lasciando ferma la g_n^1 (segata dalle parallele all'asse y) sono tutte e sole le omologie di centro Y_∞, cioè sono ∞^3. Questo almeno in generale, cioè se non vi sono proiettività sul parametro x che mutino in sé il gruppo dei punti di diramazione e le corrispondenti sostituzioni del gruppo di monodromia. Ma eventuali proiettività che spostino i gruppi della g_n^1 sono in numero finito, e quindi la loro presenza non altera la dimensione delle omografie che mutano una C_n^r nell'altra, lasciando ferma la g_n^1, sicché tale numero rimane ∞^3.

D'altra parte sulla K_{2p-2} le g_{n+r}^2 diverse contenenti la stessa g_n^1 dipendono solo dalla scelta dei punti H, cioè sono ∞^r. Segue che le C_n^r birazionalmente identiche ad una data sono appunto ∞^{r+3}, cioè, come enunciato, formano una varietà U di dimensione $r + 3$.

Aggiungiamo che, ovviamente, la U è irriducibile, se (caso generico) non esiste alcuna proiettività sulla variabile x che muti in sé i punti di diramazione della $y(x)$ definita dalla C_n^r (e le relative sostituzioni del gruppo di monodromia). Comunque, se riducibile, la U si spezzerà in parti della stessa dimensione e allora con U denomineremo una sola di queste.

Osserviamo in fine che, per la nostra conclusione, non è necessario che la g_n^1 sia completa, come capita per la C_n^r generica.

9. Le curve C_n (come particolari C_n^s) costituiscono una varietà V, non lineare e non necessariamente irriducibile, la cui dimensione (cfr. n. 2) è data da

$$d_r \geqq \frac{n(n+3)}{2} + 2r$$

il segno $>$ valendo nella provvisoria ipotesi prudenziale che gli $r(n-1)$ punti doppi della C_n^r generica impongano a questa (come C_n^5) condizioni non indipendenti. Vale però il

TEOREMA 2. – La dimensione d_r della varietà V è esattamente

$$d_r = \frac{n(n+3)}{2} + 2r .$$

Infatti, tenuto conto della osservazione precedente, indichiamo la dimensione d_r con

(1) $$d_r = \frac{n(n+3)}{2} + 2r + \varepsilon \qquad \text{con } \varepsilon \geqq 0 ;$$

dovremo riconoscere che $\varepsilon = 0$.

Osserviamo ora che gli

$$m = 2n + 2p - 2 = n(n-1)$$

punti di diramazione della C_n^r, cioè della relativa funzione $y(x)$, possono, per la C_n^r generica, o essere assunti ad arbitrio o avere un certo numero $\eta \geqq 0$ di vincoli. Comunque un qualunque sistema di tali punti di diramazione (cui sia legato un possibile sistema di cappi e di scambi, cosa fattibile in un numero finito di modi) definisce una varietà U, di curve C_n^r fra loro birazionalmente identiche, avente la dimensione $r+3$. Possiamo ora calcolare la dimensione della varietà V delle C_n^r a partire dai punti di diramazione; essa risulta ovviamente

(2) $$d_r = n(n-1) - \eta + r + 3 \qquad \text{con } \eta \geqq 0.$$

In fine uguagliando i valori di d_r dati dalle formule (1) e (2), tenendo conto che $r = \frac{n(n-5)}{2} + 3$ risulta

$$\varepsilon + \eta \leqq 0 \qquad \text{cioè } \varepsilon = 0 , \eta = 0$$

e quindi

$$d_r = \frac{n(n+3)}{2} + 2r .$$

10. Da quanto precede seguono – come corollari immediati – due significativi teoremi.

TEOREMA 3. – Per una curva d'ordine $n+r$, con $r = \frac{n(n-5)}{2} + 3$ l'imposizione di un punto r-*plo* e di $r(n-1)$ punti doppi dànno condizioni indipendenti fra loro.

TEOREMA 4. – Per una C_n^r gli $m = n(n-1)$ punti di diramazione possono essere assunti, e fatti variare, ad arbitrio.

E questo ultimo teorema è di fondamentale importanza per il seguito.

11. *Osservazioni al Teorema* 4. – *a*) Più precisamente si possono prendere ad arbitrio, oltre gli m punti di diramazione, anche gli scambi prodotti dai cappi che vanno ad essi (s'intende qualora siano soddisfatte le due note condizioni: transitività del gruppo di monodromia, se si vuole una $y(x)$ irriducibile; identità quale prodotto degli scambi presi nell'ordine in cui si seguono

i cappi che li producono). Ciò proviene dal fatto che ogni gruppo di monodromia così fissato può assumere l'unica forma canonica di Lüroth-Clebsch [7].

b) Fissato che sia un gruppo di punti di diramazione e i relativi scambi, la generica C_n^r del sistema U (di dimensione $r+3$) definita da queste condizioni è effettivamente irriducibile.

Prima di dimostrare la cosa, osserviamo che anche se il gruppo di monodromia è transitivo, la C_n^r, pur rispondendo ad una funzione $y(x)$ ad n valori, potrebbe risultare degenere contenendo una parte n–pla, su cui sono depositati gli n valori della $y(x)$ numericamente coincidenti, anche se funzionalmente distinti [8]. Per la dimostrazione indichiamo con $\bar{C}$ una tale C_n^r spezzata. Come è noto [9] questa deve spezzarsi in una curva K, di un certo ordine s, passante $s-1$ volte per Y_∞, da contarsi n volte, e in un residuo gruppo di t rette passanti esse pure per Y_∞.

Sarà dunque

$$r = n(s-1) + t.$$

Il sistema di queste possibili $\bar{C}$ ha la dimensione

$$\bar{d} = \frac{s(s+3)}{2} - \frac{(s-1)s}{2} + t = 2s + t$$

che si verifica subito essere minore di $r+3$, sicché le $\bar{C}$ non possono riempire tutta la varietà U delle C_n^r, birazionalmente identiche, col dato gruppo di monodromia.

Si ha infatti:

$$r + 3 - \bar{d} = n(s-1) + t + 3 - (2s + t) = s(n-2) - n + 3$$

ovviamente (ricordare l'ipotesi $n > 3$) maggiore di zero per $s = 1$ e, *a fortiori*, per $s > 1$.

c) La formula

$$d_u = r + 3$$

che dà la dimensione della varietà U delle C_n^r birazionalmente identiche, vale anche per la dimensione d' della varietà U′ delle C_n^s (birazionalmente identiche) con $s > r$, si ha cioè

$$d' = s + 3 \qquad \text{per } s > p + 2 - n.$$

Per la dimostrazione valgono gli stessi ragionamenti usati nel caso di $s = p + 2 - n = r$.

Si verifica così che anche per $s > r$, l'insieme dell C_n^s birazionalmente identiche, considerato come un ente unico, è elemento di una varietà ancora ad $m = n(n-1)$ e non più dimensioni (anche per le C_n^s con $s > r$ sono arbitrari i punti di diramazione).

Questo fatto era prevedibile *a priori*: il constatarlo in base agli sviluppi fatti vale qui come una verifica indiretta degli sviluppi stessi.

(7) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. 3°, pp. 26, 365, 367.
(8) Cfr. (7) p. 363.
(9) Cfr. (7) p. 363.

Astrofisica. — *Su di un'ipotesi cosmogonica.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

L'ipotesi, a cui si riferisce questa Nota, fu da tempo da me formulata, quando cioè eseguii alcune ricerche su quel fenomeno che chiamai *assorbimento gravitazionale* (1). Pensavo, già allora, che se tale fenomeno realmente esiste, si dovrebbe ammettere un conseguente sviluppo di calore, nella materia in cui esso si svolge. In ciò intravedevo, sin da quella lontana epoca, per lo meno, una delle cause del calore solare. E, indipendentemente dai risultati da me allora ottenuti, ho sempre ritenuto attendibile un simile quadro di fatti, che in questa Nota desidero ancora discutere.

È da ricordare, anzitutto, quanto misteriosa dovrebbe apparire al Fisico la natura della forza gravitazionale, che, alla grande semplicità della sua legge, unisce un'apparente indipendenza da qualsiasi causa perturbatrice. Per essa mancano le caratteristiche del fenomeno luminoso (trasparenza od opacità della materia, riflessione, natura ondulatoria che dia luogo a rifrazione o polarizzazione) che permettono, anzitutto, di determinarne la velocità di trasmissione. Né, d'altro canto, è possibile, contentandosi delle cosidette *teorie unitarie*, affermare legami tra fenomeni di differente natura, che mai l'esperienza ha dimostrato. Ben a ragione, Newton non accompagnò la sua grande scoperta, con alcuna ipotesi sulla sua natura, benché in altri casi (come in quello della teoria emissiva della luce) non fosse alieno dal formularne. E tre secoli, circa, ora decorsi, non hanno valso a chiarire questo mistero.

D'altra parte, la continua abitudine nostra alla osservazione delle conseguenze di tali forze, che dominano, si può dire, ogni atto della nostra vita, ce le fa apparire quali fatti del tutto ovvii, che non richiedono spiegazione alcuna, e sulla cui origine è del tutto superfluo cercare di indagare. Anzi, anche nella mente del Fisico o dell'Astronomo, il carattere misterioso o ribelle a lasciar formulare adeguate teorie, è di solito ignorato. Ciò è in parte giustificato dalla comoda, ma illogica, presunzione, di poter affidare allo stesso etere cosmico,

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Ved. questi « Rendiconti », vol. XXVIII, pp. 165, 221, 313, 416, 480 (1919); vol. XXIX, pp. 33, 90, 163, 225 (1920); vol. XXX, pp. 75, 289, 350, 442 (1921); vol. XXXI, pp. 41, 81, 141, 221, 343 (1922). Subito dopo il preannunzio di tali ricerche, il Fisico americano Michelson mi scrisse, chiedendomi l'autorizzazione a ripeterle o proseguirle; al che, naturalmente, acconsentii molto di buon grado. Per il testo della lettera di Michelson, ved. « Atti della Soc. per il Progresso delle Scienze », Congresso di Trieste, del settembre 1921. Ma non seppi mai se quell'illustre Fisico, prima di morire, cominciò a tradurre in atto il suo proposito. Inoltre, l'astronomo RUSSELL (*Majorana's Theory of Gravitation* « Astrophysical Journal », vol. LIV (1921) commentando le stesse ricerche, emise il parere che non di assorbimento della gravitazione si dovesse trattare, ma forse, di proprietà non additiva della materia, nella manifestazione di tale forza. Ma a me è sempre sembrato che, sostanzialmente, l'interpretazione di Russell non differisca dalla mia.

al quale già si attribuiscono i tre vettori elettromagnetici, la propagazione della forza newtoniana. Ora, a parte ogni precisazione in tal senso, è da circa mezzo secolo ben noto che la cognizione dell'etere cosmico va perdendo ogni valore. Oggi la fisica moderna cerca di spiegare i fenomeni ottici facendo a meno di questo ipotetico mezzo, la cui esistenza mai ci è stata rivelata direttamente. Ammesso ciò, ci si domanda quale possa essere la reale costituzione del campo di forza newtoniano. Intanto, appare chiaro, che l'abolizione del mezzo di propagazione, debba portare anche a quella delle forze di carattere statico, perché nello spazio, dove nulla esiste, la nostra mente non sa, in verun modo, concepire l'esistenza di una forza. La forza newtoniana deve dunque aver un deciso carattere, che voglio chiamare pseudo-dinamico. Rifiutata, come già fece Poincaré, l'idea dell'azione di particelle ultramondane, di Lesage, non resta che asserire la natura, *sui generis*, emissiva della forza gravitazionale. Una simile conclusione non è che una conseguenza dei criteri fondamentali della nostra logica fisica, basati, anzitutto, sulla nozione di spazio e di tempo. Limitando la nostra discussione ai campi di forza gravitazionale, si deve ammettere che se due corpi materiali si attirano, pur non essendo in contatto e senza l'interposizione di un mezzo reale od ipotetico, ciò deve dipendere, *necessariamente*, *dalla emissione continua da loro parte*, *di un fluido*, che possiamo ancora ritenere costituito da particelle o corpuscoli, *sui generis* (i gravitoni). Questi, in modo da noi non precisabile, con caratteristiche diverse, anzi opposte, a quelle dei comuni fenomeni meccanici, originano la forza attrattiva, tra i due corpi. Tale prima ipotesi si concatena con altre tre, anche esse necessarie. Una seconda consiste nel dover ritenere che il fluido gravifico che origina l'attrazione, nel colpire la materia od il fluido di questa, si deve, almeno in parte esaurire; da tal fatto deriva necessariamente, ciò che ho chiamato assorbimento gravitazionale, e che credo di avere constatato sperimentalmente. Una terza ipotesi fa prevedere che tale assorbimento debba avere, con ogni probabilità, carattere energetico; per cui ciò deve dar luogo a sviluppo di calore. Ed infine, una quarta, porta a dovere ammettere una progressiva e sia pur lenta o lentissima trasformazione della materia. Tale trasformazione, anche per le considerazioni che esporrò, resta per noi del tutto incontrollabile.

Ricordo ora qualcuno dei risultati a cui pervenni studiando il detto assorbimento della gravitazione, al qual fatto si collegano necessariamente le altre ipotesi, ora esposte. Nella trattazione teorica, che precedette lo studio sperimentale, consideravo una sfera omogenea di raggio R e di *densità vera* δ_v, ed ammettevo che nell'interno di essa, avvenisse già, in una certa misura, l'assorbimento parziale delle forze newtoniane elementari, fra le sue ultime particelle. Ammettevo così che, da tal fatto, derivasse una certa diminuzione apparente della massa della sfera, o della sua densità media, che desse luogo a ciò che chiamavo appunto *densità apparente* δ_a. L'ipotesi, su cui era impostata la trattazione teorica di tale problema, corrispondeva ad ammettere che le forze newtoniane, determinate secondo la nota legge, venissero ad affievolirsi, nella misura data da un coefficiente h che rappresenta l'affievoli-

mento per unità di lunghezza e di densità. Chiamando p il prodotto $h\mathrm{R}\delta_v$, pervenni a stabilire il rapporto fra densità apparente e vera, dato dalla funzione:

$$\Psi = \frac{\delta_a}{\delta_v} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}\right)\right\}.$$

Sottoposi, in seguito, questa espressione teorica all'esperimento, pesando una sfera di piombo di 1274 gr, alternativamente circondata o no da 104 kg di mercurio. In un'altra serie di misure, sostituii a questo mantello un altro di piombo, del peso di circa 10 tonnellate. Nel primo caso trovai $h = 6{,}66 \cdot 10^{-12}$; e nel secondo $h = 2{,}88 \cdot 10^{-12}$. Non ebbi modo di assicurarmi se lo scarto fra queste due serie di misure provenisse da errore sperimentale, o da imperfezione della teoria da me elaborata. Comunque, può essere stato interessante osservare che l'ordine di grandezza delle due determinazioni si sia mantenuto costante.

Debbo dire ancora, che le ricerche ora richiamate furono integrate, tra il 1922 ed il 1924, da altre tendenti a verificare se una massa materiale notevole (1 kg di mercurio), isolata termicamente, perché contenuta in un tubo Dewar, si riscaldasse, sotto l'azione attrattiva, a cui essa è sottoposta, per parte della Terra. Ma tali ricerche non ebbero alcun esito positivo. Si comprenderà in seguito la ragione di tale insuccesso.

In epoca recente, il Collega G. Armellini [2], con acume matematico, ha mostrato che l'assorbimento gravitazionale, se esiste, dovrebbe dar luogo ad un coefficiente h inferiore a 10^{-16}, altrimenti la rotazione del perielio di Mercurio sarebbe molto maggiore di quella che si constata. Anche tale rilievo renderebbe necessaria la ripetizione delle mie vecchie esperienze, onde controllarne il risultato. A parte ciò è da osservare che le deduzioni matematiche di Armellini non sembrano avere basi fisiche. Infatti, per un pianeta (Mercurio), il centro di gravità del Sole apparirebbe alquanto ravvicinato, in conseguenza dell'ammesso assorbimento della gravitazione. Ma poiché tale centro apparente è sempre sulla congiungente il pianeta col centro vero, per lo stesso pianeta i fenomeni si svolgono come se, in tale centro, fosse concentrata tutta la massa solare, sia pure alquanto diminuita. La rotazione del perielio resta perciò inalterata. Al più, può, l'assorbimento, dar luogo ad un accrescimento del periodo di rotazione.

Ma, prescindendo dal valore particolare di h, è possibile mantenere le quattro ipotesi più sopra formulate. Volendo tradurle in relazioni quantitative, si può concretare la legge seguente che, pur presentando qualche dubbio sulla sua completa attendibilità, s'impone per la grande semplicità: *Il calore sviluppantesi in una massa materiale, raccolta nel minimo spazio (cioè di forma sferica), è proporzionale al suo quadrato.* Così, nel caso più importante per noi, quello del Sole, la quantità di calore che si sviluppa in esso, nell'unità di

(2) G. Armellini, *Il moto del perielio di Mercurio, nell'ipotesi di un assorbimento gravitazionale*, questi « Rendiconti », vol. V, p. 288 (1948).

tempo, è data da $Q=HM^2$, dove M è la massa del Sole ed H una costante. Se tale legge è attendibile, essa deve valere anche per un altro astro qualsiasi, ed in particolare, per tutti i pianeti e la Luna.

Completo la formulazione di tale legge, con l'ammettere, ancora per ragioni di semplicità, che tale formazione di calore, che dà luogo ad una continua fuoruscita di esso, verso l'esterno, abbia finito per lasciar costituire un sistema (nel caso nostro, quello solare), con distribuzione di temperature stazionarie. Tale ammissione, beninteso, ha relazione con i tempi, per quanto lunghi, ai quali noi possiamo riferirci.

Ciò posto, si osserva come la quantità Q è nota per il Sole, potendola dedurre dalla costante solare, terrestre. Essa è $9{,}07 \cdot 10^{25}$ cal. gr/sec. Per cui, sapendo che la massa del Sole è $1{,}9 \cdot 10^{33}$ gr. si deduce qual sia il valore della detta costante, $H = 9{,}07 \cdot 10^{25}/(1{,}9 \cdot 10^{33})^2 = 2{,}504 \cdot 10^{-41}$. Essendo conosciuto H, per un altro astro qualunque si dovrebbe prevedere qual sia la quantità di calore che in esso si svolge, nell'unità di tempo. Essa sarà $q = Hm^2$, essendo m la massa di tale astro. Tale quantità di calore deve irradiarsi verso l'esterno; e supponendo di poter assimilare l'astro al corpo nero (come si fa, con discreta approssimazione, per il Sole), si potrà determinare la sua temperatura superficiale. Per far ciò, dividendo la quantità q per la superficie dell'astro, si ha la quantità di calore c da esso emessa, per ogni cmq. in un secondo. Indicando con δ la densità si ha:

$$c = \frac{Hm^2}{4\pi r^2} = \frac{4}{9} H\pi r^4 \delta^2 .$$

Infine, per la legge di Stefan, $c = \sigma t^4$, si ha la temperatura superficiale t dell'astro:

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\pi H}{9\sigma}}\, r \sqrt{\delta} = Sr\sqrt{\delta},$$

dove S è il coefficiente costante del secondo membro. La precedente relazione ci dice che un astro sferico ha una temperatura proporzionale al suo raggio, ed alla radice quadrata della sua densità media. Per aver il valore della costante S, basta sostituire, in tale relazione, quello di H, già trovato, e quello di σ, dato dalla legge di Stefan–Boltzmann, $\sigma = 1{,}37 \cdot 10^{-12}$ cal·gr/cm^2 K^4. Si ha:

$$S = \sqrt[4]{\frac{4\pi \cdot 2{,}504}{9 \cdot 1{,}37} 10^{-29}} = 7{,}11 \cdot 10^{-8}.$$

Per verifica, delle precedenti deduzioni, nel caso del Sole, essendo $r = 6{,}95 \cdot 10^{10}$cm, e $\delta = 1{,}41$, si ha $t = 5866$°K. Tale valore, con un errore dipendente dall'aver assimilato quell'astro al corpo nero, è abbastanza prossimo al vero.

Possiamo ora servirci della relazione stabilita, per verificare se, in relazione alle ipotesi fatte, le temperature superficiali dei vari pianeti, così ottenute, possano accordarsi con le determinazioni dirette, ove siano state possi-

bili. Intanto, per la nostra Terra, essendo il suo raggio $6{,}37 \cdot 10^8$ cm e la sua densità media 5,52, si ha $t = 106°K = -167°C$; tale valore è perfettamente accettabile. In modo analogo, si determinano le temperature superficiali degli altri pianeti e della Luna, come è riportato nella tabella.

	raggio (cm)	densità	temp.ra C		raggio (cm)	densità	temp.ra C
Sole	$6{,}95 \cdot 10^{10}$	1,41	+ 5593°	Giove . . .	$7{,}06 \cdot 10^9$	1,33	+ 313°
Mercurio . .	$2{,}45 \cdot 10^8$	3,33	— 235°	Saturno . .	$5{,}85 \cdot 10^9$	0,71	+ 77°
Venere . .	$5{,}98 \cdot 10^8$	4,90	— 179°	Urano . .	$2{,}52 \cdot 10^9$	1,29	— 70°
La Terra . .	$6{,}37 \cdot 10^8$	5,52	— 167°	Nettuno . .	$2{,}56 \cdot 10^9$	1,31	— 53°
Marte . . .	$3{,}48 \cdot 10^8$	3,48	— 225°	Luna . . .	$1{,}38 \cdot 10^8$	3,33	— 251°

Dall'esame di questa tabella, appariscono senz'altro attendibili le temperature superficiali dei piccoli pianeti e della Luna, nel senso che esse sono inferiori a quelle originate dal calore solare. I grandi pianeti, e specialmente Giove e Saturno, avrebbero temperature superficiali, in netto contrasto con le ammissioni della astronomia moderna. Vogliamo discutere in particolare il caso di Giove, perché questo è il più grande pianeta; per il quale si hanno misure astrofisiche, generalmente ritenute attendibili.

Si ammette così, che la temperatura di Giove sia di 140, o 135 gradi centigradi, sotto zero. Ciò risulta dai lavori di Coblentz ed altri, compiuti, una ventina di anni addietro [3]. Più recentemente, Wildt, ha dato una spiegazione chimica delle colorazioni mobili sulla superficie di Giove che appare cosparsa di nuvole (metano ed ammoniaca), attribuendole a soluzione di sodio metallico, nell'ammoniaca liquida. E tale ipotesi porta l'A. a ritenere che la temperatura superficiale di Giove non sia più bassa di — 112°C. Wildt giustifica questa sua ammissione, col dire che altrimenti l'ammoniaca sarebbe solida, e non avverrebbero le variazioni di colore. Ed egli aggiunge che il metodo usato da Coblentz è *convenzionale*, e può perciò dare risultati non sicuri.

Effettivamente le determinazioni compiute da quell'astronomo, malgrado i grandi mezzi di cui dispongono gli osservatori americani (specchio parabolico di m. 2,50 di diametro) non sembrano scevre da possibili critiche. Coblentz infatti, distingue la radiazione emessa da Giove, in due diverse: quella riflessa o diffusa, di provenienza solare, e quella dovuta alla temperatura

(3) D. Coblentz, *Scientific Papers of the Bureau of Standard*, n. 438; Coblentz and Lamplad, *Popular Cosmogony*, vol. 30, p. 151 (1929); K. Graff, *Die physische Beschaffenheit des Planetsystems*, in *Handbuch der Astrophysik*, B. IV: *Das Sonnensystem*, 1929.
Rupert Wildt, *On the chemical nature of the colorations in Jupiter's cloud form*, «Montly Notices of the Royal Astronomical Society», London, vol. 99, p. 616 (1939).

propria della superficie del pianeta. Ciò è del tutto corretto. L'insieme di queste due radiazioni dà un certo effetto su di una sensibile pinza termoelettrica. Egli poi ritiene di sceverare le due radiazioni, filtrandole, con un tubo pieno di acqua o glicerina; con tale artificio egli ammette di far arrivare, sulla pinza, le sole radiazioni riflesse solari. Ma evidentemente ciò costituisce un'asserzione arbitraria, perché, come è noto, l'acqua assorbe gran parte delle radiazioni calorifiche solari: queste, in parte possono essere riflesse dal pianeta. Oltre a ciò, si può avere qualche dubbio sul fatto che onde a grande λ, emesse da un corpo freddo (Giove, a — 140°C) possano *riscaldare* un corpo caldo (la pinza t. e.).

A queste obiezioni, che confermano la convenzionalità riconosciuta da Wildt, se ne aggiungono altre, deducibili da un attento esame logico di tal problema fisico. È noto come si ammetta che la temperatura interna della Terra possa essere elevatissima. Gutenberg pensa che essa sia compresa, al centro, fra 2000°C e 5000°C; qualche geologo ritiene che possa arrivare persino a 10.000°C. È così attendibile che, essendo la massa di Giove più di 300 volte quella della Terra, e malgrado la sua più bassa densità (1,33, invece di 5,52), la sua temperatura interna sia molto superiore a quella della Terra. La bassa densità media di Giove starebbe a confermare questa asserzione, giacché si può ammettere che nell'interno del pianeta avvenga qualcosa di simile a quanto avviene nel Sole, che ha densità media 1,41. La materia in Giove deve essere molto espansa, almeno sino ad una certa profondità. La sua temperatura interna può anche valutarsi prossima ai 100.000°C; e forse ancora molto più alta. Cade inoltre l'asserzione che, nell'interno dei grandi pianeti, esista un grande strato di ghiaccio.

È ancora da osservare, che ammissioni di tal genere non potevano essere avanzate, fin quando non fosse stata riconosciuta l'esistenza di una nuova, formidabile nel suo complesso, sorgente di calore, come ora risulta dalla mia ipotesi.

È anche interessante rilevare come, fino ad una trentina di anni addietro, si ritenesse che Giove dovesse essere, in superficie, molto caldo, tanto da emettere una debole luce propria, per altro non constatabile, per la illuminazione solare. Quell'ammissione veniva fatta in considerazione degli enormi sconvolgimenti che si osservano su Giove, e della diversa velocità rotatoria alle differenti latitudini. Quest'ultimo fatto può, per vero, essere conciliabile con l'ammissione di formazioni nuvolose anche a bassa temperatura. Si deve rilevare inoltre, come, per giustificare la bassa densità media dei grandi pianeti, si ammetta che essi, sotto una enorme atmosfera (che dovrebbe però essere costituita da metano, perché l'ammoniaca non potrebbe trovarsi che allo stato liquido), esista un grande spessore (decine di migliaia di chilometri) di ghiaccio, come ho già detto. Ciò avverrebbe tanto per Giove, quanto per Saturno, Uranio e Nettuno, mentre è in netto contrasto con le nuove vedute ora esposte.

In tanta incertezza di idee, ritengo molto opportuna l'accettazione della nuova ipotesi, da me proposta. Mentre prima della sua formulazione, non si

aveva modo di sospettare dell'esistenza di una fonte di calore nell'interno dei grandi ammassi materiali, con tale ipotesi vengono a modificarsi radicalmente, i nostri metodi, per indagare sulla struttura interna degli astri tutti. E così, l'ammissione dell'alta temperatura superficiale di Giove e degli altri grandi pianeti, non dovrebbe incontrare serie difficoltà. Essa è pur sempre inferiore a quella che si ammetteva, qualche decina di anni addietro.

Senza approfondire la questione, può, *a priori*, sembrare strano ed inammissibile che il solo fatto della reciproca presenza o vicinanza di due elementi materiali, possa dar luogo a sviluppo di calore. Ma una semplice indagine quantitativa, dà una soddisfacente chiarificazione di tale presunto fatto. L'ipotesi avanzata, porta difatti ad ammettere che la quantità di calore sviluppantesi in una massa materiale sferica, sia data da $q = Hm^2$. Per cui, di tutta questa quantità, la parte che si può considerare sviluppata nell'unità di massa, che diciamo q', sarà: $q' = Hm$. Per la Terra, si ha $m = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ gr; per cui $q' = 1{,}47 \cdot 10^{-13}$ cioè circa un dici–bilionesimo di caloria–grammo, ogni minuto secondo. Se consideriamo perciò un grammo di materia terrestre, che abbia un calore specifico unitario, perché esso si riscaldi di un grado centigrado, occorre attendere circa 250.000 anni. Se ci trasferiamo sul Sole, che ha massa di $1{,}9 \cdot 10^{33}$ gr, quel tempo sarebbe ridotto a un po' meno di un anno... dato che là si potesse sperimentare.

Le precedenti considerazioni numeriche, mentre giustificano l'insuccesso della mia già accennata ricerca sperimentale, mostrano come l'intravisto effetto termo-gravitazionale, riferito a piccole quantità di materia, è estremamente piccolo. Ma i suoi effetti, negli enormi ammassi naturali, diventano formidabili. Si comprende la ragione di ciò, se si considera che la formazione di calore intravista, crescerebbe in proporzione con la sesta potenza della dimensione lineare (il raggio della sfera); mentre il calore irraggiato non può sfuggire che per la superficie esterna, e perciò essere proporzionale al solo quadrato della detta dimensione. La temperatura alla quale tale emissione avviene, deve accrescersi con questa, sia pure in misura proporzionale alla sola prima potenza, in conseguenza della legge di Stefan.

Il fenomeno intravisto, di tale formazione di calore, si riferisce a qualsiasi qualità di materia, a parità di massa. Esso non è dunque caratteristico di particolari aggruppamenti nucleari, come in radioattività, nel qual caso i processi di trasformazione sono molto più rapidi, in confronto di quelli sospettabili, nella nuova ipotesi.

È da avvertire ancora, che la legge quadratica, ammessa per il fenomeno intravisto, può essere soltanto approssimata grossolanamente. Infatti, se essa fosse del tutto esatta, dovrebbe corrispondere ad una sorta di uniformità, tra le azioni elementari della massa considerata; mentre realmente, sembra presumibile che un elemento superficiale della sfera (per esempio) sia meno influenzato di uno sito al centro.

Un'altra ragione di incertezza, che si ha nell'applicazione della detta legge, deriva dal non conoscere noi con tuttta sicurezza, la distribuzione della

densità, nell'interno di un astro. Essa potrebbe dipendere da valori molto maggiori di quelli sinora ammessi, prossimi anche a quelli delle stelle nane, bianche, e ciò in conseguenza dell'intravisto assorbimento gravitazionale, che in tal caso potrebbe essere assai maggiore.

Comunico ancora, che seguendo il consiglio del Collega Giorgio Abetti, al quale avevo data preventiva visione di questa Nota, ho voluto tentare di applicare le formulate ipotesi, al caso delle lontane stelle. A ciò, per vero, si oppongono alcune difficoltà. Si osserva, anzitutto, quanto sia grande la varietà di tali stelle. Le loro dimensioni variano da 450 a 0,03 volte quella del Sole; le loro densità da 40.000 e più volte quella dell'acqua a 1/10.000.000. Non sembra quindi lecito, per extrapolazione, estendere ad esse, con qualche sicurezza, la teoria elaborata nel caso particolarissimo del sistema solare. Forse, per astri con struttura prossima a quella solare, i risultati di un'indagine del genere, possono avere una qualche attendibilità. Così, per quanto si abbia da fare con astri molto meno densi, per Sirio e Wega ho trovato temperature di 5570°K e 5910°K risp., e tali valori sono inferiori al vero, essendo tali stelle, bianche. Per Arturo che è gialla come il Sole, si ha però una densità di solo 0,0003, contro 1,41 del Sole. Io credo che la prova più convincente della attendibilità delle nuove ipotesi, sarebbe di verificare che una stella di eguale raggio e densità di quelle solari abbia anche uguale temperatura.

Per concludere, voglio rilevare quanto sia complesso il quesito trattato in questa Nota. Se in esso abbondano le incognite, che impediscono una sicura trattazione quantitativa, non mi sembra che contro l'insieme delle fatte considerazioni, si possano sollevare obiezioni consistenti, che portino al rigetto aprioristico, delle deduzioni finali, almeno dal punto di vista qualitativo. Ciò dico, per invocare sull'argomento, una approfondita discussione. Non si deve essere arrestati su tale via, dal preconcetto che mai, da quando la legge di gravitazione fu scoperta, si sia pensato ad una natura permanentemente energetica (cioè, anche quando la materia che da essa è influenzata, sia in apparenti condizioni di riposo) della forza newtoniana. Un'indagine ulteriore deve essere perseguita, insistendo su considerazioni logiche. Fra esse, si potrà tener conto di osservazioni astronomiche o sperimentali future, e fra queste, come ho già detto, della ripetizione di quelle da me già compiute intorno al 1920.

Dopo tutte le considerazioni precedenti, il lettore può restare convinto dell'importanza estrema dell'argomento trattato. Esso verrebbe a concernere, se definitivamente confermato, come io spero, una nuova ed importante forza della natura, che rende possibile la nostra vita, dipendente, in primo luogo, dall'atmosfera, portata alla temperatura opportuna.

E dal punto di vista filosofico, va, in fine, osservato, come, col proposto nuovo quadro di fatti, un principio viene ad essere affermato, nel modo più generale: « In natura nulla vi ha di immutevole, dai grandiosi fatti astronomici, alla struttura della materia, che, sinora, nella grande maggioranza dei casi, era giudicata possedere assetto stabile ».

Fisica matematica. — *Su una nuova teoria di «relatività finale»*. Nota (*) del Corrisp. Luigi Fantappiè.

1. In precedenti lavori (1) ho mostrato l'importanza fondamentale che ha, in ogni grande sistemazione della fisica, il gruppo che definisce l'*uguaglianza* di due enti (o fenomeni) fisici, come il *gruppo di Galilei* Gl^{10}_{3+1} (a 10 parametri, includendo le traslazioni nello spazio e nel tempo, oltre alle rotazioni e ai trascinamenti) per la *fisica classica*, o il *gruppo di Lorentz* Lz^{10}_{3+1} (pure a 10 parametri, includendo sempre le traslazioni) per la *fisica relativistica* (della «relatività ristretta»).

Tale gruppo (che chiamavamo appunto «fondamentale», ma che indicheremo d'ora innanzi come *gruppo «base»* della fisica o dell'«universo fisico» considerato, per distinguerlo dal «gruppo fondamentale» di Poincaré, che ha tutt'altro significato) permette infatti di determinare, *con la sua sola struttura*, tutti gli *operatori lineari*, aventi senso fisico nell'universo considerato, e quindi, in particolare, tutte *le sue grandezze quantiche* (vedi nota 2ª, citata), rappresentate appunto, secondo Dirac, da tali operatori.

Da questo punto di vista si può anzi dire che la sostanza della scoperta della teoria di relatività ristretta consiste, in fondo, proprio nella scoperta che il *gruppo base* della fisica del nostro universo sensibile *non è il gruppo di Galilei* Gl^{10}_{3+1}, come si era creduto fino allora, ma è *invece il gruppo di Lorentz* Lz^{10}_{3+1}, che però si riduce al precedente, come *caso limite*, quando si pensi che la velocità c della luce possa diventare *infinita*. E questo spiega, dato il valore *grandissimo* di c (300.000 chilometri al secondo), come i fisici non abbiano potuto distinguere per lungo tempo il gruppo *limite* di Galilei (per $c = \infty$) da quello di Lorentz ($c \neq \infty$, ma grandissimo).

Arricchiti però da questa interessantissima esperienza della scoperta della teoria di relatività, e cioè *della scoperta di un nuovo gruppo base dell'universo*, di cui il precedente caso limite è ora soltanto *una prima approssimazione*, vien naturale di domandarsi se, per caso, non possa ripetersi in futuro qualcosa di simile anche per il gruppo di Lorentz.

E in questa Nota mostreremo, per l'appunto, che il gruppo di Lorentz è proprio il *caso limite* di un «altro» gruppo, dipendente con continuità da un parametro R, per $R = \infty$, e poiché dimostreremo che questo nuovo gruppo *non può più esser limite* di un altro gruppo diverso, chiameremo questo nuovo gruppo il *gruppo finale*, e lo indicheremo con Fn^{10}_{3+1}. Poiché esso non solo *approssima quanto si vuole* il gruppo di Lorentz, ma esaurisce tutte le ulteriori

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica*, «Rend. Lincei», ser. 8ª, vol. 12, fasc. 3, 1952; *Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico*, Ibid., fasc. 5, 1952; *Gli operatori funzionali, vettoriali e tensoriali, ecc.*, «Atti 4° Congresso Un. Mat. It.», Taormina, 1951.

possibili approssimazioni, sembra che possa valer la pena di considerarlo *come il vero gruppo base del nostro universo*, e sviluppare quindi, di conseguenza una teoria di *relatività finale*, al posto dell'ordinaria teoria di *relatività ristretta*, in particolare precisando più generalmente le condizioni dell'*invarianza relativistica*, non rispetto al gruppo di Lorentz Lz^{1o}_{3+1}, ma rispetto al nuovo gruppo Fn^{1o}_{3+1}. Con ciò, per R molto grande, si riottengono *praticamente* le condizioni della relatività ordinaria, ma, in pari tempo, si prevedono tutte le eventuali ulteriori correzioni.

2. Per ricercare se il gruppo di Lorentz può esser limite di un gruppo più generale, con lo stesso numero di parametri, partiamo allora dall'interpretazione *fisica* (e *geometrica*) del gruppo Lz^{1o}_{3+1} come *gruppo dei movimenti del cronotopo di Minkowski*, il cui ds^2 è dato dalla forma differenziale (indefinita)

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1}$$

e vediamo se il nuovo gruppo si può ancora pensare come *gruppo dei movimenti* di un cronotopo più generale del precedente, ma di cui *questo sia il limite*.

Ora, le informazioni più sicure, che si possono avere nel caso più generale, sono evidentemente quelle che, riferendosi a *caratteristiche espresse da numeri interi* (le quali non possono variare con continuità) debbono coincidere con quelle, note, del caso limite. È dunque naturale, a questo riguardo, assumere le stesse ipotesi come nella relatività ristretta, e cioè:

a) il cronotopo ammette un gruppo continuo di movimenti su sé stesso, *dipendente da 10 parametri*;

b) il cronotopo ha *4 dimensioni*;

c) il cronotopo ha una metrica indefinita, caratterizzata *dalla stessa segnatura* (3 + 1) del ds^2 (1) (essendovi in esso linee reali di lunghezza nulla, e cioè i « raggi di luce » o « linee orarie dei fotoni », e anche spazi a 3 dimensioni, gli spazi ordinari t = cost., privi di linee di lunghezza nulla).

Ma un ben noto teorema di geometria differenziale ci assicura che *l'esistenza, in uno spazio a n dimensioni, di un gruppo continuo di movimenti a* $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri implica la curvatura costante dello spazio* [2].

Quindi, in base a questo teorema, e alle ipotesi *a*) e *b*) da noi ammesse, il cronotopo, che è *4 dimensioni* e ammette proprio un gruppo continuo di movimenti a $\frac{4\cdot 5}{2} = 10$ *parametri*, è necessariamente *uno spazio a curvatura costante*. Escluso il caso della curvatura nulla, dato dal cronotopo di Minkow-

(2) Cfr., per esempio, L. BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. 2°, p. 2ª. Zanichelli, Bologna, 1930, cap. 25°, p. 437. È da osservare che questo teorema, ivi dimostrato per un ds^2 definito, è valido in generale, qualunque sia la segnatura del ds^2, poiché nella sua dimostrazione entrano le sole proprietà formali del tensore di curvatura, che figura nelle espressioni di certe condizioni di integrabilità.

ski (1), resta dunque ammissibile uno spazio a curvatura costante $\neq 0$, che soddisfi anche alla terza condizione *c*), e per determinare *il suo gruppo dei movimenti*, che è ciò che a noi interessa, basterà allora fissare un *esempio* di tale spazio, soddisfacente a tutte le 3 condizioni *a*), *b*), *c*), col suo gruppo, poiché ogni altro modello di spazio, soddisfacente alle stesse 3 condizioni, sarebbe su esso applicabile, e ammetterebbe dunque *lo stesso gruppo*.

Ma noi possediamo un campionario degli spazi a curvatura costante, che viene realizzato con le metriche di Cayley [3], prendendo uno spazio *proiettivo* di egual numero di dimensioni, in questo *una quadrica a coefficienti reali* (che si dice l'*assoluto*), e poi definendo come *distanza* di due punti arbitrari A e B il logaritmo, moltiplicato per una costante, del birapporto (ABPQ), avendo indicato con P e Q i due punti ove la retta congiungente AB sega la quadrica. Per ogni quadrica, e per ogni regione dello spazio da essa limitata, si ha così una metrica a curvatura costante, nella quale le *geodetiche* sono rappresentate dalle rette, e quindi gli spazi geodetici dagli ordinari spazi lineari del primitivo spazio proiettivo. Le quadriche che si trasformano l'una nell'altra *con proiettività reali* ci dànno però *metriche equivalenti*, cioè spazi che si riducono l'uno all'altro con un opportuno cambiamento *reale* delle coordinate, mentre i movimenti dello spazio in sè sono dati evidentemente dalle *proiettività reali*, che lasciano fissa la quadrica assoluto.

Poiché allora, per la condizione *c*), debbono esistere geodetiche *reali* di lunghezza nulla, e cioè *rette* reali, dello spazio proiettivo S_4 immagine, che siano *tangenti* alla quadrica assoluto (in punti *reali*) ne segue che anche detta quadrica *dovrà essere reale*. Di più, poiché, sempre per la condizione *c*), debbono esistere spazi geodetici S_3 reali, *privi di rette di lunghezza nulla*, ne segue che un tale S_3 *non può incontrare la quadrica assoluto in punti reali*. Se un tale S_3 si manda all'∞ con una proiettività, la quadrica assoluto, che noi cerchiamo, dovendo essere *reale* e *tutta al finito*, sarà dunque del tipo della « sfera » di S_4.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

o anche, se l'S_3 esterno è dato, in altre coordinate, da $t = 0$, tale quadrica assoluto può esser rappresentata dall'altra equazione

$$f = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - R^2 = 0 \tag{3}$$

quando si prenda, *come immagine del nostro cronotopo, la regione esterna* alla quadrica (2) o (3) [4].

E infatti, introdotta, come misura della *distanza* AB di due punti A e B l'espressione

$$\overline{AB} = \frac{R}{2i} \log (ABPQ) \tag{4}$$

(3) Cfr. BIANCHI, op. cit., ib., cap. 26°, p. 495.

(4) È da osservare che la *regione interna* a questa quadrica è invece immagine di uno spazio con ds^2 *definito*, e con metrica *iperbolica*, a curvatura costante negativa, in cui vale cioè la geometria di Bolyai–Lobatschewski.

si trova allora che il cronotopo rappresentato *sulla regione esterna alla quadrica* (3) *è* proprio uno spazio *a curvatura costante positiva C*, data da

$$C = \frac{1}{R^2}, \tag{5}$$

soddisfacente esattamente alle tre condizioni *a*), *b*), *c*), che avevamo imposto [5].

Vediamo così che, partendo da queste condizioni, si viene a ricadere necessariamente su un tipo di cronotopo, già proposto da De Sitter [6] nel 1917, come una possibile soluzione delle equazioni gravitazionali di Einstein (e cioè *nella teoria di relatività generale*), e ripreso poi da Silberstein [7] e da Castelnuovo [5], per spiegare la fuga apparente delle nebulose lontane.

3. Dalla formula (4) si ricava che la misura ξ del segmento «spaziale», compreso tra O (origine) e x, è data da

$$\xi = R \operatorname{arctg} \frac{x}{R}, \qquad \text{con} \qquad x = R \operatorname{tg} \frac{\xi}{R}, \tag{6}\ (7)$$

da cui risulta che la lunghezza totale dell'asse x (e di ogni altra geodetica «spaziale») è finita e uguale a πR, cioè alla semicirconferenza di raggio R (il quale si può dunque interpretare come «raggio dell'universo») e che ogni spazio geodetico a 3 dimensioni (del tipo $t = \text{cost.}$) è pure finito (costituito da ∞^2 di tali geodetiche) e può rappresentarsi con una mezza ipersfera di S_4, o con l'ipersfera totale, quando però vi si identifichino i punti diametralmente opposti.

Per la misura σ della distanza dall'origine O di un punto $B \equiv (x, y, z, t)$ su una retta «spaziale» (che cioè non incontri la quadrica assoluto in punti reali), si trova analogamente, dalla (4),

$$\sigma = \overline{OB} = \frac{R}{2i} \log \frac{R + i\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}}{R - i\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}} \tag{8}$$

$$\sigma = R \arg\left(1 + \frac{i}{R}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}\right) = R \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}}{R} \tag{9}$$

e sviluppando in serie (convergente quando il numeratore è $< R$)

$$\sigma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2} - \frac{1}{3R^2}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}\right)^3 + \cdots \tag{10}$$

Per la misura invece di un intervallo temporale, si può assumere, al posto della (4), il numero *reale* (proporzionale).

$$\overline{AB} = -\frac{R}{2c} \log (ABPQ) \tag{11}$$

(5) Cfr. G. CASTELNUOVO, *L'universo di De Sitter*, «Rend. Lincei», ser. 6ª, vol. 12, p. 263 e sg., 1930; ID., *Forma e dimensioni dell'universo*, «Scientia», vol. 49, p. 403 e sg., 1931. ID., *De Sitter's Universe and the motion of nebulae*, «Montly Notices of the R. Astron. Soc.», vol. 91, p. 829 e sg., 1931.

(6) DE SITTER, «Montly Notices of the R. Astron. Soc.», Novembre 1917.

(7) L. SILBERSTEIN, *The Size of the Universe*, Oxford Univ. Press, 1930.

da cui si ricava che la misura τ dell'intervallo di tempo compreso fra i due eventi dell'asse t, di coordinate O (origine) e t, è data da

$$(12) \qquad \tau = \overline{Ot} = -\frac{R}{2c}\log\left(O, t, -\frac{R}{c}, \frac{R}{c}\right) = \frac{R}{2c}\log\frac{R+ct}{R-ct}$$

essendo inversamente

$$(13) \qquad t = \frac{R}{c}\,\frac{1-e^{-2c\tau/R}}{1+e^{-2c\tau/R}} = \frac{R}{c}\,\mathrm{tgh}\,\frac{c\tau}{R}.$$

Più generalmente, per la distanza τ dall'origine O di un qualunque altro evento $B \equiv (x, y, z, t)$ su una retta a carattere temporale (e cioè secante la quadrica assoluto), e quindi possibile « linea oraria », si trova

$$(14) \qquad \tau = \overline{OB} = \frac{R}{2c}\log\frac{R+\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}}{R-\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}}$$

e sviluppando in serie

$$(15) \qquad \tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{3cR^2}\left(\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}\right)^3 + \cdots$$

serie sempre convergente, a causa dell'equazione (3) della quadrica assoluto, nella regione a essa *esterna*, da noi considerata, in cui il 1° membro si mantiene negativo (e quindi il radicale $< R$).

Dalle espressioni (10) e (15) delle distanze spaziali e temporali di questo cronotopo vediamo così che tali distanze, per R tendente all'∞, si riducono proprio alle distanze lorentziane, nel cronotopo di Minkowski, date dai primi termini degli sviluppi in serie.

Dunque *il cronotopo della relatività ristretta si può effettivamente considerare come limite del cronotopo di De Sitter, quando il raggio R dell'universo diventa infinito* (e quindi la curvatura diventa nulla).

Il gruppo di Lorentz $Lz^{1°}_{3+1}$ dei movimenti del primo cronotopo è quindi *limite*, per $R \to \infty$, del gruppo dei movimenti del cronotopo di De Sitter in sé.

4. Per determinare allora quest'ultimo gruppo o *gruppo finale* $Fn^{1°}_{3+1}$, basta ricordare che i movimenti del cronotopo di De Sitter sono dati dalle *proiettività reali*, che trasformano in sé la quadrica assoluto (3), cioè, introducendo nuove coordinate x_k

$$(16) \qquad t = x_0\frac{R}{c} \quad , \quad x = x_1 R \quad , \quad y = x_2 R \quad , \quad z = x_3 R$$

la quadrica

$$(17) \qquad -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$$

e introducendo *coordinate omogenee* $\bar{x}_k$ con

$$(18) \qquad x_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

la quadrica di equazione omogenea

$$(19) \qquad \bar{f} = -\bar{x}_0^2 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 = 0.$$

I movimenti cercati si ottengono tutti dalle *sostituzioni lineari omogenee* sulle 5 coordinate $\bar{x}_k$ (di determinante + 1, come è sempre possibile) le quali *trasformano in sé la forma quadratica* $\bar{f}$, indefinita, con segnatura (4 + 1).

Tali sostituzioni costituiscono evidentemente *un gruppo*, che indicheremo come gruppo *pseudo ortogonale speciale* $\mathrm{Os}^{\mathrm{IO}}_{4+1}$, relativo a detta forma. Data la particolare corrispondenza biunivoca (e bicontinua) tra queste trasformazioni e quelle del gruppo finale $\mathrm{Fn}^{\mathrm{IO}}_{3+1}$, risulta anzi che questi due gruppi sono *isomorfi*, non solo come gruppi continui, ma anche come *gruppi topologici*.

D'altra parte, per quanto abbiamo visto in precedenti lavori (ved. Nota 2ª, citata in [1], n. 2) non è tanto il cronotopo di De Sitter, che ha importanza in queste ricerche (e che del resto è stato già lasciato da parte, per varie altre ragioni), quanto la *varietà topologica* V_{10}, immagine degli elementi del gruppo *base* considerato, poiché è proprio essa *lo spazio di fase*, su cui sono definite le funzioni φ di «stato», e che *sostituisce dunque il cronotopo*, come vero *ambiente*, in cui sono situate le caratteristiche di dette funzioni. E poiché tale varietà immagine è la stessa, noi potremo addirittura *identificare* i due gruppi isomorfi $\mathrm{Os}^{\mathrm{IO}}_{4+1}$ e $\mathrm{Fn}^{\mathrm{IO}}_{3+1}$, almeno in quest'ordine di considerazioni.

È da osservare che il gruppo $\mathrm{Os}^{\mathrm{IO}}_{4+1}$ contiene in particolare le *rotazioni ordinarie* nei piani $\bar{x}_j \bar{x}_k$ ($j, k \neq 0$), per esempio:

$$(20) \qquad \begin{cases} \bar{x}'_1 = \bar{x}_1 \cos\vartheta + \bar{x}_4 \operatorname{sen}\vartheta \\ \bar{x}'_4 = -\bar{x}_1 \operatorname{sen}\vartheta + \bar{x}_4 \cos\vartheta \end{cases}$$

a cui corrisponde in $\mathrm{Fn}^{\mathrm{IO}}_{3+1}$, in coordinate non omogenee (16) o (18), posto $\vartheta = \frac{\alpha}{\mathrm{R}}$, e ricordando la (7),

$$(21) \qquad x' = x'_1 \,\mathrm{R} = \frac{\bar{x}'_1}{\bar{x}'_4}\,\mathrm{R} = \mathrm{R}\,\frac{x_1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}}{1 - x_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}} = \mathrm{R}\,\frac{\frac{x}{\mathrm{R}} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}}{1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}} =$$

$$= \mathrm{R}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\xi}{\mathrm{R}} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\xi}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\mathrm{R}}} = \mathrm{R}\operatorname{tg}\frac{\xi + \alpha}{\mathrm{R}},$$

da cui, passando con la (6) alle coordinate cronotopiche,

$$(22) \qquad \xi' = \mathrm{R}\operatorname{arctg}\frac{x'}{\mathrm{R}} = \xi + \alpha,$$

che, riguardo a questa sola coordinata, ha la forma di una *traslazione*, ma ne differisce per le altre coordinate

$$(23) \qquad y' = x'_2\,\mathrm{R} = \frac{\bar{x}'_2}{\bar{x}'_4}\,\mathrm{R}, \text{ ecc.},$$

che restano alterate, a causa della variazione del denominatore $\bar{x}'_4$.

Il gruppo O^{IO}_{4+1} contiene anche delle *pseudorotazioni* (o rotazioni con argomento immaginario), per esempio, quelle nel piano $\bar{x}_0\ \bar{x}_1$

$$(24)\qquad \begin{cases} \bar{x}'_1 = \bar{x}_1 \cosh\vartheta - \bar{x}_0 \operatorname{senh}\vartheta, \\ \bar{x}_0 = -\bar{x}_1 \operatorname{senh}\vartheta + \bar{x}_0 \cosh\vartheta, \end{cases} \qquad \text{le altre } \bar{x}'_k = \bar{x}_k,$$

a cui corrispondono, posto $\operatorname{tgh}\vartheta = \frac{v}{c}$, nelle coordinate *non omogenee* (16), le trasformazioni

$$(25)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \qquad\qquad y, z, \text{ inalterate}, \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{cases}$$

che coincidono *formalmente* con le celebri trasformazioni di Lorentz, ma ne differiscono per il fatto che ora le coordinate x o t non dànno più le *misure* delle distanze dall'origine.

5. Abbiamo visto che il gruppo finale Fn^{IO}_{3+1} è *isomorfo* al gruppo Os^{IO}_{4+1} delle trasformazioni « pseudoortogonali » della forma $\bar{f}$ (19) in sé. Ma tale gruppo *ha la stessa struttura « complessa »* del *gruppo ortogonale* Os^{IO}_5 delle trasformazioni *ortogonali* dirette di S_5, come si vede subito trasformando la forma $\bar{f}$ in una somma di quadrati, con la trasformazione *complessa* $\bar{u} = i\bar{x}_0$, e quindi il gruppo Os^{IO}_{4+1} e il gruppo finale Fn^{IO}_{3+1}, sono *gruppi semplici* come Os^{IO}_5 [8], a differenza del gruppo di Galilei Gl^{IO}_{3+1} e del gruppo di Lorentz Lz^{IO}_{3+1}. Questi due gruppi, infatti, *non sono semplici*, ammettendo un sotto gruppo invariante, quello delle *traslazioni*, che è addirittura *abeliano*, e quindi tali gruppi *non sono nemmeno semi-semplici*, possedendo dunque, come gruppi *limiti*, una struttura piuttosto complicata.

Ora questo fatto della *semplicità* di Fn^{IO}_{3+1} (o Os^{IO}_{4+1}) ha conseguenze molto notevoli. Si può osservare, infatti, che la presenza di un sottogruppo invariante si traduce nell'annullarsi di varie costanti di struttura, e quindi la *semplicità* del gruppo si traduce nel fatto che almeno alcune di queste costanti debbono essere *diverse da zero*. Se quindi un gruppo semplice è *limite* di un altro gruppo, con lo stesso numero di parametri, si ottiene cioè da un altro, dipendente con continuità da una variabile α, per $\alpha \to \alpha_0$, anche le costanti di struttura di questo dipenderanno con continuità da α, e quindi tutte quelle che sono diverse da 0, per $\alpha = \alpha_0$, resteranno pure $\neq 0$, per α abbastanza prossimo a α_0. In particolare, dunque, se il gruppo limite è *semplice*, anche il gruppo variabile deve essere *semplice*, per α vicino ad α_0, cioè *un gruppo semplice non può essere limite che di un gruppo pure semplice.*

(8) Cfr. E. CARTAN, *Thèse*, 2e éd., Vuibert, Paris, 1933.

Segue di qui che, se il gruppo semplice Fn^{10}_{3+1} o il gruppo isomorfo Os^{10}_{4+1} fossero *limiti* di un altro grupo variabile, pure a 10 parametri, *anche questo dovrebbe essere semplice*. Ora, esaminando l'elenco completo di tutte le strutture complesse di gruppi semplici (ved. Tesi di Cartan, già cit.), troviamo soltanto due strutture di gruppi semplici a 10 parametri, e cioè il n. 2 della categoria B, del gruppo ortogonale Os^{10}_{5} e il n. 2 della categoria C, di un gruppo «simplettico», che però *coincide con la precedente*. È questa dunque *l'unica struttura complessa possibile*, per un gruppo semplice a 10 parametri. Poiché d'altra parte, dal punto di vista *fisico*, e anche dal punto di vista dei *gruppi topologici*, ci interessa la *struttura reale* del gruppo (considerandosi allora isomorfi due gruppi, soltanto quando si può stabilire una corrispondenza tra gli elementi *reali* dei gruppi stessi, con le note proprietà), resta allora da indagare soltanto la distinzione delle strutture dei gruppi semplici, *dal punto di vista reale*, entro l'unica struttura *complessa* di Os^{10}_{5}. Ma la determinazione effettiva delle varie strutture reali, corrispondenti a una stessa struttura complessa, appartenente a una delle quattro grandi categorie A, B, C, D di Cartan, è stata già data da questo autore [9] e, nel nostro caso si trova che, alla stessa struttura complessa di Os^{10}_{5}, corrispondono *tre strutture reali isolate*, di gruppi semplici *reali*, e cioè:

1ª quella Os^{10}_{5} del gruppo di tutte le trasformazioni *ortogonali reali*, che lasciano invariata la somma dei 5 quadrati (segnatura $5 + 0$), e individua un gruppo topologico *compatto*;

2ª quella Os^{10}_{4+1} del gruppo (non compatto) di tutte le trasformazioni pseudoortogonali reali, che lasciano invariata la forma (19), di segnatura $4 + 1$;

3ª quella Os^{10}_{3+2} del gruppo (pure non compatto) di tutte le trasformazioni pseudoortogonali reali, che lasciano invariata la somma di 3 quadrati meno la somma degli altri 2 (segnatura $3 + 2$).

Arriviamo con ciò alla conclusione importantissima che, *anche dal punto di vista reale*, la struttura del gruppo semplice Fn^{10}_{3+1} o Os^{10}_{4+1} *è isolata*, e quindi che *tale gruppo non può essere limite di alcun altro gruppo continuo a 10 parametri*; esso infatti non potrebbe esser limite che di un gruppo *a esso isomorfo*, dal punto di vista reale, che individuerebbe quindi *la stessa varietà* V_{10} *immagine* e *lo stesso gruppo aggiunto* (a meno di un cambiamento di variabili), che sono l'*ambiente* e il *gruppo*, che hanno senso fisico.

Per questo gruppo Fn^{10}_{3+1} Os^{10}_{4+1} non può dunque più ripetersi quanto è accaduto col gruppo di Galilei e col gruppo di Lorentz, avendo toccato, per così dire, il fondo di tutte le posssibilità.

In successivi lavori mostreremo poi come si possano determinare gli operatori fisici, e in particolare le grandezze quantiche fondamentali del nostro universo, assumendo questo gruppo finale Fn^{10}_{3+1} come gruppo *base* per definirvi l'uguaglianza, in sostituzione dei gruppi limiti precedenti.

(9) Cfr. E. CARTAN, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, «Journ. de Math.», vol. 8, 1929, e specialmente parte 4ª, n. 28, p. 30 e sg.

Fisica teorica. – *Sulla teoria quantistica di interazioni non locali.* Nota (*) del Corrisp. G. WATAGHIN.

Recentemente (1) abbiamo ripreso in esame un metodo (2) di derivazione delle interazioni non locali, partendo dall'espressione di una densità « hamiltoniana » o « lagrangiana » locale e sostituendo in ogni prodotto di operatori di due campi locali:

$$\psi(x)\,A(x) = \iint \psi(x')\,d^4x'\,\delta^4(x'-x)\,\delta^4(x-x'')\,d^4x''\,A(x'')$$

[ove x indica il punto $(x_0\,x_1\,x_2\,x_3)$ e $\delta^4(x) = \delta(x_0)\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)$] l'operatore di Dirac $\delta^4(x)$ con un « fattore di forma » $D(x)$.

Si può ottenere lo stesso risultato partendo dalla rappresentazione dei campi locali nello spazio dei momenti: ogni componente di Fourier $\psi_k = C_k\,e^{ikx}$ di un campo si trasforma in $C_k\,e^{ik\xi}\int e^{ik\eta}\,F(\eta)\,d^4\eta = C_k\,G(k)\,e^{ik\xi}$ ove: $x = \xi + \eta$.

Abbiamo mostrato come si possono definire gli operatori $G(k)$ nel sistema del centro di masse delle particelle incidenti (in un determinato processo di collisione) in funzione degli invarianti di collisione: $I' = (k_\nu - P_\nu)\,u^\nu$; $J' = (k_\nu - P_\nu)(k^\nu - P^\nu)$; $m_0^2 = P_\nu P^\nu$; ove $P_\nu = p'_\nu + p''_\nu$ è il tetravettore momento totale e $u_\nu = \frac{1}{m}P_\nu$ è il tetravettore velocità del baricentro.

Ponendo $a^2 = I'^2 - J'$ e ricordando che nel sistema del centro di masse (C) si ha: $a^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = (k_1 - P_1)^2 + (k_2 - P_2)^2 + (k_3 - P_3)^2$, abbiamo proposta la scelta seguente di G:

$$G = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(al)^{-3/2}\,J_{3/2}(al) = \frac{3\,[\sin(al) - al\cos(al)]}{(al)^3}$$

ove l è la lunghezza universale [$l \sim 10^{-13}$ cm] e $h = c = 1$. Il fattore di forma corrispondente a questa scelta di G è: $F = \delta(\eta_0) f(\eta_1\,\eta_2\,\eta_3)$ ove $\eta_\mu = x_\mu - \xi_\mu$, e $f(\eta_1\,\eta_2\,\eta_3)$ è una costante non nulla entro un dominio sferico $|\vec{\eta}| \leq l$ e zero per $|\vec{\eta}| \geq l$.

Nella presente Nota ci proponiamo di completare il formalismo delle « interazioni non locali ». Partendo (come in (3)) dalla considerazione di un termine generico S_n della matrice S, procediamo ad ordinare nel tempo le varie integrazioni e a decomporre i termini in componenti di frequenza positiva e negativa. Per semplicità, le nuove regole del calcolo saranno formulate, per un dato processo di collisione, nel sistema baricentrico C delle particelle incidenti.

(*) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) « Nuovo Cimento », *10*, 1618 (1953).

(2) « Zeitscr. f. Phys. », *88*, 92 (1934).

(3) SCHIROKOV, « Journ. Theor. & Espr. Phys. », *21*, 739 (1951).

Notiamo che il parametro canonicamente coniugato all'energia totale P_o nel sistema C ($P_1 = P_2 = P_3 = 0$) è il tempo proprio s del sistema C. Ricordando la definizione classica delle coordinate del baricentro:

$$m_o \xi_\mu = \sum_n \rho^{(n)} x_\mu^{(n)}$$

ove gli invarianti $\rho^{(n)} = p_\mu^{(n)} u^\mu$ sono le energie $\rho^{(n)} = E^{(n)}$ nel sistema C, si ha: $s = \xi_o = x_o^{(n)}$ ($n = 1, 2, \cdots$), e si ha notoriamente che s e $x_o^{(n)}$ non commutano con $P_o = m_o$. Gli operatori di taglio G e G^2 introdotti in ogni linea interna ed esterna di S_n, impongono già una limitazione sulla durata di alcune interazioni.

Orbene assumeremo che la durata degli stati intermedi (ossia l'intervallo Δs tra due « vertici » del diagramma di S_n) sia limitata anche da un nuovo « operatore di massa », e, in più, da una « vita media minima » $\Gamma \sim l^{-1}$ dello stato virtuale. E precisamente, introdurremo per ogni gruppo di linee che congiungono due vertici un fattore di taglio del tipo

$$\Gamma \left[\left(\sum_k \rho^{(k)} \right) + i\Gamma \right]^{-1}$$

e per ogni stato finale un operatore di massa $g(\eta)$, che opera su coordinate interne η della particella creata, del quale ci occuperemo in una prossima Nota.

L'esistenza delle limitazioni suaccennate nei processi elementari implica l'esistenza di una differenza fondamentale nell'algoritmo che descrive le proprietà del tempo e dello spazio.

Chimica. — *Sullo spettro di assorbimento ultrarosso del sale sodico della 2-pirrolaldeide.* Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e PAOLO MIRONE, presentata (*) dal Socio G. B. BONINO.

È noto che Angelo Angeli (1) aveva fermato la propria attenzione sul fatto, da lui notato per la prima volta, che la così detta aldeide pirrolica fornisce facilmente un sale sodico dal quale l'aldeide di partenza è ricuperabile per semplice spostamento con anidride carbonica. Questo comportamento dell'aldeide pirrolica ordinaria non si riscontra invece per la N-metilpirrolaldeide. Questi risultati erano interpretati da Angeli e Collaboratori come un fortissimo argomento a favore di una forma ossimetilenica per l'aldeide in questione.

Vent'anni dopo anche Hans Fischer, nel suo noto Trattato sul pirrolo (2), pur facendo delle riserve sull'ipotesi di una forma ossimetilenica per l'aldeide pirrolica, sottolineava questa argomentazione sviluppata da Angeli sulla formazione del sale sodico dell'aldeide, argomentazione che a prima vista porta un favorevole contributo al consolidamento di una ipotesi ossimetilenica per il noto composto.

Precedenti ricerche eseguite in questo Istituto sull'aldeide pirrolica non sono state però chiaramente favorevoli all'ipotesi ossimetilenica. Po-

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) ANGELI e ALESSANDRI, « Rend. Accad. Lincei, *23*, 93 (1914).

(2) H. FISCHER e H. ORT, *Die Chemie des Pyrrols*, Leipzig 1934, I. Bd., p. 150.

teva essere pertanto interessante una indagine sul sale sodico della pirrolaldeide, potendo considerarsi plausibile che in tale sale sodico la forma ossimetilenica dovesse venire stabilizzata.

Abbiamo perciò studiato lo spettro ultrarosso d'assorbimento del sale sodico della 2–pirrolaldeide allo stato cristallino. Nell'interpretazione di questo spettro di assorbimento si è cercato soprattutto di chiarire tre punti.

In primo luogo si è indagato se la fenomenologia attribuita precedentemente, nello spettro della 2–pirrolaldeide allo stato cristallino [3], a manifestazioni dell'idrogeno iminico si riproducesse o meno nello spettro del sale sodico dell'aldeide stessa. Infatti i risultati spettroscopici favorevoli alla ammissione della presenza di un immino pirrolico nella pirrolaldeide (per quanto perturbato in azioni « chelative ») parlavano contro all'ipotesi ossimetilenica e perciò, qualora gli stessi fatti spettroscopici si fossero potuti rivelare nello spettro del sale sodico, evidentemente avrebbe perso valore l'interpretazione « imminica » degli stessi e sarebbe stata annullata di conseguenza l'argomentazione sopra riferita contraria ad una forma ossimetilenica. In secondo luogo abbiamo voluto studiare se nello spettro ultrarosso del sale sodico della pirrolaldeide fosse riscontrabile una banda di assorbimento da attribuirsi ad un gruppo carbonilico. In terzo luogo si è voluto indagare se l'assorbimento nell'ultrarosso del sale sodico dell'aldeide pirrolica a lunghezze d'onda superiori ai 6–7 μ (zona dove cadono significative frequenze legate alla struttura del nucleo pirrolico) poteva mostrare particolarità tali da suffragare una modificazione del nucleo pirrolico stesso quale dovrebbe verificarsi passando da una eventuale forma carbonilica della pirrolaldeide ad una forma ossimetilenica.

Il sale sodico della pirrolaldeide è stato preparato seguendo le indicazioni date da Angeli ed Alessandri nel lavoro già citato [1]. Il prodotto appena preparato e lavato con etere anidro si presentava sotto forma di cristallini incolori che venivano finemente macinati in un piccolo mortaio conico con una certa quantità di olio di vaselina, mantenendo il tutto al riparo dalla umidità e specialmente dall'anidride carbonica. La pasta così ottenuta veniva schiacciata fra due lastrine di salgemma e studiata nell'ultrarosso con l'aiuto di uno spettrofotometro Beckman IR2 a registrazione automatica.

La larghezza della fenditura dello spettrometro corrispondeva nello spettro a circa 3 numeri d'onda nella zona attorno a 15 μ e a 5,5 numeri d'onda nella zona attorno a 3 μ.

Nella tabella I riportiamo le lunghezze d'onda e le frequenze dei massimi di assorbimento ultrarosso osservati per il sale sodico della 2–pirrolaldeide allo stato solido in confronto con i dati di assorbimento ottenuti per la 2–pirrolaldeide sia allo stato cristallino, sia in soluzione in solventi organici [3].

In una ultima colonna sono dati i valori dei massimi di assorbimento nell'ultrarosso del pirrolo liquido purissimo [4].

(3) Lavoro in corso di pubblicazione.

(4) R. C. Lord jr., e F. A. Miller, « J. Chem. Phys. », *10*, 328 (1942).

TABELLA I. — *Assorbimento ultrarosso.*

Sale sodico della 2–pirrolaldeide (stato cristallino)		2 – Pirrolaldeide		Pirrolo (puro)
		(stato cristallino)	(soluzione in CCl_4)	
λ (μ)	ν (cm^{-1})	ν (cm^{-1})	ν (cm^{-1})	ν (cm^{-1})
—	—	—	3455 *m*	↑
—	—	3270 *m*	3274 *ff*	
—	—	3125 *m*	3116 *d*	
↑	↑	↑	3094 *d*	
↓	↓	↓	2986 *d*	
			2829 *m*	
—	—	2745 *d*	2753 *d*	
—	—	2690 *dd*	2695 *dd*	
—	—	2630 *dd*	—	
—	—	2575 *d*	—	
—	—	—	2160 *dd*	
—	—	1718 *d*	1721 *d*	
6,23	1605 *f*	1653 *f*	1653 *ff*	
6,35	1575 *f*	1626 *m*	—	
—	—	—	1548 *m*	1531 *f*
7,03	1422 *m*	1447 *f*	1453 *d*	1466 *f*
			1437 *d*	
7,20	1389 *m*	1399 *f*	1406 *f*	1418 *f*
7,38	1355 *m*	1357 *ff*	1355 *f*	1384 *m*
7,55	1324 *f*	1316 *f*	1317 *m*	—
7,93	1261 *m*	—	1297 *d*	1289 *m*
8,40	1190 *f*	—	—	—
8,73	1145 *dd*	1141 *ff*	1139 *m*	1146 *f*
9,32	1073 *d*	1095 *f*	1094 *m*	1076 *ff*
			1086 *d*	
9,55	1047 *m*	1050 *ff*	1039 *f*	1047 *ff*
9,68	1033 *d*	1025 *d*	—	1015 *ff*
—	—	1000 *dd*	—	—
10,32	969 *d*	961 *d*	—	—
11,29	886 *d*	—	883 *d*	884 *d*
—	—	864 *f*	↑	869 *m*
12,84	779 *m*	—		839 *d*
13,04	767 *m*	—		—
13,27	754 *f*	754 *ff*		—
—	—	740 *f*	↓	734 *ff*

Con ciò riesce più facile un confronto per le discussioni che seguono.

Discussione dei risultati. – Nello spettro ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide solida manca del tutto qualsiasi banda riferibile alla oscillazione di valenza di gruppi NH o OH.

È pure da notare che la banda a circa 8,75 μ (1140–1145 cm^{-1}), che è molto intensa nello spettro della 2–pirrolaldeide solida, risulta debolissima e quasi trascurabile nello spettro del sale sodico dell'aldeide.

Tale banda può avere una duplice origine, come hanno sostenuto Lord e Miller [4]. Attribuendo cioè al nucleo pirrolico una simmetria di tipo C_{2v} i detti Autori americani farebbero cadere a 1145 cm^{-1} circa sia la frequenza relativa alla oscillazione totalsimmetrica di pulsazione dell'anello pirrolico, oscillazione di tipo A_1 (capace di dare quindi una riga Raman intensa e polarizzata), sia la frequenza di una oscillazione antisimmetrica di tipo B_1 che corrisponde sostanzialmente ad una oscillazione di deformazione dell'immino pirrolico nel piano della molecola. Questa oscillazione è certamente attiva in ultrarosso ed è ragionevole che debba comparire anche con una banda molto intensa. Nel pirrolo non sostituito la forte riga Raman polarizzata a circa 1140 cm^{-1}, trovata da tutti gli Autori che hanno studiato questo spettro, è certamente da attribuirsi in primo piano alla oscillazione totalsimmetrica di tipo A_1 dell'anello pirrolico. Però è da osservarsi che il suo grado di depolarizzazione trovato da Reitz [5] è di 0,18, ed è forse un po' alto per una riga che corrisponda puramente ad una oscillazione totalsimmetrica. Questo valore un po' alto del coefficiente di depolarizzazione potrebbe far dubitare che detta riga sia « inquinata » da un'altra riga di pari frequenza ma assai meno intensa e riferibile ad una oscillazione di tipo B_1, quindi depolarizzata in Raman. Dobbiamo notare a questo proposito che la riga Raman del tiofene che corrisponde alla stessa oscillazione totalsimmetrica di tipo A_1, ha secondo Reitz [5] un grado di depolarizzazione di 0,11 e cioè di quasi il 40 % inferiore rispetto a quello della riga pirrolica. Questo assai basso valore del grado di depolarizzazione sarebbe certamente in accordo con l'ipotesi che la riga in questione nel tiofene sia invece una riga Raman pura corrispondente all'oscillazione totalsimmetrica sovra ricordata.

Nei pirroli sostituiti al carbonio, e specie nei pirroli α–sostituiti, la riga Raman a 1140 cm^{-1} scompare o è assai attenuata, e quest'ultimo fatto sarebbe da attendersi per una componente B_1 che ipoteticamente cadesse nello stesso punto dello spettro. Per l'aldeide pirrolica in soluzione tale riga Raman a 1140 cm^{-1} è molto debole, mentre non appare nello spettro Raman dell'aldeide solida. Viceversa appare intensa nello spettro ultrarosso dell'aldeide allo stato cristallino.

È significativo vedere che invece la banda a 1140 cm^{-1} manca nello spettro ultrarosso dell'N–metilpirrolo dove appunto manca il gruppo N–H [6].

(5) A. W. Reitz, « Z. f. Phys. Chem. », *B 38*, 275 (1938).

(6) P. Mirone e A. M. Drusiani, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (VIII), *16*, 483 (1954).

Nella zona dello spettro dove compaiono oscillazioni legate alla presenza di legami multipli, lo spettro ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide mostra un intenso doppietto a 6,23–6,35 μ. Esso corrisponde a un analogo doppietto che si riscontra nello spettro ultrarosso della 2–pirrolaldeide cristallina ed è spostato, rispetto a quest'ultima, di circa 50 cm^{-1} verso le più basse frequenze. Nel caso della 2–pirrolaldeide in soluzione il doppietto (che si trova nell'aldeide cristallina a 6,05 e 6,15 μ) si riduce al solo massimo a minor lunghezza d'onda e cioè a 6,05 μ.

Detta banda, per ragioni che abbiamo già discusso, può considerarsi come legata al gruppo carbonilico C = O: pertanto anche nel sale sodico della 2–pirrolaldeide dovrebbe ritenersi presente un gruppo carbonilico, per quanto fortemente perturbato. Il legame ossigeno–carbonio sarebbe dunque anche qui multiplo e non un legame semplice come si dovrebbe verificare in una forma ossimetilenica. Tutt'al più si potrebbe interpretare l'abbassamento della frequenza osservata come legato ad una ulteriore diminuzione dell'indice di legame π del C = O, dovuto ad una più intensa delocalizzazione del doppio legame carbonilico stesso.

Lo spettro ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide nella zona delle maggiori lunghezze d'onda, e cioè nella zona delle frequenze più caratteristiche per le oscillazioni del nucleo pirrolico, è molto simile allo spettro della pirrolaldeide allo stato cristallino e quindi a quello della pirrolaldeide in soluzione. Pertanto non si trovano ragioni atte a suffragare l'ipotesi che nel sale sodico della 2–pirrolaldeide il nucleo pirrolico si trovi in condizioni strutturisticamente diverse da quelle che competono alla 2–pirrolaldeide non salificata, sia allo stato cristallino come allo stato di soluzione. È da notare poi che le principali frequenze di oscillazione caratteristiche del nucleo pirrolico nel pirrolo ordinario compaiono quasi tutte nello spettro ultrarosso dell'aldeide pirrolica e del suo sale sodico.

Si può osservare che nell'aldeide pirrolica e nel suo sale sodico manca la banda a circa 1530 cm^{-1} che, a parere di Lord e Miller [4], dovrebbe corrispondere ad una oscillazione antisimmetrica della simmetria C_{2v} del nucleo pirrolico. Questa frequenza, di cui si trova traccia anche negli spettri dei pirroli alchilati, scompare però negli spettri dei pirroli tipici sostituiti con atomi o gruppi coniugabili all'anello pirrolico.

Concludendo lo spettro ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide ci porta a questi risultati:

a) assenza delle manifestazioni attribuibili ad un gruppo N — H quali appaiono nello spettro dell'aldeide pirrolica non salificata;

b) perfetta analogia tra gli spettri della aldeide pirrolica e del suo sale sodico per ciò che concerne le bande eventualmente riferibili ad oscillazioni di un gruppo carbonilico perturbato;

c) analogia tra gli spettri ultrarossi della pirrolaldeide e del suo sale sodico per ciò che riguarda le principali righe nucleari riferibili all'anello pirrolico e riscontrabili nei pirroli tipici sostituiti.

Mineralogia. — *Sintesi, proprietà cristallografiche e strutturali del composto* Co_2SiO_4 (*tipo dell'olivina*). Nota di Paolo Gallitelli e Mario Cola, presentata (*) dal Corrisp. P. Gallitelli.

Nel quadro di un complesso di ricerche sulla sintesi di alcuni gruppi di silicati, che si sta svolgendo nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena, parve opportuno riprendere la preparazione degli ortosilicati di cobalto e di nichel, allo scopo di definire nel modo più completo possibile le proprietà cristallografiche, fisiche e strutturali di questi composti ed i loro rapporti con l'olivina, così diffusa in alcune rocce terrestri e nelle meteoriti. Nella presente Nota vengono esposti i risultati ottenuti nella sintesi dell'olivina di cobalto: Co_2SiO_4.

La sintesi dell'ortosilicato di cobalto era già stata ottenuta dal Bourgeois (1889) riscaldando in un forno Perrot miscele di CoO, $CoCl_2$ e silice.

Il prodotto ottenuto si presentava come una massa micro-cristallina riconoscibile come tale solo con l'uso del microscopio. Noi abbiamo ripreso questa preparazione con l'intento di fissare le condizioni di formazione del Co_2SiO_4 ed in particolare di preparare cristalli di dimensioni sufficienti per poterne eseguire uno studio il più completo possibile.

In questa preparazione abbiamo impiegato un forno a muffola riscaldato da 4 bacchette di silit–cesiwid disposte in serie. La temperatura veniva misurata con una coppia termoelettrica platino platino–rodio.

I prodotti ottenuti sono stati identificati per mezzo degli spettrogrammi di Debye e delle analisi chimiche, non trascurando tuttavia, quando è stato possibile, anche le osservazioni cristallografiche ed ottiche.

Le sintesi che ci hanno dato i migliori risultati partivano da miscele di CoO, $CoCl_2 \cdot 2H_2O$ ed acido silicico precipitato, aventi la seguente composizione:

1° 1 mol CoO : 2 mol $CoCl_2$: 3 mol SiO_2

2° 2 mol $CoCl_2$: 2 mol SiO_2.

La prima preparazione è stata effettuata in crogiolo di porcellana coperto. La temperatura è stata portata a 1000° C alla velocità di 2° al minuto primo e mantenuta a 1000° per 2 ore; il forno fu quindi raffreddato lentamente.

La seconda preparazione è stata effettuata con le stesse modalità; la massa reagente è stata però compressa in pastiglia. Il rendimento quantitativo è risultato molto superiore nel secondo caso.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

In altre prove la proporzione del CoO e del $CoCl_2$ è stata variata in tutto il campo di rapporti relativi fino al CoO puro; la quantità di silice variava dal leggero eccesso sulla massa stechiometrica a 10 volte la massa stessa. La formazione di ortosilicato di cobalto è stata osservata sempre per temperature superiori ai 900°, unitamente a piccole quantità di Co_3O_4 [1].

Ferma restando la temperatura a 1000° si è osservato che il $CoCl_2$ reagisce con la silice meglio che non il CoO, dando cristalli che raggiungono anche mm. $0,3 \times 0,2 \times 0,1$; mentre un aumento della silice provoca la formazione di cristalli di Co_2SiO_4 di dimensioni estremamente piccole.

Abbiamo variato inoltre il ciclo termico: se si opera tra 1000° e 900° il rendimento in Co_2SiO_4 diminuisce considerevolmente anche se si aumenta il tempo di reazione; operando a temperature superiori ai 1000° e fino a 1250° aumenta la formazione di Co_2SiO_4, ma i cristalli non risultano né di maggiori dimensioni né più perfetti.

Si è presa in considerazione altresì l'aggiunta di $CaCl_2$ come fondente. Il $CaCl_2$, in quantità fino al 5 % della massa reagente, non fa aumentare sensibilmente le dimensioni dei cristalli e non porta alla formazione di nuovi prodotti; per quantità molto maggiori si nota la formazione di $CoCaSiO_4$, composto analogo alla monticellite $MgCaSiO_4$, che verrà descritto in una prossima Nota (Cola, 1954) [2].

L'analisi chimica è stata effettuata su campioni provenienti da diverse preparazioni, previo lavaggio con alcali concentrato a freddo [3] onde sciogliere la maggior parte della silice in eccesso. Contrariamente a quanto asserisce il Bourgeois (1889), con questo trattamento non siamo riusciti ad ottenere una massa totalmente esente da silice libera; abbiamo perciò determinato la silice combinata col metodo consigliato dal Treadwell (1935). Il cobalto è stato determinato elettroliticamente sul filtrato della silice.

Ecco i valori ottenuti:

	Calcolato per $2CoO \cdot SiO_2$	osservato
CoO	71,39	70,86
SiO_2	28,61	28,87
	100,00	99,73

All'esame morfologico i cristalli, rombici, non pleocroici, si presentano di colore dal violetto al roseo a seconda delle dimensioni, e con abito simile a quello dell'olivina. Quando si adotti l'orientazione proposta dallo Strunz (1949) per questo minerale, i nostri cristalli appaiono appiattiti lungo

(1) Il Co_3O_4 si forma per riscaldamento in corrente di aria umida del cloruro (Gorgeu, 1885).

(2) Ringraziamo la sig.na Lidia Muratori che ha collaborato alla esecuzione di queste preparazioni.

(3) L'alcali concentrato caldo attacca il silicato.

l'asse y. I più grandi da noi ottenuti hanno lunghezza di 0,3–0,4 mm. secondo l'asse di allungamento x, di 0,1–0,2 mm. lungo l'asse z.

I cristalli sono limitati comunemente da prismi $(0kl)$ e $(h0l)$ e dal pinacoide (001). Date le loro piccole dimensioni e la scabrosità delle facce non si sono potute eseguire misure complete. Su qualche cristallino meglio formato si è misurato l'angolo fra le facce del prisma {011} (che sono le più sviluppate) trovando un valore di circa 50°, che concorda abbastanza bene con il valore noto per la forsterite (49° 51′, Dana, 1914).

Gli indici di rifrazione non si sono potuti misurare col metodo del prisma date le troppo esigue dimensioni dei cristalli. Col metodo di Becke sono risultati superiori a 1,80. Una sezione orientata, portata alla piattaforma universale, ci ha permesso di misurare l'angolo assiale ottico $2V = 63°$, usando semisfere di indice = 1,649, e di osservare che la bisettrice dell'angolo acuto $2V$ è α, quindi la birifrazione è negativa. L'orientazione della indicatrice è risultata inoltre $\alpha = z$; $\beta = y$; $\gamma = x$, e corrisponde a quella degli altri termini della serie isomorfa dell'olivina.

Oltre che attraverso l'analisi chimica, la identificazione dell'ortosilicato di cobalto è stata eseguita confrontando le distanze d, ricavate dagli spettrogrammi di polveri, con i valori riportati nell'indice ASTM per l'olivina. Inoltre, con la medesima camera e nelle identiche condizioni sperimentali, abbiamo effettuato anche spettrogrammi di una olivina poco ferrifera, esistente nel Museo di Mineralogia dell'Università di Modena.

Nella Tabella I sono riportate, nella colonna 1, le misure eseguite sulla olivina poco ferrifera, nella 2 i valori tratti dall'indice ASTM per l'olivina, nella 3 le misure eseguite su una delle nostre migliori preparazioni.

Le distanze d sono corrette per lo spessore della pellicola e per lo spessore del preparato; le intensità dei nostri spettrogrammi sono state stimate a vista attribuendo il valore 100 alla riga più intensa.

La coincidenza dei valori d ottenuti per il Co_2SiO_4, sia con quelli della olivina poco ferrifera sia con quelli riportati nell'indice ASTM per l'olivina, è pressoché perfetta, e i piccoli scarti rientrano ampiamente negli errori sperimetali.

Si osserva che nello spettrogramma del Co_2SiO_4 compare qualche riga in più. Fra queste, la interferenza a 4,04 Å può attribuirsi alla cristobalite (è infatti la più intensa per questa sostanza e compare ancora più forte negli spettrogrammi delle preparazioni effettuate con grande eccesso di silice); quelle a 4,37 Å ed a 2,59 Å, che sono state osservate anche sui Weissenberg del Co_2SiO_4, risultano, dalla simboleggiatura di questi spettrogrammi, dovute rispettivamente a (011) ed a (004).

Le costanti della cella elementare sono state calcolate dalle misure effettuate su spettrogrammi di cristallo rotante intorno agli assi [100], [010], [001] e relativi Weissenberg equatore.

TABELLA I.

Spettrogrammi di polvere.

Radiazione FeKα (media α_1 e α_2) $\lambda = 1{,}9373$ Å; $2r = 71{,}62$ mm.

1 Olivina poco ferrifera	2 Olivina ASTM		3 Co_2SiO_4	
d	I	*d*	I	*d*
5,10	60	5,10	30	5,16
			20	4,37
			40	4,04
3,87	70	3,89	30	3,90
3,73	40	3,72	10	3,76
3,48	60	3,49	70	3,53
2,99	50	3,01	10	3,01
2,76	80	2,77	100	2,79
			20	2,59
2,51	90	2,52	60	2,53
2,45	90	2,46	95	2,46
2,34	40	2,35	30	2,38
2,26	80	2,27	40	2,28
2,16	50	2,17	10	2,17
	30	2,03	20	2,05
	20	1,96	20	1,94
	20	1,88	10	1,89
	10	1,80	30	1,79
1,74	100	1,75	70	1,75
1,67	30	1,67	30	1,68
1,63	30	1,64	40	1,65
1,62	30	1,62	40	1,62
			40	1,60
1,57	30	1,57	20	1,58
1,49	60	1,50	50	1,50
1,47	60	1,48	20	1,49
	30	1,44	10	1,44
1,39	50	1,40	30	1,40
			40	1,39
1,35	50	1,35	20	1,35
1,31	40	1,32	30	1,32
	20	1,30	20	1,30
	10	1,25	10	1,26
	10	1,19	20	1,19
	20	1,17	30	1,17
			10	1,16
1,14	20	1,14	20	1,14
1,09	10	1,10	10	1,10
			30	1,08

La esatta centratura dei cristalli, che per le loro piccole dimensioni e l'imperfezione delle facce non è stata possibile al goniometro, si è ottenuta solo impiegando spettrogrammi di cristallo oscillante, con il metodo di Dragsdorf (1953). Per queste esperienze non sono d'altronde impiegabili cristalli di più grandi dimensioni di quelli da noi usati (massima dimensione 0,1 mm), causa il fortissimo assorbimento che il Co_2SiO_4 presenta per la radiazione del FeK da noi impiegata.

Le costanti, come media di parecchie misure effettuate sia sui rotanti, sia sulle serie dei pinacoidi presenti nei Weissenberg, utilizzando le FeK_α e le FeK_β, sono risultate:

$$a_o = 5{,}99 \text{ Å}$$
$$b_o = 4{,}77 \text{ Å}$$
$$c_o = 10{,}27 \text{ Å}.$$

Il rapporto parametrico da esse calcolato è:

$$1{,}256 : 1 : 2{,}154.$$

Un controllo delle costanti si è ottenuto dalla simboleggiatura degli spettrogrammi di polvere; ne abbiamo dedotto che i valori sopra riportati sono affetti da un errore massimo probabile di $\pm$ 0,01 Å.

I valori della costanti della forsterite, della fayalite e di alcuni termini intermedi della serie isomorfa vengono riportati nella Tabella II per confronto:

TABELLA II.

	x	a_o	b_o	c_o	
Co_2SiO_4		5,99	4,77	10,27	
$(Mg_{1-x}, Fe_x)_2SiO_4$ . .	0,02	5,990	4,730	10,195	(1)
	0,08	5,990	4,760	10,220	(1)
	0,175	6,010	4,770	10,245	(1)
	0,68	6,065	4,79	10,335	(1)
	0,96	6,09	4,82	10,48	(1)
	0,10	5,985	4,755	10,21	(2)

(1) (WINCHELL, 1950).
(2) (BRAGG and BROWN, 1926).

Il peso specifico calcolato dalle dimensioni della cella elementare – quando si assuma per il Co_2SiO_4 la stessa struttura delle olivine, con quattro molecole nella cella (Bragg and Brown, 1926) – è di 4,74 gr/cm^3, in buon accordo con il peso specifico trovato dal Bourgeois (1889) di 4,63 gr/cm^3.

Sugli spettrogrammi di Weissenberg [001], [010], [100], si è eseguita la statistica degli indici delle interferenze presenti. Le estinzioni sono tutte e solo quelle caratteristiche del gruppo spaziale *Pnma* al quale appartengono anche gli altri termini della serie delle olivine.

Ci è grato ringraziare la Fondazione «Massimo de Giacomo» che ha messo a disposizione di uno di noi (M. C.) una borsa di studio per ricerche sulla Minerogenesi.

Bibliografia.

Bourgeois L. (1889), *Sur la preparation des ortosilicates de cobalt e de nickel cristallisés*, « Compt. Rend. », *108*, 1177.

Bragg W. L. and Brown G. B. (1926), *Die Struktur des olivins*, « Zeit. Krist. », *63*, 538.

Cola M. (1954), *Sintesi e proprietà cristallografiche, ottiche e strutturali del composto* $CoCaSiO_4$, *tipo monticellite*.

Dana E. S. (1914), *The system of Mineralogy*, Sixth Edition, p. 450. Wiley & Sons, New York.

Dragsdorf R. D. (1953), *Crystal alignment on the Weissenberg goniometer*, « Acta Cryst. », *6*, 220.

Gorgeu A. (1885), *Sur le suroxide de cobalt*: Co_3O_4, « Compt. Rend. », *100*, 175.

Strunz H. (1949), *Mineralogische Tabellen*, 2 Aufl, p. 181. Geest & Portig, Leipzig.

Treadwell F. P. (1935), *Trattato di Chimica Analitica*, vol. II, IV Ed. Ital. sulla 11ª Tedesca, p. 537. Vallardi, Milano.

Winchell H. (1950), *Preliminary report on the lattice constants of olivines*. « Amer. Crystallogr. Abstr. Meeting », April 10–12, p. 14 (riassunto in « Structure Reports », vol. 13, p. 368).

Fisiologia. — *L'azione dell'acetilcolina sul ciclo dell'eccitabilità del miocardio in rapporto ai processi di sommazione meccanica delle contrazioni* (*). Nota di Igino Spadolini, Aldo Giachetti e Luigi Spadolini, presentata (**) dal Corrisp. I. Spadolini.

È noto da ricerche antiche e recenti (Mines, 1913 (1); Burridge, 1920 (2); Adrian, 1920 (3); Fiddes, 1928 (4); I. e L. Spadolini, 1951 (5), ecc.) che il ciclo della eccitabilità del miocardio è suscettibile di variare notevolmente nella sua durata totale e nelle sue singole fasi in rapporto a condizioni le più differenti.

Ordinariamente, nel cuore *in situ* dei bassi vertebrati l'intervallo ottimo fra i singoli battiti può anche essere di diversi secondi, ma è sufficiente la semplice perfusione con il liquido di Ringer per constatare che accelerandosi il battito il ciclo diventa notevolmente più breve.

La posizione della fase di massima risposta nel diagramma della rivoluzione cardiaca può però variare anche spontaneamente nel cuore *in situ* per condizioni che molto spesso ci sfuggono.

È noto ancora che le contrazioni premature, cui si attribuisce il nome generico di extrasistoli, possono avere altezza diversa rispetto alle singole sistoli primarie in rapporto alla fase del ciclo cardiaco in cui esse si manifestano. Può accadere, infatti, che dopo una sistole normale il periodo di massima eccitabilità e quindi di completo ristabilimento si riscontri nella fase di

(*) Lavoro eseguito con contributi del C.N.R. nel Laboratorio di Fisiologia umana dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) G. R. Mines, « J. Physiol. », *46*, 1 (1913); ibidem, *46*, 188 (1913).

(2) W. Burridge, « J. Physiol. », *54*, 248 (1920–21).

(3) E. D. Adrian, « J. Physiol. », *54*, 1 (1920–21).

(4) J. Fiddes, « Quart. J. exp. Physiol. », *19*, 243 (1928).

(5) I. e L. Spadolini, « Arch. Fisiol. », *50*, 138 (1951).

riposo (o diastolica) oppure nella fase stessa di decontrazione, ma può anche manifestarsi all'acme della sistole primaria e prima ancora. È stata prospettata la possibilità che in tal caso la sommazione che può derivarne riveli per il muscolo cardiaco un contrasto con la legge del T. o N. (come viene comunemente accettata) poiché la sommazione fra due o più battiti richiede la liberazione di ulteriori quote di energia che il primo stimolo, appena un istante prima, non era evidentemente stato capace di attuare.

Sta il fatto, che anche nel cuore gli effetti di stimoli insorgenti a frequenza opportuna possono giungere meccanicamente a sommarsi proprio come avviene nella fibra scheletrica (tetano del miocardio).

Dalle osservazioni che alcuni di noi (I. e L. Spadolini) hanno compiuto proprio sul tetano del cuore risulta che la sommazione può stabilirsi con un notevole accorciamento del periodo refrattario e che nel meccanismo della contrazione cardiaca grande importanza sembra spettare sia al metabolismo endogeno acetilcolinico della fibra miocardica, sia ad una certa concentrazione degli ioni calcio nei liquidi intra ed extra-cellulari. Il primo fattore appare dominare, con la durata del periodo refrattario, tutto il ciclo contrattile; il secondo sembra concorrere a determinare una certa sostenutezza al processo contrattile.

Nel quadro delle nostre più recenti ricerche sull'impiego dell'acetilcolinesterasi come metodo di studio della funzione difasica che l'acetilcolina svolge nel miocardio (Spadolini e Giachetti, 1953 [6]), abbiamo voluto indagare come si comporti il ciclo dell'eccitabilità e della contrattilità in cuori che venivano sottoposti ad una perfusione con estratti dotati di energica attività acetilcolinesterasica in modo da giungere a disturbare quelli equilibri che regolando la formazione endogena di acetilcolina rendono possibili quelle condizioni che sono atte al determinarsi di fenomeni sommatori.

Le osservazioni fatte su quei preparati ventricolari di *Bufo vulgaris* i quali, appena sottoposti alla perfusione con liquido di Ringer, mostrarono immediatamente di possedere le caratteristiche proprietà sommatorie rivelano che il ciclo dell'eccitabilità ivi ha raggiunto le durate più brevi tanto che la fase di maggior risposta additiva (che potrebbe anche corrispondere ad una fase di supernormalità in vista del fatto che l'altezza raggiunta dalla seconda contrazione è spesso maggiore della prima) si verifica ancor più presto che sia terminato il periodo contrattile della sistole primaria o appena che questa ha raggiunto la sua maggiore altezza.

Man mano che il secondo stimolo si allontana dalla sommità della prima contrazione, cui si constata corrispondere il periodo di massima eccitabilità del preparato, la seconda contrazione raggiunge livelli sempre meno elevati. In tale circostanza la progressiva diminuzione di altezza della seconda contrazione, che si associa ad una sempre più imperfetta fusione fra le due scosse, sembra conciliarsi con l'ipotesi della non adeguata attività di un fattore che

(6) I. Spadolini e A. Giachetti, « Arch. Fisiol. », *52*, 329, (1953).

va in parte distruggendosi nel breve periodo che viene a separare i due successivi eccitamenti (ved. fig. 1).

Non è quindi improbabile che il fenomeno sommatorio in questione abbia a base determinati equilibri che giungono a stabilirsi fra l'azione idrolitica dell'esterasi e la liberazione di acetilcolina da complessi inattivi per l'effetto di stimoli i più svariati.

Che l'acetilcolina possegga un compito importante anche nel mantenere la polarizzazione della membrana della fibra muscolare ad un certo livello è dimostrato dalle modificazioni che si stabiliscono nel potenziale d'azione allorché si

Fig. 1. – Risposta del miocardio ventricolare di anfibio a stimoli che si succedono con cadenza diversa.

Si noti che in questo preparato la fase di seconda maggior risposta si verifica prima che sia terminato il periodo contrattile della sistole primaria.

Con l'instaurarsi del processo di sommazione delle prime 2–3 contrazioni si manifesta un aumento di voltaggio dei singoli pp. di a. Al termine della sommazione (cfr. tracciato D) si constata una oscillazione lenta finale (indicata da una freccia) che esprime un *debito di ripolarizzazione*.

Ventricolo isolato di *Bufo vulgaris*, irrorato alla Straub e guidato da scariche di un impulsatore elettronico.

Registrazione dell'elettrogramma e del meccanogramma con oscillografo Cossor a doppio raggio e camera chimografica Grass.

Derivazione ditopica dalla superficie del terzo inferiore del ventricolo con elettrodi impolarizzabili infissi. Preamplificatore Grass, Mod. P 4 A.; ampl. 5 mV/cm; velocità della carta: 25 mm/sec.

In alcuni tracciati il solo artefatto è indicato da un punto.

svolge il processo della sommazione. Modificazioni che si concretano in una ipersincronia caratteristica per cui i potenziali d'azione si elevano notevolmente di altezza con andamento nettamente equifasico. Sembra che il processo di ripolarizzazione durante la sommazione non giunga mai a completarsi fra un eccitamento e l'altro, tanto che alla fine di un tetano di una certa durata si nota (in derivazione ditopica) una cospicua e lenta oscillazione finale che ci esprime un *debito di ripolarizzazione* che viene pagato proprio alla fine del tetano (fig. 1).

A comprovare l'importanza che spetta all'acetilcolina nel processo della sommazione abbiamo studiato in questi preparati cardiaci particolarmente adatti l'influenza esercitata dalla perfusione di estratti contenenti acetilcolinesterasi.

Per ciò che concerne il meccanogramma l'azione del fermento deve essere distinta in due periodi che si susseguono nel tempo (ved. fig. 2).

1° Un primo periodo, che può dirsi di *iperattività contrattile*, è contrassegnato dall'elevarsi notevolmente in altezza delle singole contrazioni che

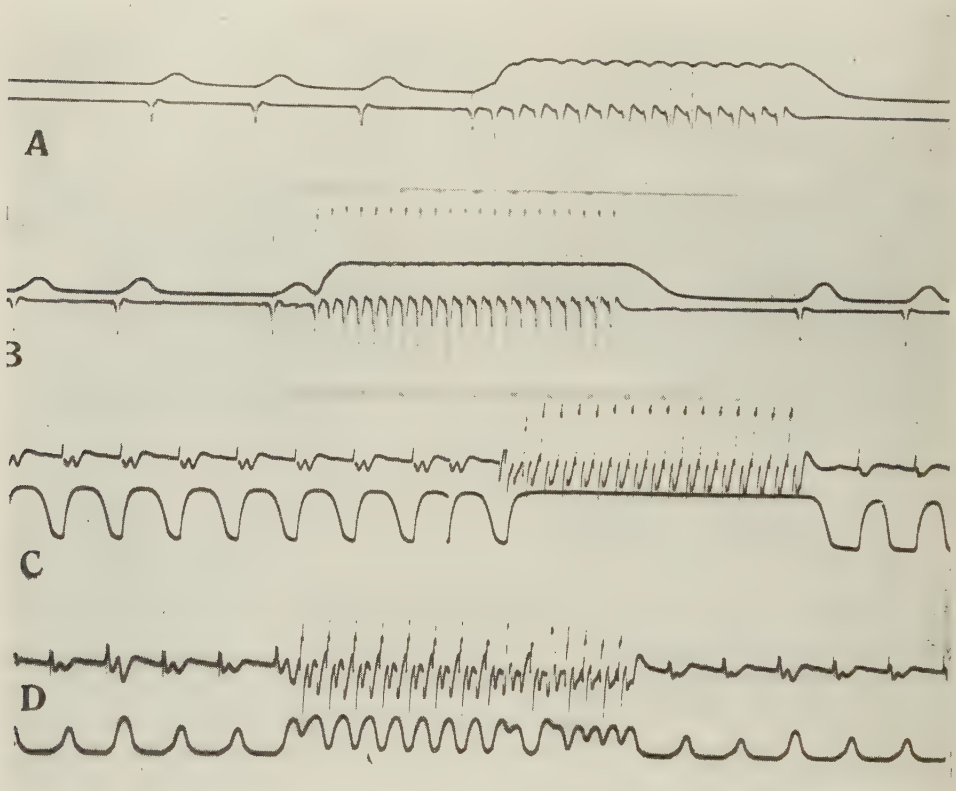


Fig. 2. – Azione dell'acetilcolinesterasi sul tetano del miocardio ventricolare di anfibio.

A) e B) Il processo di sommazione normale esaminato nei suoi aspetti meccanici ed elettrici.
Si noti la notevole sincronizzazione dei pp. di a. durante il tetano.

C) Lo stesso preparato nella fase di *iperattività contrattile* corrispondente al primo periodo dell'azione colinesterasica. Il tetano si manifesta come una semplice fusione delle singole contrazioni; permane la sincronizzazione dei pp. di a.

D) Fase di *deficienza contrattile*, caratteristica di una prolungata azione esterasica. I singoli battiti sono irregolari e diminuiti di altezza; alla stessa frequenza di stimolazione il miocardio ha perduto anche la capacità di fondere insieme le singole contrazioni.
Si noti la comparsa di manifesti segni di desincronizzazione nei pp. di a.
Tra B) e C) il preparato viene perfuso per 10 min con Ringer contenente colinesterasi preparata dall'organo elettrico di *Torpedo marmorata*.
In C) e D) è stata alquanto aumentata l'intensità dello stimolo.

manifestano i caratteri di risposte massimali T. o N. Infatti, anche opportune frequenze di stimolazione non portano più alla sommazione ma soltanto alla semplice fusione dei singoli battiti, onde il meccanogramma non giunge mai a presentare ulteriori incrementi di altezza.

Inoltre, con l'elevarsi in altezza della contrazione si prolunga assai il periodo sistolico in modo che compare, all'acme di ciascuna contrazione, un evidente *plateau* che a giudicare dall'elettrogramma concomitante è caratte-

rizzato dal permanere di una elevata negatività postuma. Sembra che in tali condizioni il *deficit* di ripolarizzazione costituitosi alla fine di un certo periodo di stimolazione sia rilevante a desumerlo dall'ampiezza dell'onda lenta con cui termina il processo di fusione delle singole scosse.

Tali interessanti reperti sembrano confermarci nella ipotesi che in molte condizioni tendenti alla sommazione il cuore non batte spontaneamente col massimo vigore che gli potrebbe derivare dalla somma di energia potenziale che esso possiede, ma pulsa a più bassi livelli energetici mantenuti tali da un lieve eccesso di acetilcolina che si produce nel metabolismo endogeno della fibra miocardica e che determina sulla contrattilità del muscolo effetti relativamente inibitori. Tale eccesso di acetilcolina abbrevia d'altra parte il periodo refrattario determinando quella fase di ipereccitabilità che concorre a rendere possibile il processo stesso della sommazione. Questo primo periodo di iperattività contrattile, corrispondente ad un progressivo accentuarsi della velocità d'idrolisi dell'acetilcolina, sarebbe l'espressione dell'ormai ben noto effetto motore esplicato direttamente sul miocardio dalle piccole concentrazioni di tale sostanza, effetto del quale uno di noi (I. Spadolini) ha dato ampia documentazione e sul quale interessanti ipotesi sono state oggi prospettate da diversi autori.

2° Il secondo periodo dell'azione esterasica sul preparato ventricolare isolato è caratterizzato non solo da fenomeni di *deficienza* contrattile, per cui il battito va diminuendo più o meno rapidamente di altezza, ma dall'estinguersi anche della capacità a fondere insieme le singole contrazioni allorché si eleva la frequenza di stimolazione. Il ciclo dell'eccitabilità appare, infatti, ritardato in tutte le sue fasi, né più si apprezza l'esistenza di un periodo supernormale. Insomma, il preparato tende a ripresentare quella assai lunga ineccitabilità periodica che si riscontra nel cuore *in situ*, sebbene l'altezza delle singole contrazioni appaia notevolmente diminuita.

Il tempo di latenza si accresce notevolmente e il potenziale di azione, che nelle prime fasi di questo secondo periodo manteneva, durante il processo di fusione delle singole scosse, lo stesso elevato voltaggio e lo stesso andamento difasico che accompagna la contrazione tetanica, finisce in seguito per manifestare evidenti segni di desincronizzazione.

Da questi esperimenti risulta confermata l'ipotesi che il processo della sommazione in genere e la contrazione tetanica che anche nel cuore ne è l'espressione più concreta sono principalmente riferibili a particolari modalità con cui spontaneamente o sperimentalmente si giungono a spostare gli equilibri che regolano la formazione endogena di acetilcolina nel miocardio normalmente pulsante. Modalità che incidono sulla contrattilità del substrato muscolare e sul ciclo della sua eccitabilità.

Gli effetti inotropi motori o inibitori che possono venire evocati e la differente durata del periodo refrattario dipendono essenzialmente dalla concentrazione di acetilcolina presente nell'effettore in un certo momento e quindi dalla velocità con cui reciprocamente giungono a svolgersi sotto frequenze

opportune di stimolazione la scissione enzimatica da un lato e la formazione del principio attivo dall'altro.

In base a tutte le ricerche compiute in questo Laboratorio intorno a tale argomento ci sembra ormai possibile giungere alle seguenti conclusioni:

a) la produzione di acetilcolina rappresenta un processo metabolico essenziale della fibra miocardica da cui dipende la contrazione ed il ritmo contrattile;

b) le risposte del tipo T. o N., che noi intendiamo unicamente riferire (come del resto è comunemente inteso) alle unità microscopiche (fibre miocardiche e protofibrille) e non alle unità di ordine molecolare del muscolo cardiaco (i cosiddetti *autoni* di Szent–Gyorgyi), praticamente occorrono per stimoli più o meno distanziati nel tempo. Esse sono da attribuire alle modalità con cui è attivato il metabolismo acetilcolinico ed in particolare all'effetto di concentrazioni di sostanza attiva che tendono a subire un decremento immediato e pressoché totale dopo aver raggiunto ad ogni battito un certo livello. Finché non si modifica opportunamente questo ciclo metabolico dell'acetilcolina, l'effetto meccanico di uno stimolo non giunge mai a sommarsi col successivo. Tali condizioni implicano un periodo refrattario che, relativamente alla frequenza del battito, è sempre piuttosto lungo tanto da facilitare la periodicità del ritmo.

A questo tipo di risposte sono da ascrivere tutti i ritmi autonomi che dipendono dai *pace–makers* cardiaci allorché questi si svincolano da ogni regolazione estrinseca.

c) le risposte graduate, invece, siano esse positive o negative, sono l'espressione di modificazioni del metabolismo acetilcolinico che conducono ad ogni battito ad incrementi graduali del principio attivo con i relativi effetti sullo stato contrattile; se tali modificazioni contemporaneamente si associano ad un notevole accorciamento del periodo refrattario, possono anche giungere a sommare i loro effetti (tetano) allorché sussista una opportuna frequenza di stimolazione.

Alle risposte graduate sono da ascrivere tutte le modificazioni dei ritmi autonomi indotte dal governo nervoso centrale a mezzo del vago e del simpatico.

A tali conclusioni largo appoggio ha fornito l'impiego dell'acetilcolinesterasi. Con questo mezzo si è, oggi, potuto dimostrare che molte manifestazioni contrattili le quali si svolgono nel miocardio e nel cui determinismo si identificano gli stessi meccanismi di regolazione nervosa estrinseca di natura vagale sono, sotto diversi aspetti, intimamente legate al metabolismo acetilcolinico della fibra miocardica: dal battito a lungo periodo diastolico che ha tutte le apparenze di una risposta massimale (T. o N.), alle contrazioni graduate tipo *scala* o a quelle sperimentali di tipo tetanico con sommazione più o meno completa dei singoli battiti. Nel maggior numero dei casi è soltanto attraverso contrazioni di tipo graduato che anche nel cuore si giunge a liberare tutta l'energia meccanica che allo stato di energia chimica potenziale può trovarsi a disposizione in un certo periodo di tempo nella fibra miocardica.

Fisiologia. — *L'azione della acetilcolinesterasi sul cuore isolato di mammifero* (« *Cavia cobaja* ») (*). Nota di IGINO SPADOLINI ed ALDO GIACHETTI, presentata (**) dal Corrisp. I. SPADOLINI.

In questi ultimi anni diversi sperimentatori hanno dimostrato di interessarsi vivamente al meccanismo di azione dell'acetilcolina e di ciò fanno fede alcune relazioni di un Simposio tenutosi a Stoccolma alla fine di 1952. Le varie ipotesi prospettate concernono in particolare quella azione difasica di questo principio attivo sulla quale sono in corso da molti anni ricerche in questo Laboratorio: azione difasica che, mentre da parte nostra venne verificata e studiata su diversi organi della vita vegetativa a struttura muscolare, sia liscia come il tubo gastroenterico, sia striata come il cuore, è stata invece da molti altri sperimentatori più particolarmente osservata e indagata nei sistemi di trasmissione sinaptica, a livello sia della placca motrice che delle sinapsi intergangliari.

Le nostre ricerche sul miocardio ventricolare hanno in special modo formato l'oggetto di molte Note in proposito; poiché si è visto che in questo muscolo l'acetilcolina svolge non solo il compito di mediatore dell'impulso nervoso vagale ma anche quello, fondamentalmente forse più importante, di ormone endocellulare regolatore del battito e del ritmo cardiaco. Tale principio attivo, sia come mediatore nervoso che come regolatore del battito, possiede azione nettamente difasica in funzione (a parità di condizioni) della concentrazione che esso raggiunge nella sede di azione.

Secondo qualcuna di tali recenti ipotesi (Schaefer *et al.* (1)) l'azione difasica dell'acetilcolina devesi ricercare in processi di inibizione e di eccitazione della colinesterasi, così reciprocamente associati che non sarebbe concepibile una eccitazione senza una contemporanea inibizione. Il prevalere dell'uno o dell'altro effetto antagonista sarebbe strettamente dipendente dalle costanti della cinetica enzimatica. Ancora un passo avanti in dette ipotesi è stato fatto da Župančič (2) il quale identifica il recettore cellulare, su cui agisce la sostanza attiva, con il fermento stesso colinesterasico. Ci piace qui di ricordare che il primo a ritenere di dovere identificare il recettore cellulare con un fermento è stato, in questo Laboratorio, il dott. Peruzzi, il quale ammise nello stesso enzima la presenza di gruppi attivi ad affinità differente capaci di essere influenzati da concentrazioni diverse di sostanza attiva. L'azione di molti

(*) Lavoro eseguito con contributi del C.N.R. nel Laboratorio di Fisiologia umana dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) W. HARDEG, W. RAULE, und H. SCHAEFER, « Acta Physiol. Scandin. », *29*, 50 (1953).

(2) A. O. ŽUPANČIČ, « Acta Physiol. Scandin. », *29*, 63 (1953).

veleni enzimatici, che agiscono a diluizioni estreme e con effetto difasico in rapporto alla concentrazione (proprio come avviene per l'acetilcolina), venne assunta a modello onde interpretare l'azione difasica di questo principio attivo [3].

Secondo Župančič, l'eccitazione della cellula avverrebbe durante la transitoria combinazione della colinesterasi con l'acetilcolina e l'azione si estinguerebbe con la completa idrolisi della sostanza attiva.

È stato opportuno accennare a queste recenti vedute sul meccanismo di azione dell'acetilcolina perché esse tendono a convalidare l'interpretazione data da tempo a molti dei nostri risultati sperimentali, tra i quali sono appunto da porsi anche quest'ultimi che formano oggetto della presente Nota.

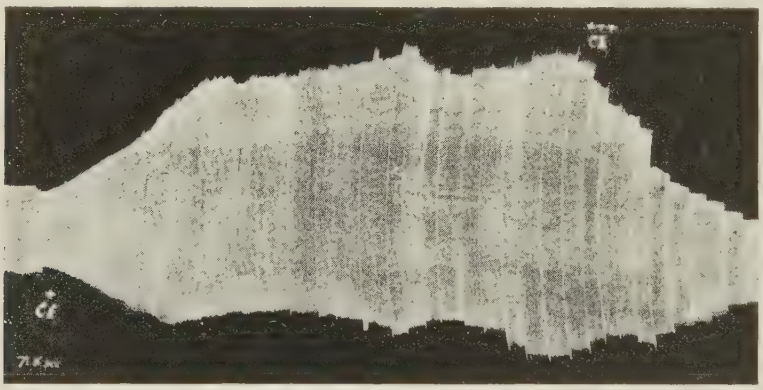


Fig. 1. – Azione della colinesterasi sull'attività meccanica del cuore di cavia isolato e perfuso alla Langerdorff.

Notevole effetto eccitomotore determinato da piccole concentrazioni di fermento (CE+). Dopo qualche tempo (circa 40 min.) che detto effetto era in atto, per un aumento della concentrazione di esterasi (CE+++) si osserva una progressiva diminuzione del battito ed anche l'arresto per una ostacolata formazione endogena di acetilcolina cui sembra spettare il compito di regolatore del battito e del ritmo cardiaco.

Abbiamo voluto riprendere in esame la questione dell'effetto motore delle piccole concentrazioni di acetilcolina sul cuore di cavia isolato e perfuso alla Langerdorff nell'apparecchio di Spadolini. Effetto, come ormai si sa anche per esperienza di molti altri ricercatori, che solo in certe circostanze, non bene identificabili, è possibile di porre in evidenza. Assai spesso il trattamento con acetilcolina, a qualsiasi concentrazione attiva venga impiegata non esercita sul cuore e particolarmente sul ventricolo che una risposta unidirezionale inibitrice, più o meno pronunciata. Si ricorda in proposito che l'effetto difasico sul miocardio ventricolare è caratterizzato da una imponente azione motrice per diluizioni che da 10^{-9} circa possono giungere fino a 10^{-16}, da nessun effetto per concentrazioni intermedie e da effetti inibitori per concentrazioni relativamente più elevate.

(3) P. Peruzzi, « Boll. Soc. it. Biol. sp. », *22*, 428 (1946).

Le ricerche già eseguite sul cuore isolato di *Bufo vulgaris* (I. Spadolini e A. Giachetti, 1953 [4]) hanno permesso di gettare qualche luce sulle oscure condizioni necessarie al determinismo di questo particolare comportamento difasico. Si è visto che non è la concentrazione assoluta di acetilcolina impiegata che determina il segno positivo o negativo della risposta, ma la concentrazione che di essa viene in definitiva a realizzarsi nell'effettore a livello dei recettori cellulari. E ciò in dipendenza dal fatto che alla quantità di sostanza impiegata nell'esperimento si aggiunge sempre l'acetilcolina che si libera incessantemente nel tessuto miocardico, in rapporto al suo gradiente metabolico.

Che nel metabolismo endogeno della fibra miocardica si generi incessantemente acetilcolina può considerarsi un fatto ormai bene accertato di cui non può essere ignorata l'importanza.

Ora noi crediamo che in diverse circostanze, specie nei mammiferi, la formazione endogena di acetilcolina non pervenga a raggiungere quei livelli che rappresentano un limite massimo per l'estrinsecarsi dell'effetto motore; quindi l'aggiunta al liquido di perfusione di minime quantità di sostanza può determinare, in rapporto ad una più elevata concentrazione e quindi ad una maggiore attivazione del substrato contrattile, l'evolversi di un eccitamento atto ad elevare l'ampiezza del battito talvolta fino del triplo. Se però si oltrepassa detto limite si raggiungono facilmente le concentrazioni che evocano, talvolta criticamente, un effetto inibitore.

Si è pensato quindi che occorrerebbe deprimere nel miocardio dei mammiferi la formazione endogena di acetilcolina per constatare con molta maggiore frequenza l'effetto motore di questa sostanza, allorché piccole quantità ne vengono aggiunte al liquido di perfusione del cuore.

Tali condizioni sono state realizzate mercé l'impiego di una attiva acetilcolinesterasi con cui il cuore è stato perfuso ed i risultati ottenuti ci appaiono oggi (per ciò che concerne il cuore isolato di mammifero) estremamente dimostrativi per l'ipotesi prospettata e quindi di particolare interesse per la fisiologia generale del miocardio.

Come lo dimostrano i tracciati allegati l'impiego della colinesterasi (estratta dall'organo elettrico di *Torpedo marmorata*) ci ha permesso di porre in evidenza con molta facilità e costanza l'effetto motore delle piccole concentrazioni di acetilcolina, dimostrandoci che anche negli organismi più elevati esiste un metabolismo acetilcolinico spontaneo del muscolo cardiaco da cui appare dipendere l'automatismo contrattile della fibra miocardica e la possibilità di una sua regolazione difasica ad opera del S.N.C. a mezzo dei n. vaghi. Il metabolismo e quindi la formazione di acetilcolina nel muscolo cardiaco sembra infatti notevolmente accelerata dagli impulsi vagali onde la classica azione inibitrice del vago si presenta come il risultato di un fenomeno di facilitazione esplicantesi sulla produzione endogena di acetilcolina. L'effetto inibitore, in altre parole, non consisterebbe dunque che in una liberazione *in eccesso* del principio attivo.

(4) I. SPADOLINI e A. GIACHETTI, « Arch. Fisiol. », *52*, 329 (1952).

Come si è detto, l'effetto motore oltre ad essere assai spesso imponente può prolungarsi molto nel tempo finché si manifestano, almeno in apparenza, fenomeni di fatica che indipendentemente dalle concentrazioni di acetilcolina in atto portano ad una diminuzione dell'ampiezza del battito. Che ciò avvenga in realtà lo dimostra l'applicazione ulteriore di acetilcolina che è capace di accentuare detta diminuzione. Segno evidente che la formazione del principio attivo nel tessuto trovavasi ancora ad un livello relativamente elevato tanto da provocare per nuova aggiunta di sostanza ulteriori effetti inibitori.

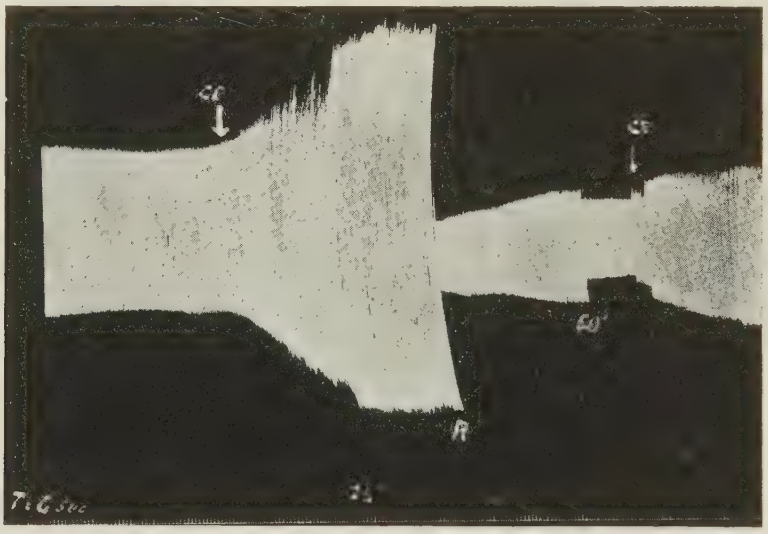


Fig. 2. – Effetto eccitomotore determinato dalla perfusione del cuore di cavia con colinesterasi (CE).

La sostituzione della soluzione contenente il fermento con solo liquido di Ringer (R) porta ad una notevole diminuzione dell'attività cardiaca, la quale mostra di ristabilirsi allorché si perfonda nuovamente l'organo con colinesterasi.

Il notevole prolungarsi dell'effetto motore ha aspetti assai caratteristici. Quando si proceda a sostituire del liquido di Ringer fresco alla soluzione di colinesterasi, l'altezza del battito rapidamente si attenua; però a poco a poco il battito torna di nuovo ad ampliarsi sorpassando talvolta di molto l'altezza cui esso era giunto sotto l'azione del fermento esterasico.

Con detta sostituzione si giunge anche a provocare l'arresto completo del cuore: arresto che si può sempre determinare con una soluzione di acetilcolina ancor che il battito, dopo il lavaggio, non sia giunto ad arrestarsi.

Questi dati ci confortano nel ritenere che la formazione endogena di sostanza attiva in equilibrio con un certo effetto motore venga disturbata dal lavaggio dell'organo con la soluzione salina. Ed in questa come in molte altre circostanze detta formazione sembra avvenire in eccesso. Infatti, se alla

perfusione con solo Ringer che ha provocato una inibizione del battito si sostituisce nuovamente la perfusione con acetilcolinesterasi le pulsazioni tornano ad ampliarsi o a ripristinarsi se erano cessate.

L'effetto motore provocato dall'esterasi è inibito dalla eserina, in rapporto alla sua ben nota azione anticolinesterasica, mentre permane, seppure più o meno ridotto dopo atropina.

Questo reperto non giunge nuovo poiché si è già in precedenza avuto occasione di rilevare che l'effetto motore acetilcolinico è molto meno sensibile all'atropina di quello inibitore. Ed è solo con una forte atropinizzazione del cuore che può essere tolta di mezzo ogni risposta eccitomotrice.

Tale differente risposta all'atropina dei due effetti antagonistici della acetilcolina rivela forse una notevole complessità dei recettori cellulari anche nel caso che questi possano essere identificati con la colinesterasi.

Si tratta di una inibizione da sostanze estranee (Fremdhemmungen) che anche lo Schaefer separa nettamente dalle cosidette inibizioni autogene (Autokatastasen). Le prime avrebbero sempre un'azione assai complessa per i molteplici punti di attacco che i diversi farmaci trovano sui recettori cellulari. Ma su questo punto intendiamo riprendere la discussione dopo aver sottoposto ad un esame critico le teorie attualmente prospettate per spiegare il meccanismo di azione difasica dell'acetilcolina.

Merita, infine, di rilevare che anche sul cuore dei mammiferi l'azione a lungo continuata della colinesterasi provoca una diminuzione della forza di contrazione del cuore, diminuizione che va progressivamente aumentando (fig. 1) sebbene molto più lentamente di quello che si osserva negli anfibi, ove l'arresto del battito da eccitamenti spontanei sinusali si stabilisce assai spesso molto rapidamente.

L'inibizione da prolungata azione esterasica deve interpretarsi come un *deficit* più o meno duraturo nella formazione endogena di questo bioregolatore che è l'acetilcolina. In tali circostanze, infatti, l'aggiunta di tale sostanza può ristabilire o migliorare gradatamente il ritmo contrattile del miocardio, come è stato anche osservato da Bulbring e Burn.

Nota. — Gli estratti da noi adoperati furono preparati con la consueta tecnica proposta da Augunstinshon ed utilizzata in genere da tutti gli sperimentatori. Non abbiamo avuto la possibilità di disporre di colinesterasi pura, per le difficoltà attuali di acquisto. Si tratta dunque di estratti relativamente greggi che contengono certamente molte sostanze, fra le quali sali di ATP. Nei nostri esperimenti però noi abbiamo valutata l'attività posseduta da tali estratti, indipendentemente dalla loro attività esterasica.

Dai dati ricavati, sia esterinizzando gli estratti ed il liquido di perfusione del cuore, sia disattivando gli estratti stessi col calore, ci siamo potuti convincere che sebbene qualche effetto di scarso rilievo tali estratti presentino, tuttavia riteniamo che le nostre conclusioni siano veramente attendibili per i dati di sicuro rilievo da cui esse sono state dedotte.

Ringraziamo vivamente il prof. A. Razzauti, Direttore del Laboratorio di Biologia marina di Livorno per averci forniti cortesemente gli esemplari viventi di *Torpedo marmorata*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine.* Nota I di SILVIO CINQUINI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

In una Memoria in collaborazione con altro autore (1) ci siamo occupati di una forma più ampia del problema di Cauchy relativo all'equazione a derivate parziali

$$(a) \qquad \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right),$$

e abbiamo stabilito sia teoremi di esistenza, sia teoremi di unicità, i quali forniscono un'estensione, all'equazione (a), di quell'ordine di idee che C. Carathéodory ha sviluppato per le equazioni differenziali ordinarie.

Si tratta ora di introdurre tale ordine di idee nello studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali del tipo

$$(b) \qquad \frac{\partial z_j(x,y)}{\partial x} = f_j\left(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y), \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial z_r(x,y)}{\partial y}\right),$$
$$(j = 1, 2, \cdots, r),$$

cominciando a occuparci dell'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy relativo a tale sistema.

Tale questione sembra presentare difficoltà piuttosto serie, perché, anche se ci limitiamo alla teoria classica e prendiamo in considerazione quelle ricerche di A. Haar (2) che a noi paiono particolarmente significative, troviamo un risultato relativo a un sistema lineare (vale a dire di primo grado nel complesso delle derivate parziali), il quale è stato raggiunto sotto condizioni di derivabilità che sono ben lontane da quella ampiezza di ipotesi che è già stata realizzata per l'equazione (a).

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) M. CINQUINI CIBRARIO, S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. (« Annali di Matematica pura e applicata », T. XXXII, pp. 121–155 (1951)). Tale lavoro verrà indicato, nel seguito, con Memoria A. M.; S. CINQUINI, *Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. (Questi « Rend. », vol. XI, pp. 255–259 (1951); M. CINQUINI CIBRARIO, S. CINQUINI, *Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$ (« Annali della Scuola normale superiore di Pisa », vol. VI, pp. 187–243 (1952)).

(2) A. HAAR, *Ueber Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen.* « Atti del Congresso internazionale dei matematici di Bologna del 1928 », T. III, pp. 5–10).

Ciò premesso, per proseguire secondo l'ordine di idee che abbiamo già sviluppato nei riguardi dell'equazione (a), è da supporre per le funzioni $f_j(x, y, z_1, \cdots, z_r, q_1, \cdots, q_r)$, che figurano nei secondi membri delle equazioni del sistema (b), soltanto una condizione di Carathéodory, relativa alle variabili $z_1, \cdots, z_r, q_1, \cdots, q_r$, con coefficienti che sono funzioni della variabile x quasi continue e integrabili [3], mentre come soluzioni del sistema (b) si considerano r–ple di funzioni $z_1(x, y), \cdots, z_r(x, y)$, ognuna delle quali: 1° è continua assieme alla propria derivata parziale del primo ordine rispetto a y; 2° per ogni y fissato è funzione assolutamente continua della sola x; e si intende che, su ogni parallela all'asse x, le r-ple considerate soddisfino al sistema (b) per quasi tutti i valori di x.

Nell'intento di dare un risultato semplice e espressivo, nella presente ricerca cominciamo a considerare il caso particolare in cui nel secondo membro di ciascuna delle equazioni (b) compare una sola derivata parziale rispetto alla variabile y, e precisamente quella della stessa funzione, di cui figura nel rispettivo primo membro la derivata parziale rispetto a x. Il teorema di unicità che abbiamo stabilito [4] è dato al n. 1 della presente Nota, mentre la sua dimostrazione è basata su un lemma (pubblicato nella Nota II), relativo a un sistema di disuguaglianze, il quale viene studiato facendo appello soltanto a delicate considerazioni di teoria delle funzioni di variabile reale mediante un procedimento approssimativo, che abbiamo ripetutamente sviluppato nel caso dell'equazione (a) e che viene ulteriormente raffinato.

Soggiungiamo che mediante considerazioni già usate per l'equazione (a) da altri autori (in particolare da M. Volpato), anche per il sistema in questione si potrà ottenere qualche estensione del nostro risultato.

1. TEOREMA. – *Sia* $L(x)$ *una funzione quasi continua, integrabile e non negativa nell'intervallo* $(0, a_0)$, *(con* $a_0 > 0$*), siano* b_1, b_2 *due numeri reali con* $b_1 < b_2$, *e sia* a *il massimo valore non superiore ad* a_0, *tale che per ogni* x *con* $0 \leq x < a$ *sia verificata la disuguaglianza*

$$\int_0^x L(u)\,du < \frac{b_2 - b_1}{2},$$

e si consideri il campo D *definito dalle disuguaglianze*

$$\mathrm{D}: \qquad 0 \leq x \leq a \quad , \quad b_1 + \int_0^x L(u)\,du \leq y \leq b_2 - \int_0^x L(u)\,du .$$

Siano $f_j(x, y, z_1, \cdots, z_r, q_j)$, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ r *funzioni definite per ogni* (x, y) *del campo* D *e per ogni* $(r+1)$*-pla di numeri reali* $z_1, \cdots, z_r, q_j$,

(3) Nella presente Nota e nella successiva l'integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue.

(4) Tale teorema ha formato oggetto di una comunicazione tenuta al X Congresso internazionale dei matematici (Amsterdam, settembre 1954).

e siano $\varphi_j(y)\,(j=1,2,\cdots,r)$ *r funzioni continue, insieme con le loro derivate del primo ordine, nell'intervallo* (b_1, b_2).

Si supponga che esistano r^2 *funzioni* $H_{j,i}(x)$, $(j, i = 1, 2, \cdots, r)$ *quasi continue, integrabili e non negative in* $(0, a)$ *in modo che su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse x siano verificate per quasi tutti i valori di x e per tutte le coppie di* $(r+1)$*–ple* $(z_1^{[1]}, \cdots, z_r^{[1]}, q_j^{[1]})$, $(z_1^{[2]}, \cdots, z_r^{[2]}, q_j^{[2]})$, *le disuguaglianze*

$$(1)\qquad |f_j(x, y, z_1^{[1]}, \cdots, z_r^{[1]}, q_j^{[1]}) - f_j(x, y, z_1^{[2]}, \cdots, z_r^{[2]}, q_j^{[2]})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{r} H_{j,i}(x)\,|z_i^{[1]} - z_i^{[2]}| + L(x)\,|q_j^{[1]} - q_j^{[2]}|, \qquad (j=1,2,\cdots,r).$$

Sotto queste ipotesi esiste al più un'unica r–pla di funzioni $z_1(x, y), \cdots, z_r(x, y)$, *ognuna delle quali nel campo* D: 1° *è continua assieme alla propria derivata parziale del primo ordine rispetto a y;* 2° *per ogni y fissato, è funzione assolutamente continua della sola x; le quali, su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse x, soddisfano per quasi tutti gli x al sistema di equazioni*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} = f_1\left(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y), \dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial y}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z_r(x,y)}{\partial x} = f_r\left(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y), \dfrac{\partial z_r(x,y)}{\partial y}\right), \end{cases}$$

e inoltre verificano le condizioni iniziali

$$(3)\qquad z_1(0, y) = \varphi_1(y), \cdots, z_r(0, y) = \varphi_r(y).$$

Il teorema enunciato è conseguenza immediata del lemma del n. 5 (pubblicato nella Nota II): infatti se $\bar{z}_1(x, y), \cdots, \bar{z}_r(x, y)$; $\bar{\bar{z}}_1(x, y), \cdots, \bar{\bar{z}}_r(x, y)$ sono due soluzioni del sistema (2) soddisfacenti, oltreché alle (3), a tutte le altre condizioni dell'enunciato del presente numero, posto

$$z_j(x, y) = \bar{z}_j(x, y) - \bar{\bar{z}}_j(x, y), \qquad (j = 1, 2, \cdots, r),$$

le funzioni $z_1(x, y), \cdots, z_r(x, y)$ verificano le ipotesi del citato lemma, e quindi risulta in tutto D

$$\bar{z}_j(x, y) = \bar{\bar{z}}_j(x, y), \qquad (j=1,2,\cdots,r).$$

2. Osservazione I. – Ferme restando tutte le altre ipotesi dell'enunciato del n. 1, se il campo D è costituito dalla striscia

$$0 \leq x \leq a \quad , \quad -\infty < y < +\infty,$$

ove $a = a_0$, e se le funzioni $\varphi_j(y)$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ sono continue, insieme con le loro derivate del primo ordine, per ogni y reale, è evidente [5] che dal teorema del n. 1 segue l'unicità della soluzione in tutta la striscia indicata.

3. OSSERVAZIONE II. – È ovvio che il teorema del n. 1 è valido anche quando le funzioni $f_j(x, y, z_1, \cdots, z_r, q_j)$, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ sono definite per ogni (x, y) del campo D e per ogni $(r+1)$-pla $(z_1, \cdots, z_r, q_j)$ relativa al campo limitato

$$\text{R:} \quad \zeta_1 \leq z_1 \leq \bar{\zeta}_1, \cdots, \zeta_r \leq z_r \leq \bar{\zeta}_r \quad , \quad \chi_1 \leq q_1 \leq \bar{\chi}_1, \cdots, \chi_r \leq q_r \leq \chi_r,$$

ove $\zeta_j < \zeta_j$, $\chi_j < \chi_j$, $(j = 1, 2, \cdots, r)$, intendendosi che le (1) siano soddisfatte per tutte le coppie di $(r+1)$-ple $(z_1^{[1]}, \cdots, z_r^{[1]}, q_j^{[1]})$, $(z_1^{[2]}, \cdots, z_r^{[2]}, q_j^{[2]})$ relative a punti di R, e che in tutto l'intervallo (b_1, b_2) siano verificate le disuguaglianze

$$\zeta_j \leq \varphi_j(y) \leq \bar{\zeta}_j \quad , \quad \chi_j \leq \varphi_j'(y) \leq \bar{\chi}_j, \qquad (j = 1, 2, \cdots, r).$$

4. UN CASO PARTICOLARE. – L'osservazione del numero precedente riesce molto utile nel caso particolare, in cui il sistema (2) è lineare, vale a dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} = g_{1,1}(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y)) \dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} + g_{1,2}(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z_r(x,y)}{\partial x} = g_{r,1}(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y)) \dfrac{\partial z_r(x,y)}{\partial y} + g_{r,2}(x, y, z_1(x,y), \cdots, z_r(x,y)), \end{cases}$$

perché essa mette in luce un'immediata applicazione del teorema del n. 1 (considerato nelle condizioni del citato n. 3) al sistema (2').

Basta supporre che, assieme a $L(x)$, esistano $2r^2$ funzioni $G_{j,i,k}(x)$ $(j, i = 1, 2, \cdots, r\,;\, k = 1, 2)$ quasi continue, integrabili e non negative sull'intervallo $(0, a)$ in modo che su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x siano verificate, per quasi tutti i valori di x e per tutte le r-ple $(z_1, \ldots, z_r)$, $(z_1^{[1]}, \cdots, z_r^{[1]})$, $(z_1^{[2]}, \cdots, z_r^{[2]})$ relative a punti di R, rispettivamente le disuguaglianze

$$|g_{j,1}(x, y, z_1, \cdots, z_r)| \leq L(x), \qquad (j = 1, 2, \cdots, r);$$

$$|g_{j,k}(x, y, z_1^{[1]}, \cdots, z_r^{[1]}) - g_{j,k}(x, y, z_1^{[2]}, \cdots, z_r^{[2]})| \leq \sum_{i=1}^{r} G_{j,i,k}(x) |z_i^{[1]} - z_i^{[2]}|,$$

$$(j = 1, 2, \cdots, r \quad ; \quad k = 1, 2).$$

Infatti, se per $j = 1, 2, \cdots, r$ indichiamo con ξ_j il maggiore dei due numeri $|\chi_j|$, $|\bar{\chi}_j|$, le (1) risultano soddisfatte per

$$H_{j,i}(x) = \xi_j G_{j,i,1}(x) + G_{j,i,2}(x), \qquad (j, i = 1, 2, \cdots, r).$$

(5) Cfr. Memoria M. A., n. 8, pp. 183–186.

Teoria dei numeri. — *Sul pennello di quasi–asintoticità della differenza di interi primi consecutivi.* Nota I di GIOVANNI RICCI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

1. LA QUASI–CONVERGENZA E LA QUASI–ASINTOTICITÀ DELLE SUCCESSIONI. – Seguendo l'uso comune, diremo che una successione crescente $\{n_h\}$ di *interi positivi* ha *densità asintotica* 1 quando è $h/n_h \to 1$ per $h \to +\infty$; perché questo avvenga è necessario e sufficiente che, detto $N(\xi)$ il numero degli interi n_h non superiori a ξ, si abbia $N(\xi)/\xi \to 1$, per $\xi \to +\infty$.

In modo analogo, quando sia $h/n_h \to 0$, per $h \to +\infty$, si dirà che $\{n_h\}$ ha *densità asintotica nulla*; per questo, occorre e basta che sia $N(\xi)/\xi \to 0$.

La successione complementare di una successione a densità asintotica 1 ha densità asintotica nulla.

Per lo studio delle successioni irregolari è utile introdurre le nozioni di « quasi–convergenza », « quasi–limite », « quasi–asintoticità » ecc., secondo le definizioni che seguono.

Considereremo qui successioni a elementi reali.

Diremo che una successione $\{a_n\}$ è *quasi–convergente ad* A, o che a_n, per $n \to +\infty$, *ammette per quasi–limite* A o *quasi–tende ad* A ecc. e scriveremo $\operatorname{qlim}_{n\to+\infty} a_n = A$, oppure $a_n \dot{\to} A$ per $n \to +\infty$ quando, per ogni $\varepsilon > 0$, la successione $n(\varepsilon, h)$ degli indici n pei quali

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

ha densità asintotica 1 (cioè $h/n(\varepsilon, h) \to 1$ per ε fisso e $h \to +\infty$).

È evidente che cosa si debba intendere, in armonia con la definizione precedente, per *successione quasi–divergente* $a + \infty$, ecc. e quale sia il significato da attribuire alle scritture:

$$\operatorname{qlim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \operatorname{qlim}_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad , \quad \operatorname{qlim}_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

$$a_n \dot{\to} +\infty \quad , \quad a_n \dot{\to} -\infty \quad , \quad a_n \dot{\to} \infty \qquad \text{per} \quad n \to +\infty .$$

Sia λ un numero finito: può avvenire che λ sia un valore limite di $\{a_n\}$ e che inoltre per ogni $\varepsilon > 0$, la successione $n(\varepsilon, h)$ degli indici n pei quali $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ *non abbia densità asintotica nulla*; allora, per segnalare questo fatto si dirà che λ è *un valore limite essenziale*. È anche chiaro che cosa si intenda col dire che $+\infty$ (oppure $-\infty$, oppure ∞) è un valore limite essenziale.

È evidente che l'insieme dei valori limiti essenziali (ivi compresi eventualmente $+\infty$ e $-\infty$) è un insieme chiuso; il minimo e il massimo di questi valori limiti essenziali potremo indicarli con

$$\operatorname{qlim\,inf}_{n\to+\infty} a_n \quad , \quad \operatorname{qlim\,sup}_{n\to+\infty} a_n$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

e risulta in ogni caso:

$$\liminf a_n \leqq \operatorname{qlim\,inf} a_n \leqq \operatorname{qlim\,sup} a_n \leqq \limsup a_n .$$

Quando $a_n \dot{\to} A$ è

$$\operatorname{qlim\,inf} a_n = \operatorname{qlim\,sup} a_n = A.$$

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni e sia $b_n \neq 0$ per n abbastanza grande: è noto che a_n è asintotico a b_n, per $n \to +\infty$ (e si scrive $a_n \sim b_n$) quando $a_n/b_n \to 1$, per $n \to +\infty$. Anche questa nozione può essere collegata a successioni parziali di densità nulla. Qui considereremo il caso $b_n > 0$; sono evidenti le modificazioni da effettuare nel caso $b_n < 0$ o in quello più generale, $b_n \neq 0$ (positivo o negativo).

Sia $b_n > 0$ per ogni n, eccettuato al più pei valori n_k di una successione $\{n_k\}$ di densità asintotica nulla; si dirà che a_n *è quasi-asintotica a* b_n, e scriveremo

$$a_n \dot{\sim} b_n , \qquad \text{per} \quad n \to +\infty$$

quando $\operatorname{qlim} a_n/b_n = 1$, cioè $a_n/b_n \dot{\to} 1$; questo significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, la successione $n(\varepsilon , h)$ (dipendente da ε; $h = 1 , 2 , 3, \cdots$) degli indici n pei quali si verifica

$$(1 - \varepsilon)\, b_n < a_n < (1 + \varepsilon)\, b_n$$

ha densità asintotica 1, cioè si verifica $h/n(\varepsilon , h) \to 1$ per ε fisso e $h \to +\infty$.

Diciamo $N(\varepsilon , n)$ il numero degli interi $u \leqq n$ pei quali $(1 - \varepsilon)\, b_u < a_u < (1 + \varepsilon)\, b_u$; allora per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $N(\varepsilon , n)/n \to 1$ per $n \to +\infty$. Quando $a_n \dot{\sim} b_n$ talvolta si dice che a_n *ha l'ordine normale* b_n [1].

2. I PENNELLI DI QUASI-ASINTOTICITÀ. – Sia $\{x_n\}$ una successione e siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due altre successioni a elementi positivi, quando si prescinda da quelli il cui indice n_k descrive una successione di densità asintotica nulla, cioè $\{n_k\}$ con $k/n_{n_k} \to 0$.

Si dirà che la coppia di successioni $\{a_n , b_n\}$ costituisce un *pennello di quasi-asintoticità* per la successione $\{x_n\}$ e scriveremo

$$x_n \dot{\sim} (a_n , b_n), \qquad \text{per} \quad n \to +\infty$$

quando si verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

$$\operatorname*{qlim\,inf}_{n \to +\infty} x_n/a_n = 1 \quad , \quad \operatorname*{qlim\,sup}_{n \to +\infty} x_n/b_n = 1.$$

Questo significa che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

Per ogni $\varepsilon > 0$, la successione $n(\varepsilon , h)$ degli indici n pei quali $(1 - \varepsilon)\, a_n < x_n < (1 + \varepsilon)\, b_n$ ha densità asintotica 1, mentre non hanno densità asintotica 1 né l'una né l'altra delle due successioni $n'(\varepsilon , h)$, $n''(\varepsilon , h)$ degli indici n pei quali rispettivamente è

$$(1 - \varepsilon)\, a_n < x_n < (1 - \varepsilon)\, b_n \quad , \quad (1 + \varepsilon)\, a_n < x_n < (1 + \varepsilon)\, b_n .$$

(1) Vedi per esempio G. H. HARDY–E. M. WRIGHT, *Theory of Numbers*, Oxford, 1938, p. 356.

Il pennello di quasi–asintoticità $\{a_n , b_n\}$ non è univocamente determinato, nel senso che alle due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ potranno in generale sostituirsi due altre successioni $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ tali che non è $a_n \sim c_n$, $b_n \sim d_n$ e neppure $a_n \dot{\sim} c_n$, $b_n \dot{\sim} d_n$ e tuttavia $\{c_n , d_n\}$ potrà risultare ancora un pennello di quasi asintoticità. Tale pennello potrà essere univocamente determinato quando venga fissata una famiglia di successioni ove si debbano scegliere il *bordo inferiore* $\{a_n\}$ *di quasi–asintoticità* e il *bordo superiore* $\{b_n\}$ *di quasi–asintoticità* del pennello $\{a_n , b_n\}$.

Quando sia $x_n \dot{\sim} a_n$ è evidente che *un pennello di quasi–asintoticità* è costituito dalla coppia $\{a_n , a_n\}$ di successioni coincidenti con $\{a_n\}$.

Quando si voglia studiare l'andamento di una successione irregolare, la descrizione di tale andamento può venire affidata a pennelli di asintoticità o di quasi–asintoticità i cui bordi verifichino particolari proprietà atte a rendere espressiva la rappresentazione; per esempio: i bordi siano monotoni, o abbastanza regolari, o esprimibili analiticamente in forma semplice.

Fissata una successione $\{a_n\}$ adatta per il confronto, potrà avvenire che sia

$$x_n \dot{\sim} (\alpha a_n , \beta a_n) \qquad \text{per} \quad n \to +\infty$$

con $0 < \alpha \leqq \beta < +\infty$ e, allora, αa_n e βa_n sono effettivamente un bordo inferiore e un bordo superiore di quasi–asintoticità nel fascio di successioni $\{\xi a_n\}$ $(0 \leqq \xi \leqq +\infty)$; ma potrebbe anche darsi che, per ogni $\xi > 0$ la successione $n'(\xi , h)$ degli indici n pei quali $\xi a_n < x_n$ non abbia densità asintotica 1 e allora converremo di scrivere $x_n \dot{\sim} (0 a_n , \beta a_n)$; o, anche, che per ogni $\xi > 0$ la successione $n''(\xi , h)$ degli indici n pei quali $x_n < \xi a_n$ non abbia densità asintotica 1 e allora converremo di scrivere $x_n \dot{\sim} (\alpha a_n , \infty a_n)$.

Continueremo a chiamare questi enti

$$(0 a_n , \beta a_n) , (\alpha a_n , \infty a_n) , (0 a_n , \infty a_n)$$

pennelli di quasi–asintoticità, sebbene le proprietà che li caratterizzano debbano essere lievemente modificate: queste modificazioni sono evidenti.

Un pennello di quasi–asintoticità (a_n , b_n) si dirà *crescente*, *decrescente*, ecc., *monotono* se tali sono ambedue le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ che ne costituiscono i bordi.

3. Sul pennello di quasi–asintoticità di $p_{n+1} - p_n$. Sia $p_1 , p_2 , p_3 \cdots$ la successione degli interi primi: la successione delle differenze $\{p_{n+1} - p_n\}$ è molto irregolare. Sono note le seguenti disuguaglianze [2]:

$$p_{n+1} - p_n \geqq 2, \text{ per qualunque } n;$$

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\theta} \; (\theta = 48/77 + \varepsilon) \text{ per } n \text{ abbastanza grande};$$

$$p_{n'+1} - p_{n'} < 57/59 \cdot \ln p_{n'} \text{ per infiniti } n';$$

$$p_{n''+1} - p_{n''} > (1/2 - \varepsilon) \frac{\ln p_{n''} \ln \ln p_{n''}}{(\ln \ln \ln p_{n''})^2} \ln \ln \ln \ln p_{n''}, \text{ per infiniti } n''.$$

(2) La prima è ovvia; per la seconda vedi A. E. Ingham, « Quarterly J. of Math. », Oxford series, *8*, 255–266 (1937), per la terza R. A. Rankin, « J. L. M. S. », *22*, 226–230 (1947); per la quarta R. A. Rankin, « J.L.M.S. », *13*, 242–247 (1938).

È da ritenere utile lo studio di $\{p_{n+1} - p_n\}$ dal punto di vista della quasi-asintoticità che trascura automaticamente una successione di irregolarità che abbia densità asintoticamente nulla. In questo ordine di idee sussistono le seguenti proposizioni:

TEOREMA I. – *Non esiste alcuna funzione* $\psi(n)$ *monotona alla quale* $p_{n+1} - p_n$ *sia quasi-asintotica; cioè, per nessuna funzione* $\psi(n)$ *monotona è* $p_{n+1} - p_n \sim \psi(n)$.

TEOREMA II. — *Sia* $(\alpha \ln p_n , \beta \ln p_n)$ *un pennello di quasi asintoticità della successione* $(p_{n+1} - p_n)$, *cioè sia*

$$p_{n+1} - p_n \sim (\alpha \ln p_n , \beta \ln p_n) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq +\infty). \tag{3.1}$$

Le costanti α *e* β *(univocamente determinate) soddisfano alle disuguaglianze*

$$\alpha \leqq 1 - H/\mathcal{C} \quad , \quad \beta \geqq \alpha + 2H/\mathcal{C}, \tag{3.2}$$

dove

$$H = \prod_{p \geq 3} (1 - (p-1)^{-2}) = 0.6601\cdots \text{ } \textit{costante di Shah e Wilson)},$$

$\mathcal{C}$ *coefficiente connesso al metodo di* Viggo Brun; $0 \leqq \mathcal{C} \leqq 16H$.

Si conclude in particolare

$$\alpha \leqq 15/16 \quad , \quad \beta \geqq \alpha + 1/8 \tag{3.3}$$

e si migliora notevolmente, anche per le infinite eccezioni ammissibili, il risultato di P. Erdös–R. Rankin $p_{n'+1} - p_{n'} < 57/59 \cdot \ln p_{n'}$.

TEOREMA III. – *Siano* $\psi_1(n)$ *e* $\psi_2(n)$ *due funzioni monotone e sia*

$$p_{n+1} - p_n \sim (\psi_1(n) , \psi_2(n)); \tag{3.4}$$

allora $\psi_2(n) \to +\infty$ *ed è*

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\psi_1(n)}{\ln p_n} \leqq 1 - H/\mathcal{C}, \tag{3.5}$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\psi_2(n) - \psi_1(n)}{\ln p_n} \geqq 2H/\mathcal{C}. \tag{3.6}$$

Definizione della costante $\mathcal{C}$. – Un teorema di Viggo Brun ci assicura che il numero $Z_\delta^*(\xi ; 2a)$ ($2a$ intero pari $\geqq 2$) degli interi n pei quali è

$$p_{n+1} - p_n = 2a \quad , \quad (1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi \quad , \quad (0 < \delta \leqq 1),$$

soddisfa alla disuguaglianza

$$Z_\delta^*(\xi ; 2a) < c \cdot \prod_{3 \leq p . a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln^2 \xi},$$

essendo c costante (indipendente da ξ , δ , a).

Diciamo c' ogni numero reale e positivo tale che

$$Z_\delta^*(\xi\,;\,2\,a) < c' \cdot \prod_{3 \leq p \leq a} \frac{p-1}{p-2} \frac{\delta\xi}{\ln^2 \xi}\,,$$

per $\xi \geqq \xi_0(c')$ abbastanza grande; ogni c è anche un c'. Denotiamo con $\mathfrak{C}$ l'estremo inferiore dei numeri c': è noto che è $0 \leqq \mathfrak{C} \leqq 16\,H$ (3).

Osservazione. – Il valore esatto di $\mathfrak{C}$ non è noto. Nel caso in cui sia $0 < \mathfrak{C} < H$, la prima delle (3.2) è da sostituire con $\alpha = 0$, e la (3.5) con

$$\liminf_{n \to +\infty} \psi_1(n)/\ln p_n = 0\,.$$

Nel caso in cui sia $\mathfrak{C} = 0$, oltre le sostituzioni predette, è da sostituire alla seconda delle (3.2) $\beta = \infty$ e da sostituire alla (3.6) la seguente relazione

$$\limsup_{n \to +\infty} (\psi_2(n) - \psi_1(n))/\ln p_n = +\infty\,.$$

Geometria. — *Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietà covarianti d'immersione.* Nota di Edoardo Vesentini, presentata (*) dal Socio B. Segre.

1. In un recente lavoro [9] (1) ho provato che *le classi caratteristiche d'omologia della struttura sferica unitaria normale ad una varietà algebrica irriducibile non singolare*, P, *di dimensione* $p > 0$, *immersa in una varietà algebrica, anch'essa irriducibile e non singolare*, V, *di dimensione* $v > p$, *coincidono con le classi di omologia di egual dimensione determinate in* P *dagli elementi dell'inversa della successione covariante d'immersione di* P *in* V ([5], nn. 13–15, pp. 25–29). Da ciò, in base alla nuova definizione delle varietà canoniche di V data da B. Segre in [5] (n. 66, pp. 91–92), discende il teorema enunciato da W. V. D. Hodge secondo il quale *le classi di omologia dell'alternante della successione canonica di* V *coincidono con le classi caratteristiche di omologia di egual dimensione della struttura sferica unitaria tangente a* V.

L'argomentazione induttiva mediante la quale nei nn. 2 e 3 (pp. 201–204) di [9] ho conseguito il primo dei risultati testé enunciati, poggia sulla esistenza di un'ipersuperficie $_1$V di V, irriducibile e non singolare, passante per P; ciò che notoriamente implica delle restrizioni per P e per V (2).

(3) Vedi H. N. Shapiro–J. Warga, «Comm. Pure Appl. Math.», *3*, 153–176 (1950); I. V. Čulanovskiĭ, «Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)», *63*, 491–494 (1948). Per altre informazioni vedi G. Ricci, «Annali Sc. Norm. Pisa» (3), *7*, 133–151 (1953).

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) I numeri entro parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

(2) Cfr. [5], nn. 46–49, pp. 70–74; [6], § 3, pp. 72–76. Tale rilievo mi è anche stato cortesemente segnalato da R. Thom.

Nei nn. 4–6 del presente lavoro elimineremo tali restrizioni, conseguendo così nella sua massima generalità il risultato enunciato. Nel n. 7 mostreremo inoltre come alcune relazioni fra le classi di Chern di una varietà algebrica, enunciate recentemente da R. V. Gankrelidze in [1] discendano in modo pressoché immediato dal teorema di Hodge e da noti risultati di J. A. Todd [8]. I nn. 2 e 3 sono dedicati ad alcune premesse e convenzioni utili per il seguito.

2. Tutti i gruppi di omologia e di coomologia che considereremo nel presente lavoro saranno supposti tacitamente a coefficienti interi. Inoltre indicheremo con il simbolo V anche la classe fondamentale di omologia della varietà algebrica V; ed essendo Q una sottovarietà algebrica di V di dimensione q, indicheremo con lo stesso simbolo Q anche il ciclo di dimensione $2q$ avente per sostegno Q, e la classe di omologia determinata da tale ciclo in V.

Essendo a ed A una classe di coomologia ed una classe di omologia di V, denoteremo con $a \frown \mathrm{P}$ e con $(\mathrm{P}\cdot\mathrm{A})_{\mathrm{V}}$ le classi di omologia di P determinate dal « cup-product » di a e di P e dall'intersezione di A e di P entro V.

Essendo $\mathfrak{B}$ [3] una struttura sferica unitaria di dimensione $2n-1$, avente per base un complesso simpliciale finito e connesso K, denoteremo con $[c(\mathfrak{B}), x]$ il *polinomio caratteristico* $\sum_0^n{}_i\, c^{2i}(\mathfrak{B})\, x^i$ di $\mathfrak{B}$, cioè il polinomio avente per coefficienti le classi caratteristiche di coomologia $c^{2i}(\mathfrak{B})$ di dimensione $2i$ di $\mathfrak{B}$, ed ove $c^0(\mathfrak{B})$ è l'unità u^0 del gruppo di coomologia di dimensione 0 di K. Indicheremo con $[\tilde{c}(\mathfrak{B}), x]$ il polinomio *inverso* del polinomio caratteristico, cioè il polinomio $\sum_0^n{}_i\, \tilde{c}^{2i}(\mathfrak{B})\, x^i$, univocamente determinato da $[c(\mathfrak{B}), x]$, soddisfacente all'identità in x

$$[c(\mathfrak{B}), x] \smile [\tilde{c}(\mathfrak{B}), x] = u^0.$$

Introdotta in V una metrica hermitiana definita positiva, indichiamo con ${}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}\mathfrak{B}$ la struttura sferica unitaria di dimensione $2v-2p-1$ normale a P in V. Essendo $\{\mathrm{P_V}\} = \mathrm{P}_{\mathrm{V},0}(=\mathrm{P}), \mathrm{P}_{\mathrm{V},1}, \mathrm{P}_{\mathrm{V},2}, \cdots$, la successione covariante d'immersione di P in V ([5], n. 13, pp. 25–26), ed essendo $\{\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V}}\} = \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},0}(=\mathrm{P}), \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},1}, \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},2}, \cdots$, la successione inversa di $\{\mathrm{P_V}\}$ ([5], n. 6, pp. 13–15), denoteremo con gli stessi simboli $\mathrm{P}_{\mathrm{V},i}$ e $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},i}$ le classi di omologia di dimensione $2p-2i$ determinate in P dai sistemi di equivalenza $\mathrm{P}_{\mathrm{V},i}$ e $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},i}$, talché il teorema enunciato nel n. 1 equivale ad affermare che

$$c^{2i}({}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}\mathfrak{B}) \frown \mathrm{P} = \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{V},i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, p). \tag{1}$$

(3) Relativamente alla teoria delle strutture fibrate, seguiremo la nomenclatura introdotta da N. STEENROD in [7]; cfr. anche [9] n. 1, pp. 199–200.

3. Sia S un'ipersuperficie irriducibile di una varietà algebrica irriducibile M di dimensione $m > 1$, immersa in uno spazio proiettivo $[w]$ di dimensione w.

Qualora la varietà singolare J di S e la varietà, $N \cap S$, interferenza di S con la varietà singolare N di M, abbiano dimensioni $< m-1$, introdotta nella varietà analitica complessa aperta $M' = M - N$, una metrica hermitiana definita positiva (ad esempio quella indotta in M' dalla metrica dello spazio proiettivo complesso $[w]$), possiamo definire sulla base $S' = S - J - S \cap N$ una struttura sferica unitaria ${}^{M}_{S'}\mathfrak{S}$ di dimensione 1, normale a S' in M. Qualora $\dim J < m-2$ e $\dim (S \cap N) < m-2$, possiamo costruire una triangolazione di S il cui scheletro tridimensionale K^3 sia disgiunto da J e da $S \cap N$. Ripetendo un'argomentazione di S. S. Chern – esposta da K. Kodaira alle pp. 319–320 di [2] e da noi già utilizzata in [9] – si può dimostrare che, se D è un $(2m-2)$–ciclo, avente per sostegno una generica ipersuperficie di M linearmente equivalente a S, il 2–cociclo di S

$$\bar{c}^2(\sigma^2) = I(D, \sigma^2), \tag{2}$$

che in ogni 2–simplesso $\sigma^2 \in K^3$ ha come valore l'indice di Kronecker $I(D, \sigma^2)$ di D e di σ^2, è un 2–cociclo caratteristico di ${}^{M}_{S'}\mathfrak{S}$.

4. Qualora V sia uno spazio proiettivo $[w]$ di dimensione w sufficientemente elevata, è possibile manifestamente determinare in $[w]$ $w-p-1$ ipersuperficie algebriche irriducibili e non singolari, $A_1, A_2, \cdots, A_{w-p-1}$, passanti genericamente per la varietà irriducibile non singolare P, e tali che la varietà algebrica $M^i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{w-p-i} \supset P$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ di dimensione $m^i = p + i$, abbia una varietà singolare N^i per la quale risulti

$$\dim (P \cap N^i) \leqq p - i - 1 \text{ (4)}. \tag{3}$$

Consideriamo la struttura sferica unitaria ${}^{M^{i+1}}_{M'^i}\mathfrak{S}$ di dimensione 1, avente per base la varietà analitica complessa aperta

$$M'^i = M^i - N^i - M^i \cap N^{i+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, p-1),$$

e per fibre i vettori complessi unitari normali a M'^i entro M^{i+1}, e la struttura sferica unitaria ${}^{M^i}_{P'^i}\mathfrak{S}$ di dimensione $2i-1$ avente per base la varietà analitica complessa aperta $P'^i = P - P \cap N^i$ e per fibre i vettori complessi unitari normali a P'^i entro M^i $(i = 1, 2, \cdots, p)$. Poiché $P \cap N^p = \emptyset$, per $i = p$, ${}^{M^i}_{P'^i}\mathfrak{S}$ ha come base P. Mostreremo che

$$c^{2j}({}^{M^p}_{P}\mathfrak{S}) \frown P = \tilde{P}_{M^p, j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, p). \tag{4}$$

(4) [5], n. 49, p. 73.

All'uopo triangoliamo M^p mediante un complesso simpliciale finito e connesso, K, di dimensione $4p$, in guisa che siano soddisfatte le condizioni seguenti: (*i*) la varietà $P \subset M^p$ sia triangolata da un sottocomplesso K_P (di dimensione $2p$) di K; (*ii*) lo scheletro tridimensionale K^3 di K sia disgiunto dalle varietà $M^i \cap N^{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, p-1)$; (*iii*) lo scheletro K_P^{2j-1} $(j = 2, \cdots, p)$ di dimensione $2j-1$ di K_P sia disgiunto dalle varietà $P \cap N^h$ $(h = j-1, j, \cdots, p-1)$.

La struttura sferica unitaria ${}^{M^p}_{P}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}$, restrizione di ${}^{M^p}_{P}\mathfrak{B}$ a K_P^{2j-1} è il *prodotto* delle strutture

$$ {}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}, \ {}^{M^{j+1}}_{M'j}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}, \cdots, {}^{M^p}_{M'p-1}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}. $$

D'altra parte è noto che le classi caratteristiche di dimensioni $\leq 2j$ di ogni struttura sferica $\mathfrak{B}$ sono determinate dalla restrizione di $\mathfrak{B}$ allo scheletro di dimensione $2j-1$ del complesso base di $\mathfrak{B}$. Pertanto, avuto riguardo alla condizione (*iii*), dal *teorema di dualità* di Whitney ([10], teor. 15, p. 85) discende la relazione

$$ (5) \qquad c^{2j}\left({}^{M^p}_{P}\mathfrak{B}\right) = c^{2j}\left({}^{M^p}_{P}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}\right) = $$

$$ = \sum c^{2h}\left({}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}\right) \smile c^2\left({}^{M^{i_{h+1}+1}}_{M'i_{h+1}}\mathfrak{B} | K_P^3\right) \smile \cdots \smile c^2\left({}^{M^{i_j+1}}_{M'i_j}\mathfrak{B} | K_P^3\right), $$

ove la somma va estesa a tutti i valori non negativi di h compresi fra $2j-p$ e j, ed a tutte le $(j-h)$-ple di interi $i_{h+1}, i_{h+2}, \cdots, i_j$ tali che $j \leq i_{h+1} < i_{h+2} < \cdots < i_j \leq p-1$.

Ma essendo ${}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}$ il prodotto di ${}^{M^{j-1}}_{P'j-1}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}$ e di ${}^{M}_{M'j-1}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}$, dal teorema di dualità si ha che

$$ c^{2j}\left({}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} \mid K_P^{2j-1}\right) = c^{2j-2}\left({}^{M^{j-1}}_{P'j-1}\mathfrak{B} \mid K_P^{2j-1}\right) \smile c^2\left({}^{M^j}_{M'j-1}\mathfrak{B}, K_P^3\right), $$

e che, se $0 < h < j$,

$$ c^{2h}\left({}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} \mid K_P^{2j-1}\right) = c^{2h}\left({}^{M^{j-1}}_{P'j-1}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}\right) + c^{2h-2}\left({}^{M^{j-1}}_{P'j-1}\mathfrak{B} \mid K_P^{2j-1}\right) \smile c^2\left({}^{M^j}_{M'j-1}\mathfrak{B} | K_P^3\right). $$

Iterando l'argomentazione precedente si ottiene, per ogni intero h tale che $0 < h \leq j$, la relazione

$$ (6) \quad c^{2h}\left({}^{M^j}_{P'j}\mathfrak{B} | K_P^{2j-1}\right) = \sum c^2\left({}^{M^{i_1+1}}_{M'i_1}\mathfrak{B} | K_P^3\right) \smile c^2\left({}^{M^{i_2+1}}_{M'i_2}\mathfrak{B} | K_P^3\right) \smile \cdots \smile c^2\left({}^{M^{i_h+1}}_{M'i_h}\mathfrak{B} | K_P^3\right), $$

ove la somma a secondo membro va estesa a tutte le h-ple di indici $i_1, i_2, \cdots, i_h$ tali che $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_h < j$, ed ove per comodità di notazioni abbiamo posto $M'^0 = P'^1 = P - P \cap N^1$.

Sostituendo nella (5) l'espressione di $c^{2h}\left({}^{M^j}_{P'_j}\mathfrak{B}\right)$ data dalla (6), si ottiene la relazione

$$(7)\quad c^{2j}\left({}^{M^p}_{P}\mathfrak{B}\right) = \sum c^2\left({}^{M^{i_1+1}}_{M'^{i_1}}\mathfrak{B}\ \ K^3_P\right) \smile c^2\left({}^{M^{i_2+1}}_{M'^{i_2}}\mathfrak{B}\,|\,K^3_{P'}\right) \smile \cdots \smile c^2\left({}^{M^{i_j+1}}_{M'^{i_j}}\mathfrak{B}\ |\ K^3_P\right),$$

ove la somma va estesa a tutte le j-ple di interi $i_1, i_2, \cdots, i_j$ tali che

$$0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq p-1.$$

Ma per $i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$, risulta manifestamente

$$c^2\left({}^{M^{i+1}}_{M'^{i}}\mathfrak{B}\ , K^3_P\right) \frown P = c^2\left({}^{M^{i+1}}_{M'^{i}}\mathfrak{B}\,|\,K^3\right) \frown P,$$

cosicché, avuto riguardo alla condizione (*ii*) ed alla (3), dalla (2) si ottiene facilmente che

$$(8)\qquad c^2\left({}^{M^1}_{P'^1}\mathfrak{B}\,|\,K^3_P\right) \frown P = (P\cdot P)_{M''^1},$$

ove M''^1 denota la varietà aperta $M^1 - N^1$ (5), mentre per $1 \leq i \leq p-1$, avuto anche riguardo alla proposizione *a*) del n. 5 (p. 10) di [5] (6), tenuto conto che $M^i = M^{i+1} \cap A_{w-p-i}$, si ottiene facilmente che

$$(8')\qquad c^2\left({}^{M^{i+1}}_{M'^{i}}\mathfrak{B}\,|\,K^3_P\right) \frown P = (P\cdot A_{w-p-i})_{[w]}.$$

D'altra parte, dal *teorema dell'appartenenza* ([5], n. 18, pp. 32–34), tenuto conto dei nn. 22 e 46 (p. 37 e pp. 70–71) di [5] e della proposizione *a*) del n. 5 (p. 10) di [5], si ha la relazione fra successioni di *sistemi di equivalenza*

$$(9)\quad \{\tilde{P}_{M^p}\} = (\{\tilde{P}_{M^1}\}\ (P\cdot\{\tilde{M}^1_{M^2}\})_{M^1}\ (P\cdot\{\tilde{M}^2_{M3}\})_{M^2}\cdots(P\{\tilde{M}^{p-1}_{M^p}\})_{M^{p-1}})_P.$$

Ma a norma del n. 22 (p. 37) e della proprietà *a'''*) del n. 5 (p. 12) di [5] (conseguenza immediata della *a*)), si prova facilmente che le successioni di classi di omologia determinate in P dalle successioni di sistemi di equivalenza $\{\tilde{P}_{M^1}\}$ e $(P\cdot\{M^{M^i}_{M^{i+1}}\}_{M^i}$ e che, in accordo con le convenzioni introdotte nel n. 2, saranno denotate con gli stessi simboli $\{\tilde{P}_{M^1}\}$ e $(P\cdot\{\tilde{M}^i_{M^{i+1}}\})_{M^i}$, sono espresse dalle relazioni.

$$\tilde{P}_{M^1} = P\,(P\cdot P)_{M''^1}, 0, 0, \cdots,$$

$$(P\cdot\{\tilde{M}^i_{M^{i+1}}\})_{M'^i} = P\,, (P\cdot A_{w-r-i})_{[w]}, 0, 0\cdots.$$

(5) L'intersezione va eseguita nella varietà aperta M''^1 avuto riguardo al n. 38.2 del cap. V (p. 209) di [4] e tenuto conto che in virtù della (3), P è un ciclo assoluto di M''^1.

(6) La proprietà *a*) stabilita da B. SEGRE per le varietà algebriche nel n. 5 di [5] è stata ottenuta da S. LEFSCHETZ per le varietà topologiche chiuse o aperte a p. 429 di [3].

In base a queste ed alle (8) e (8'), confrontando la (9) e la (7) si ottiene immediatamente la (4).

5. Posto

$$[\tilde{P}_{[w]}, x] = \sum_{i}^{p} \tilde{P}_{[w],i}\, x^i, \quad [\tilde{P}_{M^p}, x] = \sum_{i}^{p} \tilde{P}_{M^p,i} x^i, \quad [(P \cdot \tilde{M}^p_{[w]})_{M''^p}, x] =$$

$$= \sum_{i}^{p} (P \cdot \tilde{M}^p_{[w],i})_{M''^p} x^i,$$

ove $M''^p = M^p - N^p$, dal teorema dell'appartenenza discende la identità in x

$$[\tilde{P}_{[w]}, x] = ([\tilde{P}_{M^p}, x] \cdot [(P\tilde{M}^p_{[w]})_{M''^p}, x])_P \tag{10}$$

ove, a norma del n. 17 (pp. 31–32) di [5], risulta

$$[(P \cdot \tilde{M}^p_{[w]})_{M''^p}, x] = \left(\prod_{h}^{1 \cdots w-2p} (P + (PA_h)_{[w]} x) \right)_P . \tag{11}$$

Poiché la struttura ${}^{[w]}_{P}\mathfrak{B}$ è il prodotto di ${}^{M^p}_{P}\mathfrak{B}$ e di ${}^{[w]}_{M''^p}\mathfrak{B} \mid P$, si ha

$$[c({}^{[w]}_{P}\mathfrak{B}), x] = [c({}^{M^p}_{P}\mathfrak{B}), x] \cup [c({}^{[w]}_{M''^p}\mathfrak{B} \mid P), x]. \tag{12}$$

D'altra parte, essendo ${}^{[w]}_{M''^p}\mathfrak{B} \mid P$ il prodotto delle strutture

$${}^{[w]}_{A_1}\mathfrak{B} \mid P, \cdots, {}^{[w]}_{A_{w-2p}}\mathfrak{B} \mid P,$$

risulta

$$[c({}^{[w]}_{M''^p}\mathfrak{B} \mid P), x] = (u^\circ + c^2({}^{[w]}_{A_1}\mathfrak{B} \mid P)) \cup \cdots \cup (u^\circ + c^2({}^{[w]}_{A_{w-2p}}\mathfrak{B} \mid P)).$$

Ma ([9], nn. 2 e 3, pp. 201–204)

$$c^2({}^{[w]}_{A_h}\mathfrak{B} \mid P) \cap P = (P \cdot (A_h \cdot A_h)_{[w]})_{A_h} = (P \cdot A_h)_{[w]} \qquad (h = 1, \cdots, w - 2p),$$

e pertanto, in base a questa relazione ed alla (11), la (1) risulta completamente dimostrata, nell'ipotesi $V = [w]$, non appena si confronti la (10) con la (12) tenendo conto dei risultati del n. 4.

6. Per dimostrare la (1) nel caso in cui V sia una qualsiasi varietà algebrica irriducibile e non singolare, osserviamo che è sempre possibile costruire un modello proiettivo di V – che per semplicità denoteremo con lo stesso simbolo V – immerso in uno spazio proiettivo $[w]$ di dimensione w tanto elevata che siano soddisfatte per V e per $P \subset V$, le condizioni enunciate per P nel n. 4.

Per il teorema dell'appartenenza si ha la relazione

$$[\tilde{P}_V , x] = ([\tilde{P}_{[w]} , x] \cdot [(P \cdot V_{[w]})_V , x])_P , \tag{13}$$

ove

$$[(P \cdot V_{[w]})_V , x] = \sum_{0}^{p}{}_i (P \cdot V_{[w],i})_V x^i,$$

mentre per il teorema di dualità sussiste l'identità in x

$$[c\,({}^{[w]}_{P}\mathfrak{B}) , x] = [c\,({}^{V}_{P}\mathfrak{B}) , x] \smile [c\,({}^{[w]}_{V}\mathfrak{B} \mid P) , x],$$

onde si trae che

$$[c\,({}^{V}_{P}\mathfrak{B}) , x] = [c\,({}^{[w]}_{P}\mathfrak{B}) , x] \smile [\tilde{c}\,({}^{[w]}_{V}\mathfrak{B} \mid P) , x]. \tag{14}$$

Ma, a norma dei risultati conseguiti nel n. 5, per $j = 1 , 2 , \cdots , p$ risulta

$$c^{2j}({}^{[w]}_{P}\mathfrak{B}) \frown P = \tilde{P}_{[w],j},$$

e

$$\tilde{c}^{2j}({}^{[w]}_{V}\mathfrak{B} \mid P) \frown P = \tilde{c}^{2j}({}^{[w]}_{V}\mathfrak{B}) \frown P = (P \cdot V_{[w],j})_V,$$

ed in base a queste relazioni, dalle (13) e (14) consegue la (1).

Da quest'ultima relazione, ripetendo l'argomentazione del n. 4 di [9] (p. 204), si ottiene il teorema di Hodge enunciato nel n. 1.

7. Siano $[w - v - 2 + t]$ e $[w - s + t]$ due generici sottospazi proiettivi di dimensioni $w - v - 2 + t$ e $w - s + t$ $(0 < s \leq v \; ; \; 0 \leq t \leq s)$ dello spazio proiettivo $[w] \supset V$, tali che $[w - v - 2 + t] \subset [w - s + t]$. Sulla varietà algebrica $M = V \cap [w - s + t]$ di dimensione $m = v - s + t$, consideriamo il luogo dei punti $x \in M$ per i quali passi qualche $[w - v - 1 + t] \subset [w]$ contenente $[w - s + t]$ e secante lo spazio $[m]_x$, di dimensione m, tangente a M in x, in uno spazio proiettivo di dimensione $\geq t$:

$$\dim([w - v - 1 + t] \cap [m]_x) \geq t. \tag{15}$$

Tale luogo è sostegno di un ciclo Π^t_{2v-2s} di dimensione $2v - 2s$, il quale, secondo R. V. Gankrelidze [1], è legato alla classe caratteristica di omologia, ${}_vC_{2v-2s}$, di dimensione $2v - 2s$, della struttura sferica unitaria tangente a V, dalla relazione

$${}_vC_{2v-2s} = \sum_{0}^{s}{}_t (-1)^t \binom{v - t + 1}{v - s + 1} \Pi^t_{2v-2s}\ ^{(7)}. \tag{16}$$

(7) Di questo risultato il Gankrelidze non ha ancora fornito una dimostrazione completa in tutti i dettagli; cfr. in proposito la recensione di H. SAMELSON in «Math. Rev.», *15*, 459 (1954).

Ci proponiamo di provare che questa relazione è conseguenza del teorema di Hodge e di alcune formule di J. A. Todd. All'uopo osserviamo che la condizione (15) equivale ad affermare che l'interferenza dello spazio $[w - v - 2 + t]$ e dello spazio $[v]_x$ a v dimensioni, tangente a V in x, ha dimensione

$$\dim([w - v - 2 + t] \cap [v]_x) \geqq t - 1.$$

Pertanto il sostegno di Π^t_{2v-2s} è l'intersezione di $[w - s + t]$ con la varietà algebrica M_{v-t}, di dimensione $v - t$, luogo dei punti di V tali che gli spazi in essi tangenti a V appartengano ad un iperpiano di $[w]$ passante per lo spazio $[w - v - 2 + t]$ sopra considerato. Risulta dunque

$$\Pi^t_{2v-2s} = (M_{v-t} \cdot A^{[s-t]})_V \tag{17}$$

ove A denota una generica sezione iperpiana di V, e $A^{[s-t]}$ indica la potenza $(s-t)$-esima di A, cioè l'intersezione, ripetuta $s - t$ volte, di A con se stessa in V.

In virtù di una formula di J. A. Todd [8], la classe canonica V^*_s di dimensione $v - s$ di V risulta espressa dalla relazione

$$V^*_s = \sum_t^s (-1)^{s-t} \binom{v - t + 1}{v - s + 1} (M_{v-t} \cdot A^{[s-t]})_V,$$

che in virtù della (17) diviene

$$V^*_s = \sum_t^s (-1)^{s-t} \binom{v - t + 1}{v - s + 1} \Pi^t_{2v-2s};$$

e da questa formula, a norma del teorema di Hodge, consegue la (16).

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. V. GANKRELIDZE, *Computation of the Chern cycles of algebraic manifolds*, « Doklady Akad. Nauk. SSSR » (N. S.), *90*, 719–722 (1953).

[2] K. KODAIRA, *The theorem of Riemann–Roch for adjoint systems on 3-dimensional algebraic varieties*, « Ann. of Math. » (2), *56*, 298–342 (1952).

[3] S. LEFSCHETZ, *Manifolds with boundary and their transformations*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *29*, 429–462 (1927).

[4] S. LEFSCHETZ, *Algebraic topology*, « Am. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. XXVII, New York, 1942.

[5] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », (4) XXXV, 1–128 (1953).

[6] F. SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*, «Mem. R. Acc. Sc. Torino» (2), LII,61–118 (1902); *Memorie scelte*, vol. I, Bologna, 41–115 (1950).

[7] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton, (1951).

[8] J. A. TODD, *Invariant and covariant systems on an algebraic variety*, « Proc. London Math. Soc. » (2), *46*, 199–230, (1940).

[9] E. VESENTINI, *Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *16*, 199–204, (1954).

[10] WU WEN-TSUN, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, « Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Strasbourg », XI (Hermann et Cie., Paris 1952).

Geometria. — *Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria Kähleriana.* Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

In un recente lavoro sulla Geometria Kähleriana (1) A. Lichnerowicz dà un teorema (che verrà riportato in seguito) di grande importanza negli sviluppi successivi della teoria. Poiché di esso il Lichnerowicz dà una dimostrazione puramente analitica, mi propongo in questa Nota di darne una nuova dimostrazione che ne mette in evidenza il significato geometrico.

Premetto il seguente:

LEMMA. – *Siano date, in uno* S_{2n-1} *proiettivo reale, una quadrica* $x_{-1}\alpha x = 0$ *non specializzata totalmente immaginaria e una polarità nulla* β *con* $\det\beta \neq 0$. *Si può sempre scegliere un riferimento proiettivo, senza uscire dal campo reale, in cui si abbia*:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix} \qquad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 \cdots \sigma_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\sigma_2 \cdots 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove i σ_k *sono i moduli degli autovalori dell'omografia* $y = \alpha^{-1}\beta x$.

Allo scopo per ogni punto della quadrica $x_{-1}\alpha x = 0$ si consideri l'iperpiano polare rispetto a β; l'inviluppo di questi iperpiani è una quadrica, anche essa totalmente immaginaria di equazione $x_{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x = 0$, e viceversa se per ogni punto di questa quadrica si considera l'iperpiano polare rispetto a β, l'inviluppo risulta la quadrica $x_{-1}\alpha x = 0$.

Si consideri l'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$, prodotto della polarità α e della polarità nulla β, omografia che si realizza geometricamente mediante le operazioni: $x \xrightarrow{\beta} u \xrightarrow{\alpha^{-1}} y$; i suoi punti uniti appartengono sia alla quadrica $x_{-1}\alpha x = 0$ che alla quadrica $x_{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x = 0$, come risulta dalla stessa costruzione geometrica della omografia. Ne segue che gli spazi luoghi dei punti uniti appartengono alle due quadriche, quindi sono complessi e di dimensione non maggiore di n.

Gli autovalori dell'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$ si ottengono risolvendo l'equazione $\det(\alpha^{-1}\beta - \sigma) = 0$. Senza uscire dal campo reale posso sempre prendere un riferimento proiettivo in cui $\alpha = 1$. In questo riferimento l'omografia diventa $y = \bar{\beta}x$, dove $\bar{\beta}$ è una matrice emisimmetrica reale, e gli autovalori si otterranno risolvendo l'equazione $\det(\bar{\beta} - \sigma) = 0$, onde essi risulteranno immaginari puri e si distribuiranno in coppie di numeri complessi

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) A. LICHNEROWICZ, *Généralisations de la géométrie kählérienne globale*, «Coll. de Géom. Différentielle», Louvain, 1951, pp. 114–115.

coniugati. Li indicherò con $\pm i\sigma_1$, $\pm i\sigma_2, \cdots, \pm i\sigma_n$ dove le σ_k sono quantità reali tutte diverse da zero; potendo anche parzialmente o totalmente coincidere tra loro.

Si consideri ora l'omografia prodotto delle due polarità individuate dalle quadriche $x_{-1}\alpha x = 0$ e $x_{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x = 0$. Essa ha equazione $y = \alpha^{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x$, è quindi il quadrato dell'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$. I suoi autovalori saranno quindi $-\sigma_1^2, -\sigma_2^2, \cdots, -\sigma_n^2$ ossia si distribuiscono in al più n coppie di elementi uguali. Distribuiamo detti autovalori ponendo in uno stesso gruppo tutti quelli aventi lo stesso valore; siano μ_1 gli autovalori uguali a $-\rho_1^2$, μ_2 quelli uguali a $-\rho_2^2$, ecc. Così facendo gli autovalori distinti di $y = (\alpha^{-1}\beta)^2 x$ saranno:

$$-\rho_1^2, -\rho_2^2, \cdots, -\rho_q^2 \qquad \begin{matrix} q \leq n \\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q = n \end{matrix}$$

e $-\rho_k^2$ risulta di molteplicità $2\,\mu_k$.

In conseguenza gli autovalori di $y = \alpha^{-1}\beta x$ saranno:

$$\pm i\rho_1, \pm i\rho_2, \cdots, \pm i\rho_q \qquad q \leq n$$

dove $i\rho_k$ e $-i\rho_k$ sono autovalori di molteplicità μ_k.

All'autovalore $-\rho_k^2$ dell'omografia $y = (\alpha^{-1}\beta)^2 x$, che è una omografia generale, corrisponde uno $S_{2\mu_k-1}$ reale luogo dei punti uniti per $y = (\alpha^{-1}\beta)^2 x$. Agli autovalori $\pm i\rho_k$ dell'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$, che è anch'essa una omografia generale in quanto il suo quadrato è tale, corrispondono due S_{μ_k-1} luogo dei punti uniti per $y = \alpha^{-1}\beta x$, sghembi e complessi coniugati contenuti entrambi nello $S_{2\mu_k-1}$, in quanto se un punto è unito per una omografia ed è relativo all'autovalore σ esso è unito anche per l'omografia quadrata ed è relativo all'autovalore σ^2 dell'omografia quadrata.

Si consideri un punto x reale dello $S_{2\mu_k-1}$, sia y il suo corrispondente in $y = \alpha^{-1}\beta x$. La retta (xy) risulta unita in $y = \alpha^{-1}\beta x$, e detta omografia vi induce una involuzione ellittica i cui punti uniti sono l'intersezione della retta con i due S_{μ_k-1}; ma detti S_{μ_k-1}, appartengono alle quadriche $x_{-1}\alpha x = 0$ e $x_{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x = 0$, quindi si può dire che la retta (xy) interseca le due quadriche in due coppie coincidenti di punti complessi coniugati che risultano uniti per l'involuzione che $y = \alpha^{-1}\beta x$ induce su (xy). Si consideri l'iperpiano polare di x rispetto a β, sia u; il polo di u rispetto ad α dovrà essere il punto y corrispondente di x nell'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$; l'iperpiano polare di y rispetto a β dovrà coincidere con l'iperpiano polare di x rispetto a $x_{-1}\beta\alpha^{-1}\beta x = 0$, ossia, essendo x unito per l'omografia prodotto delle due polarità, dovrà essere l'iperpiano polare di x rispetto a $x_{-1}\alpha x = 0$. Concludendo l'iperpiano polare di x rispetto a β coincide con l'iperpiano polare di y rispetto ad α e viceversa.

Prendo ora il punto x come punto $O_1\,(1, 0, 0, \cdots, 0)$; il punto y come punto $O_{2n}\,(0, 0, \cdots, 0, 1)$; l'iperpiano polare rispetto ad α di x, come $x_1 = 0$; l'iperpiano polare rispetto ad α di y, come di $x_{2n} = 0$. Si avrà che

gli iperpiani polari rispetto a β di O_1 e O_{2n} risulteranno rispettivamente $x_{2n} = 0$ e $x_1 = 0$. In tale riferimento si avrà:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & — & — & \cdots & — & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & — & — & \cdots & — & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2n} \end{pmatrix} \qquad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & — & — & \cdots & — & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & — & — & \cdots & — & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè la matrice α (o rispettivamente β) è ridotta ad avere nulli tutti gli elementi delle righe e colonne estreme ad eccezione di quelli situati sulla diagonale principale (o rispettivamente secondaria).

Nello S_{2n-3} di equazione $x_1 = x_{2n} = 0$, che risulta unito per l'omografia $y = \alpha^{-1}\beta x$, ci si trova nelle stesse condizioni precedenti, si può dunque ripetere il ragionamento precedente e così via, onde si potrà fare una scelta di riferimento in cui:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \alpha_{2n} \end{pmatrix} \qquad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \cdots \beta_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\beta_1 & \cdots 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scelto il punto unitario e l'iperpiano unitario in modo che l'uno sia il polo dell'altro rispetto a $x_{-1}\alpha x = 0$, si avrà:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix} \qquad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 \cdots \sigma_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\sigma_2 \cdots 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove σ_k sono i moduli degli autovalori di $y = \alpha^{-1}\beta x$. c.d.d.

Passo ora a dimostrare il teorema di A. Lichnerowicz.

Sia data una V_{2n} differenziabile e su essa sia definito un tensore emisimmetrico F_{ik} con $\det(F_{ik}) \neq 0$, scelta arbitrariamente sulla V_{2n} una metrica $\gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$ riemanniana definita positiva, si vuole dimostrare che:

TEOREMA. – *Si può sempre modificare la metrica della* V_{2n} *in modo che sia soddisfatta la relazione*

$$F_{ik}\, F_{jl}\, g^{kl} = g_{ij}$$

dove g^{ij} *designa il tensore metrico di* V_{2n}.

Sia $\bar{x}$ un punto della V_{2n}, si consideri lo spazio affine tangente in $\bar{x}$ alla V_{2n}. In esso il tensore γ_{ij} individua la quadrica a centro $\gamma_{ij}\, x^i\, x^j = 1$, e il tensore F_{ij} individua la correlazione F di equazione:

$$\begin{cases} u_i = F_{ik}\, x^k \\ u_{2n+1} = -x^{2n+1} \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, 2n).$$

Se per ogni punto della quadrica $\gamma_{ij}\, x^i\, x^j = 1$ si considera l'iperpiano ad esso corrispondente in F, l'inviluppo di detti iperpiani risulta, come facilmente si riconosce, la quadrica $F_{ik}\, F_{jl}\, \gamma^{kl}\, x^i\, x^j = 1$; e viceversa lo

inviluppo degli iperpiani corrispondenti in F dei punti della quadrica $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ risulta la quadrica $\gamma_{ij} x^i x^j = 1$.

In generale le due quadriche $\gamma_{ij} x^i x^j = 1$ e $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ sono distinte, se fossero coincidenti sarebbe già verificato il teorema. Si tratta ora di costruire una nuova quadrica $g_{ij} x^i x^j = 1$ in modo che la quadrica inviluppo degli iperpiani corrispondenti in F dei punti di $g_{ij} x^i x^j = 1$, ossia la quadrica $F_{ik} F_{jl} g^{kl} x^i x^j = 1$, coincida con $g_{ij} x^i x^j = 1$. Inoltre detta quadrica dev'essere tale che $g_{ij} dx^i dx^j$ risulti definita positiva. Farò vedere che esiste un procedimento geometrico che permette di determinare in modo unico una tale quadrica.

La quadrica $\gamma_{ij} x^i x^j = 1$ interseca lo S_{2n-1} improprio dello spazio tangente nella quadrica totalmente immaginaria $\gamma_{ij} x^i x^j = 0$, posso allora rivestire lo spazio affine tangente di una metrica euclidea, l'assoluto essendo la quadrica $\gamma_{ij} x^i x^j = 0$. Detta metrica è quella che la metrica definita sulla V_{2n} induce nello spazio tangente. Inoltre la correlazione F induce nello S_{2n-1} improprio una polarità nulla F* di equazione $u_i = F_{ik} x^k$.

L'inviluppo degli iperpiani polari rispetto a F* dei punti di $\gamma_{ij} x^i x^j = 0$ risulta la quadrica $F_{ik} F_{ji} \gamma^{kl} x^i x^j = 0$, ossia l'intersezione di $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ con lo S_{2n-1} improprio.

Per il lemma precedente posso scegliere nello S_{2n-1} improprio un riferimento proiettivo in cui $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, e $F_{ik} = \sigma_i \delta_{i,2n-k+1}$ $(i, k = 1, \ldots, 2n)$ con $\sigma_i = -\sigma_{2n-i+1}$ e dove δ_{ij} è il simbolo di Kroneker.

Nello spazio tangente scelgo un riferimento i cui assi si ottengono proiettando dall'origine i vertici del $2n$–simplesso del riferimento che esiste sullo S_{2n-1}. Detto riferimento sarà un riferimento cartesiano ortogonale, in cui $F_{ik} = \sigma_i \delta_{i,2n-k+1}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, 2n)$ con $\sigma_i = -\sigma_{2n-i+1}$, ed in cui la quadrica $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ risulta riferita ai propri assi.

Le equazioni delle due quadriche $\gamma_{ij} x^i x^j = 1$ e $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ risultano in questo riferimento rispettivamente:

$$\sum_{1}^{2n} (x^i)^2 = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \sigma_i^2 (x^i)^2 = 1 \qquad \text{con} \quad \sigma_i^2 = \sigma_{2n-i+1}^2 . \tag{2}$$

La (2) si potrà anche scrivere:

$$\sum_{i=1}^{q} \rho_i^2 \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(x^k)^2 + (x^{2n-k+1})^2] \right\} = 1 \qquad 1 \leq q \leq n \quad \mu_0 = 0 \tag{2'}$$

dove i ρ_i hanno lo stesso significato specificato nel lemma precedente. Inoltre si osservi che, nel caso che sia $q = 1$, dovrà essere $\rho_1^2 \neq 1$ altrimenti le quadriche (1) e (2) coinciderebbero.

Si consideri ora il sistema lineare ∞^q, di quadriche che ammettono gli stessi assi della quadrica (2). Esso risulta:

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(x^k)^2 + (x^{2n-k+1})^2] \right\} = 1 \qquad 1 \leq q \leq n \quad \mu_0 = 0 . \tag{3}$$

Fissata una quadrica nel sistema (3), si consideri l'inviluppo degli iperpiani corrispondenti in F dei punti della quadrica, essi inviluppperanno la quadrica di equazione:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{q} \frac{\rho_i^2}{\lambda_i} \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(x^k)^2 + (x^{2n-k+1})^2] \right\} = 1.$$

Infatti nel nuovo riferimento la correlazione F ha equazione:

$$\begin{cases} u_i = \sigma_i x^{2n-i+1} \\ u_{2n+1} = -x^{2n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{2n-i+1} = \dfrac{u_i}{\sigma_i} \\ x^{2n+1} = -u_{2n+1} \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, 2n).$$

Quindi l'inviluppo degli iperpiani corrispondenti in F della quadrica (3) avrà equazione

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} \left[\frac{(u_{2n-k+1})^2}{\sigma_{2n-k+1}^2} + \frac{(u_k)^2}{\sigma_k^2} \right] \right\} = 1$$

da cui:

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} \frac{1}{\sigma_i^2} [(u_k)^2 + (u_{2n-k+1})^2] \right\} = 1$$

ed infine:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{\rho_i^2} \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(u_k)^2 + (u_{2n-k+1})^2] \right\} = 1$$

da cui la (4).

La (4) appartiene ancora al sistema (3) ed inoltre l'inviluppo degli iperpiani corrispondenti in F dei punti di essa risulta la quadrica (3). Nel sistema (3) esiste dunque una corrispondenza, geometricamente ben determinata, involutoria che alla quadrica (3) fa corrispondere la quadrica (4) e viceversa.

L'equazione della corrispondenza risulta:

$$(5) \qquad \lambda_i' = \frac{\rho_i^2}{\lambda_i} \qquad i = 1, \cdots, q. \qquad 1 \leq q \leq n.$$

Troviamoci gli elementi uniti di detta trasformazione. Essi si otterranno da:

$$(6) \qquad \lambda_i^2 = \rho_i^2 \qquad i = 1, \cdots, q$$

ossia

$$\lambda_i = \pm \rho_i \qquad \text{con} \quad \rho_i > 0$$

nel sistema (3) esistono dunque 2^q quadriche, unite nella trasformazione (5). Tra esse solamente la quadrica:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{q} \rho_i \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(x^k)^2 + (x^{2n-k+1})^2] \right\} = 1$$

è tale che il primo membro risulta definito positivo. La (7) è dunque la quadrica voluta. Essa individua un tensore simmetrico g_{ij} per cui $F_{ik} F_{jl} g^{kl} = g_{ij}$.

La costruzione geometrica della quadrica (7) si effettua, indipendentemente dalle argomentazioni fatte precedentemente, nel modo seguente:

Scelto, nello spazio tangente alla V_{2n} in $\bar{x}$, il riferimento precedente in cui le due quadriche $\gamma_{ij} x^i x^j = 1$ e $F_{ik} F_{jl} \gamma^{kl} x^i x^j = 1$ vengono ad avere equazione (1) e (2'), si consideri l'asse h–esimo, di equazione $x_l = 0$, $l \neq h$, esso interseca le due quadriche (1) e (2') rispettivamente nei punti ± 1 e $\pm \frac{1}{\rho_h}$ $(\rho_h > 0)$. Si consideri l'involuzione sull'asse h–esimo che ammette come punti corrispondenti le coppie $\left(1, \frac{1}{\rho_h}\right)$ e $\left(-1, -\frac{1}{\rho_h}\right)$, essa risulterà avere equazione: $tt' = \frac{1}{\rho_h}$. Siano P_h e P'_h i punti uniti di questa involuzione. Sarà: $OP_h = \frac{1}{\sqrt{\rho_h}}$ e $OP'_h = -\frac{1}{\sqrt{\rho_h}}$. Si consideri allora la quadrica ellissoidica che ammette gli stessi assi della quadrica (2') e che ammette come semiasse h–esimo la quantità OP_h. Essa ha equazione:

$$\sum_{i=1}^{q} \rho_i \left\{ \sum_{k=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} [(x^k)^2 + (x^{2n-k+1})^2] \right\} = 1$$

ossia risulta la (7).

È così messo in evidenza anche la costruzione geometrica della quadrica (7).

Astronomia. — *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18–19 gennaio 1954 in relazione al problema della luminescenza del suolo lunare.* Nota di TERESA FORTINI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. L'eclisse totale di luna del 18–19 gennaio 1954 si presentava in condizioni favorevoli per uno studio fotometrico della illuminazione residua nelle zone di ombra e di penombra, analogo a quello da noi effettuato in occasione dell'eclisse del 29 gennaio 1953 (1).

Esponendo i risultati delle osservazioni, rilevammo già allora l'interesse che presentano attualmente le osservazioni fotometriche della ripartizione della luce nella penombra. Basandosi infatti sulla teoria emessa dal Link (2) sulla luminescenza del suolo lunare, si possono misurare le fluttuazioni delle radiazioni nell'ultravioletto solare, le quali sfuggono a ogni misura

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cfr. M. CIMINO–T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XIV, fasc. 5, pp. 619–626 (1953).

(2) Cfr. F. LINK, *Théorie photométrique de la penombre pendant les eclipses de lune*, « Jon. Soc. Math. Phys. Théque », *72*, p. 65 (1947).

diretta. Secondo il Link, la luminescenza del suolo lunare, dovrebbe rivelarsi particolarmente durante le eclissi, perché allora le radiazioni solari eccitatrici, come le ultraviolette e le corpuscolari che sono emesse dalla corona solare, tenderebbero a prevalere su quelle ottiche, specie in vicinanza dell'orlo dell'ombra. Ora la densità della penombra può essere calcolata e il confronto tra le osservazioni e il calcolo dovrebbe rivelare un eccesso di illuminazione in vicinanza dell'orlo dell'ombra.

Per quanto riguarda l'ombra, è nota l'influenza dell'atmosfera terrestre sulla ripartizione della luce in questa zona ed è pure noto come da un confronto delle osservazioni con la teoria emessa dal Link per l'ombra [3], si possano trarre utili informazioni sulla composizione degli alti strati dell'atmosfera stessa.

Per tali ragioni, in occasione dell'eclisse del 18 gennaio 1954, si stabilì presso l'Osservatorio di M. Mario un duplice programma di osservazioni: e cioè, una prima serie di fotografie da eseguirsi all'astrografo (O = 165; F = 790 mm) Petzval, nelle medesime condizioni di quelle già ottenute durante l'eclisse del 29 gennaio 1953, ed una seconda serie di fotografie da ottenersi al grande equatoriale Steinheil (O = 390; f = 5,25 m). Queste ultime, date le notevoli dimensioni dell'immagine fuocale (diametro della luna = 47 mm) erano destinate a uno studio approfondito della luminescenza del suolo lunare. Tutte le fotografie furono sempre eseguite su lastre pancromatiche con filtro rosso, per $\lambda = 6300$ Angstrom circa.

Le pose allo Steinheil furono eseguite dal prof. M. Cimino e dalla dott.ssa M. A. Giannuzzi e della loro riduzione sarà dato conto in altro lavoro, mentre nella presente Nota espongo i risultati delle fotografie che io stessa – coadiuvata dall'ing. R. Flamini – ho ottenuto all'astrografo, rimandando per maggiori dettagli sopra gli strumenti, le lastre e la tecnica delle osservazioni al lavoro già citato [4].

2 La nottata si presentò calma e limpida; soltanto verso le $4^h\ 45^m$ si formarono strati sottilissimi di nuvole che verso le $5^h\ 20^m$ velavano leggermente la luna. Però, poco dopo il cielo ritornò limpido e si mantenne tale fino al termine delle osservazioni. L'eclisse fu seguìta con tutti e due gli strumenti secondo i programmi stabiliti.

Le pose all'astrografo fuori eclisse sono state ottenute diaframmando l'obbiettivo fotografico (O = 165 mm; F = 790 mm) con un diaframma di 8 mm di apertura e con una durata di tre secondi. A mano a mano che l'eclisse procedeva, veniva aumentata l'apertura del diaframma, in modo da guadagnare ogni volta circa due grandezze stellari. Infine, quando non è stato più possibile aumentare l'apertura, ho aumentato il tempo di posa fino a portarlo a 40 secondi.

(3) Cfr. F. Link, *Théorie photometrique des éclipses de lune*, « Bull. Astr. », *8*, pp. 77-108 (1933).

(4) Cfr. M. Cimino–T. Fortini, loc. cit. alla nota (1).

Le lastre, tutte calibrate con tempi identici ai tempi di posa, sono state da me sviluppate con uguale durata e alla medesima temperatura con il rivelatore Kodak D 76. Soltanto per le lastre 14, 15, 17, 18, 24 e 25 destinate al collegamento, ho usato il rivelatore Kodak D 25, il quale essendo uno sviluppo morbidissimo, mi ha permesso di ottenere sulla medesima lastra le immagini delle zone in ombra e penombra insieme, con densità ambedue misurabili. I dati riguardanti le singole lastre sono riportati nella tabella I.

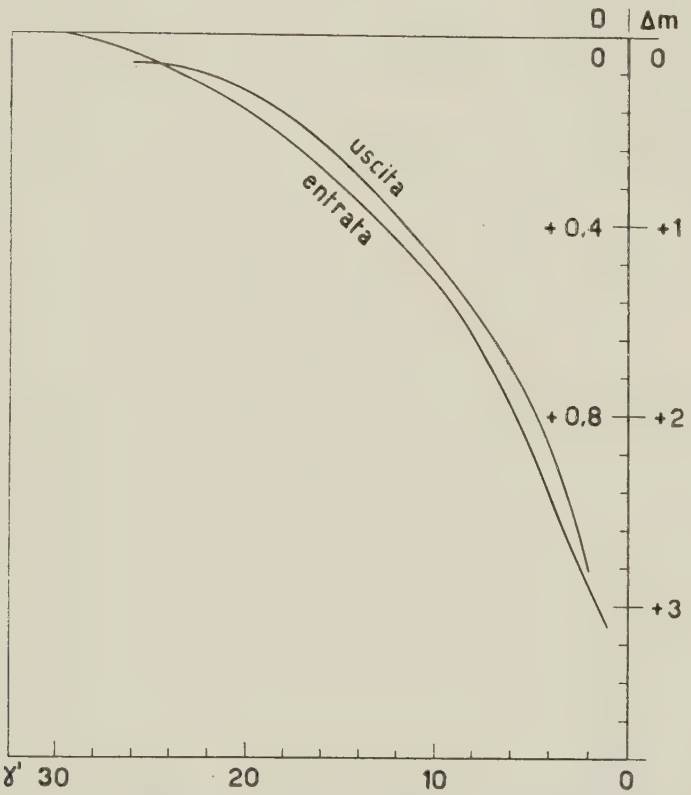


Fig. 1. – Curve di densità della penombra per λ 6300 in funzione della distanza γ' (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

3. La misura delle densità fotografiche è stata eseguita dalla scrivente e dalla dott.ssa M. A. Giannuzzi al microfotometro Fabry–Busson, per le cui caratteristiche rimandiamo alla Nota già ricordata. Per garantire l'omogeneità nella valutazione delle misure, parecchie lastre sono state misurate separatemente dalla scrivente e dalla dott.ssa M. A. Giannuzzi e l'accordo è risultato sempre soddisfacente. Nelle misure, allo scopo di rendere meglio paragonabili i risultati attuali con quelli della precedente eclisse, ho scelto gli stessi punti lunari, mantenendo la stessa tecnica di misura e riduzione.

Per la costruzione della curva, ho adottato lo stesso metodo differenziale impiegato allora: nelle lastre impressionate *fuori eclisse*, ho pure determinato i Δm dei punti prescelti con quello di riferimento. Utilizzando poi le altre lastre

in eclisse (penombra), *ma con il punto di riferimento ancora fuori*, ho tracciato la prima parte della curva di densità della penombra. A mano a mano che il punto di riferimento cadeva a una distanza dall'orlo nella quale la densità era già stata determinata dal gruppo di lastre precedenti, si riduceva la sua densità a quella della curva. Con i Δm tra gli altri punti e quello di riferimento così corretto, si poteva ottenere l'ultimo tratto della curva di penombra.

TABELLA I.

Caratteristiche delle lastre misurate.

N.	Ora T.M.E.C.	posa	diaframma	Note	N.	Ora T.M.E.C.	posa	diaframma	Note	N.	Ora T.M.E.C.	posa	diaframma	Note
1	$0^h\ 13^m,5$	3^s	1		13	$2^h\ 30^m,5$	3^s	2		25	$4^h\ 25^m,0$	40^s	5	
2	0 20 ,0	3	1		14	2 40 ,0	40	5		26	4 30 ,0	3	2	
3	0 35 ,0	3	1		15	2 49 ,0	40	5		27	4 45 ,0	3	3	
4	0 45 ,7	3	1	(1)	16	2 55 ,0	3	3		28	4 50 ,0	3	2	
5	1 0 ,0	3	1	(2)	17	3 1 ,1	40	5		29	5 5 ,0	3	2	
6	1 15 ,0	3	1		18	3 5 ,0	40	5		30	5 22 ,0	3	1	(3)
7	1 25 ,2	3	2		19	3 18 ,8	40	5		31	5 35 ,0	3	1	(4)
8	1 30 ,2	3	1		20	3 27 ,0	40	5		32	5 50 ,0	3	1	(5)
9	1 45 ,7	3	1		21	3 32 ,0	40	5		33	6 5 ,0	3	1	
10	2 0 ,3	3	2		22	3 45 ,0	40	5		34	6 15 ,0	3	1	
11	2 15 ,0	3	2		23	4 15 ,5	3	3		35	6 20 ,0	3	1	
12	2 25 ,6	3	3		24	4 20 ,0	40	5		36	6 25 ,0	3	1	

(1) Scadente (2) Sfuocata (3) Veli sulla luna (4) Bordo agitato (5) Veli diminuiti

Come rilevammo anche in occasione dell'eclisse del 1953, tale metodo differenziale è indipendente sia da variazioni nelle condizioni atmosferiche, sia pure da piccole oscillazioni nei tempi di posa, di sviluppo e temperatura del bagno.

La misura delle lastre che servivano per il collegamento e delle lastre impressionate durante la totalità [5], è stata da me effettuata con un micro-

(5) Nel precedente lavoro avevamo misurato con il microfotometro Fabry anche le lastre ottenute durante la totalità. È da notare però che in tale momento le distanze dei vari punti lunari dal centro dell'ombra variano molto lentamente, per cui in generale si rende molto difficile la costruzione della curva. Durante l'eclisse del gennaio 1954, tale inconveniente era particolarmente notevole per tutti quei punti le cui densità erano misurabili con il micro-

fotometro registratore della casa Kipp recentemente acquistato dall'Osservatorio di M. Mario.

Per stabilire il collegamento tra ombra e penombra, ho poi tracciato i profili dei diametri lunari perpendicolari alle corde del cerchio terminatore tra ombra e penombra correggendoli dei corrispondenti profili fuori eclisse e per quanto era possibile della luce diffusa dalla zona in penombra. Nella discussione si sono dovute scartare le lastre 14, 15 e 25, in cui la luce diffusa dalla superficie ancora in penombra aveva alterato completamente il profilo della luna in ombra. Per quanto riguarda l'ombra, ho giudicato buone le lastre 19, 20, 21 adoperate per la costruzione della curva riguardante la fase di diminuzione. Non ho invece disegnata la curva di ascesa, perché si sarebbe potuta costruire soltanto in base alla lastra 22 che era piuttosto scadente.

I risultati ottenuti sia per la penombra che per l'ombra, sono riportati nella tabella II in cui i Δm in funzione della distanza dal centro in primi d'arco, sono dati soltanto nella fase di diminuzione per l'ombra, e nelle fasi di ingresso e di uscita per la penombra.

Dalle lastre 17 e 18 è risultato che il salto, tra un punto della penombra a 5′ dal bordo dell'ombra e un punto situato a 5′ dall'altra parte, è di 2,7 grandezze stellari. In base alla sola lastra 24 si è riscontrato un uguale dislivello per l'uscita.

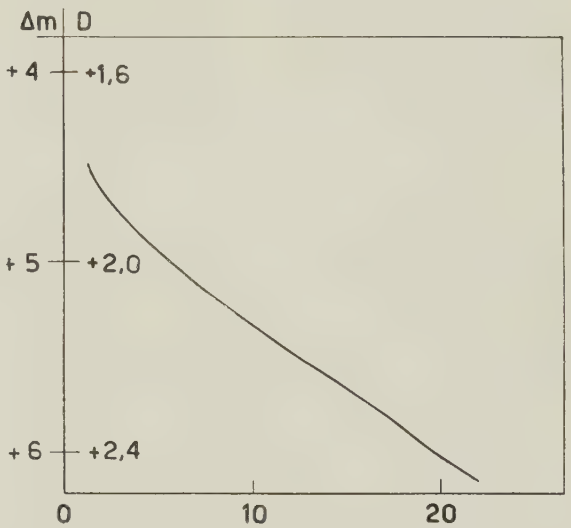


Fig. 2. – Curva di densità dell'ombra per λ 6300 in funzione della distanza γ′ (in primi d'arco) dell'orlo dell'ombra.

4. Nella fig. 1 ho disegnato le curve di penombra sia per l'ingresso che per l'uscita. Per quanto non si noti una differenza sostanziale nell'andamento delle due curve, riteniamo che si debba attribuire una maggiore attendibilità alla curva disegnata per l'uscita. Infatti, come è indicato anche nella tabella I, il primo tratto della curva di ingresso è stato costruito con lastre meno buone e quindi più difficili a misurare. Per tale ragione, io ho limitata la discussione soltanto alla curva di uscita.

fotometro Fabry. Per tale ragione, siamo stati obbligati a fare uso del microfotometro Kipp anche per la misura delle lastre riprese durante la totalità. Anche in questo caso si sono tracciati dei profili dei diametri lunari, correggendoli dei corrispondenti profili fuori eclisse. La curva è stata disegnata fino a una distanza di 22′ dal bordo dell'ombra con lo stesso metodo differenziale adottato per la penombra.

TABELLA II.

Densità della penombra e dell'ombra (5900–6700) *in funzione della distanza dall'orlo dell'ombra.*

γ' \ Δm	entrata penombra	uscita penombra	entrata ombra	γ' \ Δm	entrata penombra	uscita penombra	entrata ombra	γ' \ Δm	entrata penombra	uscita penombra	entrata ombra
1′	3,10	—	—	12′	1,10	0,96	5,49	23′	0,24	0,17	—
2	2,90	2,80	4,63	13	0,99	0,85	5,55	24	0,20	0,12	—
3	2,65	2,46	4,77	14	0,90	0,75	5,61	25	0,15	0,09	—
4	2,42	2,16	4,87	15	0,81	0,64	5,67	26	0,10	0,06	—
5	2,18	1,94	4,96	16	0,72	0,57	5,74	27	0,06	—	—
6	1,98	1,75	5,03	17	0,63	0,49	5,81	28	—	—	—
7	1,77	1,60	5,12	18	0,55	0,41	5,89	29	—	—	—
8	1,59	1,45	5,20	19	0,48	0,35	5,97	30	—	—	—
9	1,43	1,32	5,27	20	0,41	0,29	6,00	31	—	—	—
10	1,30	1,18	5,34	21	0,35	0,24	6,10	32	—	—	—
11	1,20	1,07	5,42	22	0,29	0,20	—	—	—	—	—

La media degli scarti dei singoli punti misurati, dalla curva media disegnata è risultato dell'ordine di 0,1 mg. Nella fig. 3 è riportato il grafico degli O — C tra la curva osservata nella penombra e quella teorica calcolata dal

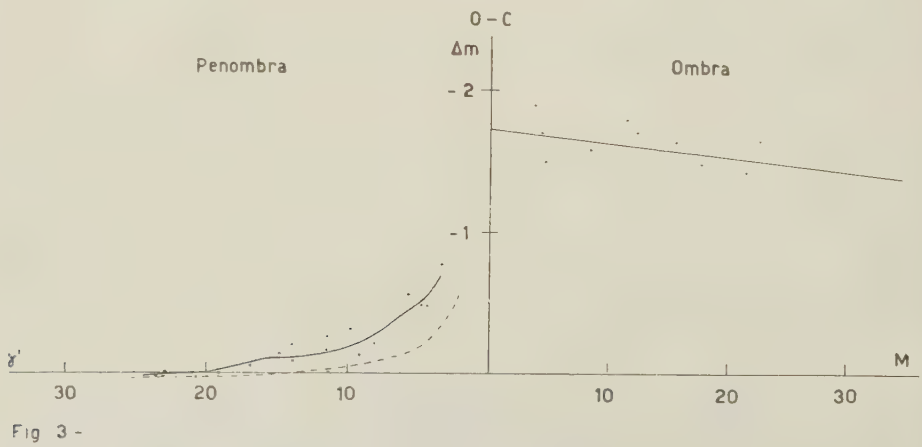


Fig. 3. – Confronto della densità osservata per l'ombra e la penombra con le teorie del Link. γ' = distanza dell'orlo dell'ombra; M = massa d'aria.

Link. Insieme a questa è disegnata la curva corrispondente determinata dal Link da una discussione di dieci eclissi di luna.

Se si ammette che siano le radiazioni ultraviolette e corpuscolari (che sono emesse prevalentemente dalle regioni elevate della cromosfera solare) ad eccitare il suolo lunare, è facile spiegare l'eccesso di luminosità in vicinanza dell'orlo dell'ombra, dove tali radiazioni tendono a prevalere. Ora un punto lunare già in penombra vede il sole come eclissato parzialmente; si può quindi esprimere approssimatamente l'eccesso di luminosità, per tale punto, mediante la relazione

$$O - C = p\,(\varepsilon - e)$$

dove p indica un coefficiente ed e ed ε indicano le intensità di illuminazione ottica e di quella eccitatrice, la prima delle quali è proporzionale all'area della porzione del disco solare non ancora occultata per il punto lunare in considerazione, e la seconda all'apertura angolare dell'arco solare ancora visibile dal detto punto lunare.

Il Link, costruendo una tabella per i valori della differenza $\varepsilon - e$ ha trovato per il coefficiente p, che misura appunto la fluorescenza del suolo lunare, il valore $p = 0{,}10$ circa (prendendo come unità la luminosità della luna fuori eclisse).

In base alla nostra curva si rileverebbe invece $p = 0{,}15$.

Dalla tabella teorica del Link si ricava pure che l'eccesso di luminosità si dovrebbe riscontrare soltanto fino a una distanza tra i 15′, 20′ dal bordo; al di là si dovrebbe riscontrare al contrario una lieve diminuzione nella luminosità lunare. Ora dalle mie fotografie risulta che l'inversione degli O — C si ha alla distanza di circa 22′ e cioè assai prossima a quella data teoricamente dal Link.

5. Terminando, notiamo che per quanto riguarda l'ombra (cfr. fig. 2), essendosi costruita la curva soltanto in base a tre lastre, ogni deduzione va accettata con riserva. Tuttavia rappresentando gli O — C (cfr. fig. 3), in funzione delle masse d'aria, queste si dispongono su una retta poco inclinata sull'asse delle ascisse. Se ne potrebbe dedurre che il coefficiente di assorbimento adottato dal Link nella sua teoria, corrispondeva a quello reale dell'atmosfera terrestre alla data del 19 gennaio 1954. Il differente livello della curva – essendo quella osservata più luminosa di quella prevista – potrebbe invece attribuirsi a una diminuzione dello spessore degli alti strati assorbenti dell'atmosfera terrestre, o a un loro differente livello.

Cosmogonia. — *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Dopo la scoperta da parte di Babcock dell'esistenza di stelle con campo magnetico fortemente variabile (1), per spiegare le oscillazioni di forma di una stella, come il Sole, è stata prospettata come si sa una interdipendenza fra quelle oscillazioni periodiche e le possibili variazioni del campo magnetico. Anzi, alcuni autori, e principalmente il prof. H. Alfvén di Stoccolma (2), hanno iniziato degli studi relativi all'influenza di un campo magnetico sul movimento di masse fluide elettricamente conduttrici di dimensioni cosmiche, dimostrando la possibilità di formazione di onde cosiddette *magneto idrodinamiche* che si propagano nella direzione di un preesistente campo magnetico uniforme in cui la massa fluida si considera immersa. Queste ricerche, che sono fondate sull'associazione delle equazioni elettrodinamiche di Maxwell con quelle dell'idrodinamica classica, si presentano oltremodo difficili, per cui esse sono state limitate finora al caso piano, al caso cioè in cui gli elementi del campo elettromagnetico e quelli del moto dipendono da una sola coordinata cartesiana e dal tempo e con riferimento inoltre a fluidi conduttori di densità costante.

Ma mentre il caso piano può rispecchiare l'influenza di un campo magnetico sul movimento di una grande massa nebulosa la cui estensione si può supporre indefinita, quando invece si vogliono spiegare i fenomeni di oscillazione del campo magnetico e le conseguenti pulsazioni di forma di una stella, o di una massa fluida cosmica avente forma sferica o sferoidica, le conclusioni relative al caso piano possono non essere attendibili. Occorre allora esaminare la questione da un punto di vista più aderente alla realtà del fenomeno, cercando soluzioni delle equazioni della magneto idrodinamica che siano applicabili al caso di una massa fluida sferica od ellissoidale rotonda. La questione si presenta naturalmente più difficile e non mi risulta che fino a questo momento altri l'abbiano affrontata.

Di questo mi sono occupato recentemente e nella Nota presente mi propongo intanto di vedere se con riferimento ad una massa fluida omogenea elettricamente conduttrice soggetta alla propria gravitazione e che occupa una certa regione dello spazio, esistono per le equazioni della magneto idrodinamica delle *soluzioni stazionarie* in cui gli elementi del campo elettromagne-

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cfr. ad esempio G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici della Astrofisica*, nn. 26-104-136 (Hoepli, Milano, 1953).

(2) H. ALFVÉN, *Cosmical electrodinamics* (Oxford at the Clarendon Press, 1953); IDEM, *Electromagnetic Phenomena in the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions* (Problems of Cosmical aerodynamics; Proceedings of the Symposium etc. Central Air Documents Office; U. B. Building, Dayton 2, Ohio).

tico e del moto dipendono dal posto, ma sono invariabili col tempo. Dimostro infatti l'esistenza di soluzioni stazionarie in cui in ogni punto del mezzo l'intensità $\mathbf{H}$ del campo magnetico e la velocità $\boldsymbol{v}$ sono vettori paralleli, che risultano determinati per mezzo di due funzioni armoniche.

In particolare risulta compatibile un moto rotatorio uniforme della massa gravitante immersa in un campo magnetico uniforme diretto secondo l'asse z di rotazione, con la formazione di un campo magnetico indotto diretto trasversalmente e proporzionale alla velocità. In questo caso ho dimostrato che la massa fluida può assumere la forma di un ellissoide rotondo schiacciato ai poli se l'intensità del campo magnetico trasverso non supera un determinato limite. In corrispondenza di questo limite si ha invece la forma sferica e per valori maggiori è possibile una forma ellissoidale allungata secondo l'asse di rotazione.

In un altro lavoro in corso di pubblicazione negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino studio le oscillazioni magneto idrodinamiche di una massa fluida rotante, di forma sferica od ellissoidale rotonda, nelle condizioni qui sopra indicate [3].

2. Le equazioni che reggono il fenomeno della propagazione di onde magneto idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore derivano dalla associazione delle equazioni di Maxwell con quelle dell'idrodinamica.

Le equazioni di Maxwell relative ad un mezzo di permeabilità magnetica μ e di conduttibilità elettrica σ, che supponiamo costanti, sono notoriamente

$$(1)\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad (2)\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(3)\qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad (4)\qquad \boldsymbol{i} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{B}\right)$$

ove $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{E}$ sono rispettivamente l'intensità del campo magnetico e del campo elettrico, $\mathbf{B}$ è l'induzione magnetica, $\mathbf{D}$ il vettore spostamento, $\boldsymbol{i}$ la corrente di conduzione e $\boldsymbol{v}$ la velocità di una generica particella del mezzo.

Se supponiamo trattarsi di un fluido perfetto l'equazione idrodinamica da associare alle precedenti risulta

$$(5)\qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\boldsymbol{i}}{c}\wedge\mathbf{B} - \operatorname{grad} p\right] + \mathbf{F}$$

essendo ρ la densità di massa, p la pressione ed $\mathbf{F}$ la forza non elettromagnetica (riferita all'unità di massa) agente sul fluido.

Supponendo inoltre che la corrente di spostamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ sia trascurabile in confronto della corrente di conduzione i, se si prende il rotore di ambo i membri della (1) e si tien conto delle equazioni (2), (3), (4), si deduce facilmente

$$(6)\qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0,$$

(3) C. AGOSTINELLI, *Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida rotante di dimensioni cosmiche, di forma ellissoidale, rotonda* («Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino» vol. 89, 1954–55).

mentre l'equazione (5), eliminando la corrente di conduzione per mezzo della (1) e supponendo inoltre che le forze di massa **F** derivino da un potenziale U, diventa

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad} U - \frac{\mu}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H} = 0\,. \tag{7}$$

Il problema si riduce dunque allo studio delle equazioni (6) e (7) in cui figurano come funzioni incognite, del tempo e del posto, il campo magnetico **H**, la velocità $\boldsymbol{v}$, la pressione p e la densità ρ. Ad esse va aggiunta l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

che nell'ipotesi di un liquido incompressibile (ρ = cost.), si riduce alla

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{8}$$

Inoltre, avendo supposto la permeabilità μ costante, sarà anche

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{9}$$

Osserviamo ancora che considerando il moto dal punto di vista euleriano risulta

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}^2$$

e pertanto, nell'ipotesi di ρ = cost., la (7) si può scrivere

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - U\right) = 0. \tag{7'}$$

3. Ciò premesso riferiamoci particolarmente al caso di una massa liquida omogenea che occupa una certa regione S dello spazio e proponiamoci di vedere se esistono delle *soluzioni stazionarie* del sistema di equazioni (6), (7') (8) e (9). Gli elementi del campo e del moto dipenderanno dal posto, ma saranno invariabili col tempo; pertanto le equazioni (6) e (7') per le ipotesi fatte si riducono alle seguenti

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \tag{6$_1$}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{p}{\rho} - U\right) = 0\,. \tag{7$_1$}$$

Cerchiamo soluzioni di questo sitema in cui il campo magnetico **H** sia in ogni punto parallelo alla velocità $\boldsymbol{v}$. Poniamo cioè

$$\mathbf{H} = \lambda_0\boldsymbol{v}$$

ove λ_0 è una costante. Ne segue $\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v} = 0$ e l'equazione (6$_1$) diventa

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0\,.$$

Sarà pertanto

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{grad} F \tag{10}$$

con F funzione *armonica*. Dopo ciò la (7$_1$) diventa

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho}\lambda_0^2\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - U\right) = 0$$

che è identicamente verificata prendendo

$$\lambda_0 = \pm \sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}} \tag{11}$$

e ponendo

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} - U = \text{cost.} \tag{12}$$

Quest'ultima equazione determinerà la pressione p in ogni punto interno alla massa liquida quando sia determinata la velocità $\boldsymbol{v}$. Le superficie di livello e in particolare la superficie libera, ove la pressione si supporrà costante, o nulla, saranno quelle di equazione

$$\frac{1}{2} v^2 - U = \text{cost.}$$

La forma della superficie libera sarà tale che il potenziale U verifichi questa equazione in ogni suo punto.

Si tratta allora di risolvere l'equazione (10) mediante una funzione armonica F. Poniamo per questo

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{grad} \Psi \wedge (P - O) \tag{13}$$

dove O è il centro della massa liquida, P un suo punto, e Φ, Ψ sono due funzioni armoniche. Dalla (13) si ricava che è verificata la (9), nonché la (8), essendo $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda_0} \mathbf{H}$. Si ha inoltre, essendo r la distanza O P,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} [\operatorname{grad} \Psi \wedge (P - O)] = 2 \operatorname{grad} \Psi + r \frac{\partial \operatorname{grad} \Psi}{\partial r}.$$

Ma risulta

$$r \frac{\partial \operatorname{grad} \Psi}{\partial r} = \operatorname{grad} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \operatorname{grad} \Psi$$

e quindi

$$2 \operatorname{grad} \Psi + r \frac{\partial \operatorname{grad} \Psi}{\partial r} = \operatorname{grad} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \operatorname{grad} \Psi = \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi),$$

perciò

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi).$$

Confrontando con la (10) si ha che è

$$F = \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi),$$

il cui secondo membro è certamente una funzione armonica tale essendo la Ψ.

Il campo magnetico $\mathbf{H}$ definito dalla (13) ove Φ e Ψ sono due funzioni armoniche arbitrarie e la velocità $\boldsymbol{v} = \mathbf{H}/\lambda_0$ soddisfano dunque a tutte le condizioni volute. Bisogna però tener conto che sulla superficie σ che limita la massa liquida deve essere $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$, cioè

$$\operatorname{grad} \Phi \times \boldsymbol{n} + \operatorname{grad} \Psi \wedge (P - O) \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{14}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie σ. Ne concludiamo che le funzioni Φ, Ψ devono essere armoniche regolari nel volume S occupato dalla massa liquida e tali da verificare in superficie la condizione (14).

4. Un caso particolare notevole si ha prendendo

$$\Phi = \text{cost.} \quad , \quad \Psi = \lambda_0 \omega z ,$$

e quindi essendo $\mathbf{K}$ il versore dell'asse z ponendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K}$, si ha

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda_0} \operatorname{grad} \Psi \wedge (P - O) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) ,$$

si ha cioè una rotazione uniforme della massa liquida intorno all'asse z con velocità angolare ω.

La condizione (14) si riduce alla

$$\mathbf{K} \wedge (P - O) \times \boldsymbol{n} = 0$$

che è identicamente soddisfatta se la superficie libera è una superficie di rotazione intorno all'asse z.

Se più in generale supponiamo che la massa liquida sia soggetta ad un campo magnetico uniforme H_0 diretto secondo l'asse z e poniamo quindi

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{K} + \gamma_0 \lambda_0 \boldsymbol{v} \quad , \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \quad , \quad (\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K}),$$

ove λ_0 è definito dalla (11) e γ_0 è una costante per il momento arbitraria, l'equazione (6_1) risulta ancora identicamente verificata. Indicando poi con (x, y, z) le coordinate di una generica particella P rispetto ad una terna cartesiana di assi con l'origine nel centro O della massa liquida e di direzione invariabile, si ha

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = -\omega^2 \operatorname{grad} (x^2 + y^2) \quad ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma_0 \lambda_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2 \gamma_0 \lambda_0 \boldsymbol{\omega}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \gamma_0^2 \lambda_0^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}$$

e pertanto la (7_1) diventa

$$\operatorname{grad} \left[-(1 - \gamma_0^2) \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} - U \right] = 0 .$$

Essendo $v^2 = \omega^2 (x^2 + y^2)$, si deduce l'integrale

$$\frac{1}{\rho} p - U - \left(\frac{1}{2} - \gamma_0^2 \right) \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{cost.} \tag{15}$$

che definisce la pressione in ogni punto interno alla massa liquida.

Nel caso in cui questa massa è soggetta unicamente alla propria gravitazione la U è il potenziale newtoniano in punti interni di questa azione e allora dalla (15) si deduce che la massa liquida può assumere la forma di un ellissoide rotondo intorno all'asse z. Le cose avvengono dunque come nel caso classico per gli ellissoidi di Maclaurin sostituendo al quadrato della velocità angolare la quantità $\omega^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma_0^2 \right)$. Ma qui vi è una differenza essenziale che occorre mettere in rilievo e cioè: Mentre gli ellissoidi di Maclaurin sono

schiacciati ai poli dell'asse di rotazione, qui si possono avere ellissoidi schiacciati, oppure allungati, secondo l'asse di rotazione, secondoché è $\gamma_0^2 < 1/2$, oppure $\gamma_0^2 > 1/2$.

Invero il potenziale in un punto interno di un ellissoide rotondo omogeneo, di semiassi a, c, e di densità ρ, è come si sa

$$U = \pi f \rho a^2 c \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}$$

essendo f la costante di attrazione universale.

Posto

$$P = 2\pi a^2 c f \rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}} \quad , \quad R = 2\pi a^2 c f \rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}}$$

la (15) diventa

$$\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2}\{[P - (1 - 2\gamma_0^2)\omega^2](x^2+y^2) + Rz^2\} = \text{cost.}$$

e in superficie, ove la pressione p è costante, o nulla, avremo

$$[P - (1 - 2\gamma_0^2)\omega^2](x^2+y^2) + Rz^2 = \text{cost.}$$

Perché questa superficie, con opportuna scelta della costante del secondo membro, coincida con l'ellissoide rotondo di semiassi a, c, deve essere verificata la condizione

$$a^2 [P - (1 - 2\gamma_0^2)\omega^2] = c^2 R,$$

che si può scrivere

$$a^2 P - c^2 R = a^2 (1 - 2\gamma_0^2)\omega^2,$$

cioè

$$2\pi f \rho a^2 c (a^2 - c^2) \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 (c^2+\lambda)^{3/2}} = a^2 (1 - 2\gamma_0^2)\omega^2.$$

Poiché l'integrale è una quantità positiva, sarà $c < a$, oppure $c > a$, secondoché è $\gamma_0^2 < 1/2$, oppure $\gamma_0^2 > 1/2$; e questo dimostra l'asserto.

In particolare la massa liquida potrà avere la forma sferica per $\gamma_0^2 = 1/2$. Concludendo, nell'interno di una massa liquida omogenea elettricamente conduttrice, uniformemente rotante intorno ad un asse può essere compatibile l'esistenza di un campo magnetico **H** avente una componente costante H_0 secondo l'asse di rotazione e una componente trasversa indotta H_φ, parallela cioè alla velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle liquide, assumendo la forma di un ellissoide rotondo schiacciato ai poli, o allungato, secondoché in grandezza risulta

$$(16) \qquad H_\varphi < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}} \quad , \quad \text{oppure } H_\varphi > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}}.$$

Nel caso di masse cosmogoniche assimilabili a un fluido omogeneo aventi forma di ellissoidi rotondi, in generale non potrà verificarsi che la prima disuguaglianza. Ma non sarebbe da escludere la generazione di campi trasversi molto intensi tali da essere verificata la seconda delle disuguaglianze (16).

Fisica matematica. — *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto.* Nota di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

In due Note presentate all'Accademia dei Lincei il 21 luglio e il 6 ottobre di quest'anno, prendendo le mosse dalle equazioni di Minkowski che governano i fenomeni elettromagnetici macroscopici nei corpi in moto, ho ricercato la propagazione per onde piane nel caso che la direzione di propagazione coincida con quella del moto.

All'equazione unidimensionale delle onde che trovasi nella Nota del 21 luglio si può pervenire per vie molto diverse. Ad esempio, applicando il metodo delle caratteristiche qual'è stato ampiamente illustrato da J. Hadamard (1) nelle *Leçons sur la propagation des ondes* e da T. Levi Civita (2) nella monografia *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa.* Ma si può applicare anche la trasformazione di Lorentz all'equazione delle onde dei corpi in quiete. Codesta deduzione insieme con l'applicazione del metodo delle caratteristiche trovasi nella mia Nota del 21 luglio.

Sull'equazione unidimensionale è poi fondata la ricerca della Nota del 6 ottobre.

Le considerazioni che ho fatte nella Nota del 21 luglio mostrano che, volendo ricercare l'equazione delle onde nel caso che la velocità $\boldsymbol{v}$ (supposta sempre uniforme e costante) del dielettrico mobile abbia una qualunque direzione rispetto al sistema S di osservazione, si può applicare indifferentemente uno dei due metodi dianzi indicati.

Ben presto ho dovuto rinunziare ad applicare il metodo delle caratteristiche per la notevole complicazione dei calcoli. Ed allora, non scorgendo alcun'altra via agevole per raggiungere lo scopo, convinto che in definitiva l'equazione cercata dovesse avere una semplice struttura, ho fatto uso della trasformazione di Lorentz. Mi sono accorto che si riesce a cogliere gli elementi essenziali di struttura dell'equazione cercata, supponendo che il vettore $O\,,\boldsymbol{v}$ appartenga ad uno dei piani coordinati del sistema di coordinate cartesiane ortogonali $Oxyz$, installato nel sistema spazio-temporale S di osservazione, diciamo al piano Oxy.

Nel sistema spazio-temporale S′ solidale col corpo in moto scegliamo gli assi cartesiani ortogonali $O'x'y'z'$ tali che il piano $O'x'y'$ coincida costantemente col piano Oxy, gli assi $O'x', O'y'$ siano paralleli agli assi $Ox\,, Oy$ e infine che O' coincida con O alle origini dei tempi $t = 0\,, t' = 0$, supposte coincidenti, riferentisi ai due sistemi $S\,, S'$.

Sia φ l'angolo che $\boldsymbol{v}$ forma con l'asse x, cioè l'angolo dei due assi $Ox\,, O'x'$.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Paris, Hermann, 1903; ristampate in Dover Publications.

(2) Bologna, Zanichelli, 1931; ed. francese, Paris, Alcan, 1932.

Per ottenere la trasformazione di Lorentz che fa passare dalla quaterna $x'\,y'\,z'\,t'$ alla quaterna $x\,y\,z\,t$ si potrà procedere come segue: si passi dagli assi $O\,xyz$ ad assi $O\,X\,Y\,z$ mediante una rotazione dell'angolo φ intorno ad Oz, lasciando inalterata la variabile temporale t.

In tal modo l'asse OX coinciderà con la retta di O , $\boldsymbol{v}$. Si applichi poi la trasformazione speciale di Lorentz (universalmente conosciuta) al sistema di coordinate $O\,X\,Y\,z\,t$ così ottenuto, di guisa che si avrà un sistema di coordinate $O'\,X'\,Y'\,z\,t'$ e infine a quest'ultimo si applichi la rotazione $-\varphi$ intorno all'asse z.

In tal modo si perviene ad un sistema di coordinate $O'\,x'\,y'\,z'\,t'$ in S' il cui asse $O'z'$ è costantemente parallelo all'asse Oz.

Le formule di trasformazione che così si ottengono sono le seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = [1 + (\alpha - 1)\cos^2\varphi]\,x' + (\alpha - 1)\cos\varphi\,\sin\varphi\,y' + \alpha\beta c\,\cos\varphi\,t' \\ y = (\alpha - 1)\cos\varphi\,\sin\varphi\,x' + [1 + (\alpha - 1)\sin^2\varphi]\,y' + \alpha\beta c\,\sin\varphi\,t' \\ z = z' \\ t = \dfrac{\alpha\beta}{c}\cos\varphi\,x' + \dfrac{\alpha\beta}{c}\sin\varphi\,y' + \alpha t' \end{cases}$$

essendo

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad , \qquad \alpha = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Le formule inverse si ottengono scambiando le grandezze accentate con le non accentate e β con $-\beta$.

Un qualunque fenomeno elettromagnetico che avvenga nel corpo viene descritto, con riferimento alla quaterna di coordinate $x'\,y'\,z'\,t'$ da quattro grandezze $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{H}'$ nell'ipotesi che il corpo non sia sede né di cariche, né di correnti.

Codeste grandezze sono soluzioni dell'equazione delle onde (dei corpi in quiete)

$$(I)\qquad n^2\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t'^2} - c^2\left(\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial z'^2}\right) = 0$$

come ha dimostrato per primo Maxwell.

Ivi è $n^2 = \varepsilon\mu$ il quadrato dell'indice di rifrazione del corpo.

Nel caso del vuoto, essendo $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, l'equazione delle onde è

$$(II)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t'^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial z'^2}\right) = 0.$$

Le grandezze $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{H}'$ sono legate dalle equazioni di Maxwell

$$(E')\qquad \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}' = -c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E}' & \mathrm{div}'\,\mathfrak{B}' = 0 \\ \dot{\mathfrak{D}}' = c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{H}' & \mathrm{div}'\,\mathfrak{D}' = 0 \\ \mathfrak{D}' = \varepsilon\mathfrak{E}' \\ \mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{H}'. \end{cases} \qquad \dot{} = \frac{\partial}{\partial t'}$$

Le grandezze $\mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{H}$ che descrivono i fenomeni elettromagnetici rispetto al sistema S di osservazione sono legate dalle equazioni di Minkowski

$$(E)\qquad \left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{B}} &= -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} & \mathrm{div}\,\mathfrak{B} &= 0 \\ \dot{\mathfrak{D}} &= c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} & \mathrm{div}\,\mathfrak{D} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdot = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathfrak{D} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{H} = \varepsilon\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{B}\right)$$

$$\mathfrak{B} - \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{E} = \mu\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\wedge\mathfrak{D}\right).$$

Orbene, nonostante che le equazioni costitutive del sistema di Minkowski non abbiano la stessa forma delle equazioni costitutive del sistema di Maxwell, la equazione risolvente del primo sistema si ottiene applicando la trasformazione di Lorentz all'equazione (I) risolvente delle equazioni di Maxwell.

Applicando la trasformazione (1) alla (I) si ottiene la seguente equazione

$$(2)\qquad (n^2-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta c\,(n^2-1)\left(\cos\varphi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial y}\right) -$$

$$- c^2\left\{(1 - n^2\beta^2\cos^2\varphi - \beta^2\sin^2\varphi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - (n^2-1)\,\beta^2\sin 2\varphi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \right.$$

$$\left. + (1 - n^2\beta^2\sin^2\varphi - \beta^2\cos^2\varphi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (1-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\} = 0.$$

Ciò posto, indichiamo con ξ, η, ζ i coseni direttori di $\boldsymbol{v}$ nel caso che $\boldsymbol{v}$ abbia una qualunque direzione rispetto ad S. Nella (2) è

$$\xi = \cos\varphi \quad , \quad \eta = \sin\varphi \quad , \quad \zeta = 0.$$

Osserviamo che la (2) si ottiene ponendo $\zeta = 0$ nella seguente equazione

$$(3)\qquad (n^2-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta c\,(n^2-1)\left(\xi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x} + \eta\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial y} + \zeta\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z}\right) -$$

$$- c^2\left\{(1 - n^2\beta^2\xi^2 - \beta^2(\eta^2+\zeta^2))\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\,(n^2-1)\,\beta^2\eta\zeta\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + \right.$$

$$+ (1 - n^2\beta^2\eta^2 - \beta^2(\zeta^2+\xi^2))\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2\,(n^2-1)\,\beta^2\zeta\xi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} +$$

$$\left. + (1 - n^2\beta^2\zeta^2 - \beta^2(\xi^2+\eta^2))\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2\,(n^2-1)\,\beta^2\xi\eta\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right\} = 0.$$

Osservando che le componenti v_x , v_y , v_z di $\boldsymbol{v}$ sono date da

$$(4) \qquad v_x = \beta c\xi \quad , \quad v_y = \beta c\eta \quad , \quad v_z = \beta c\zeta ,$$

la (3) diviene

$$(5) \qquad (n^2 - \beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2(1 - \beta^2)\Delta\Phi +$$

$$+ 2(n^2 - 1)\left(v_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x} + v_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial y} + v_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z}\right) +$$

$$+ (n^2 - 1)\left(v_x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + v_y^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + v_z^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} +\right.$$

$$\left. + 2\,v_y v_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + 2\,v_z v_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} + 2\,v_x v_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) = 0 .$$

Ma ora notiamo che

1° il gruppo dei primi due termini della (5) equivale a

$$(1 - \beta^2)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\Delta\Phi\right) + (n^2 - 1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} ;$$

2° il trinomio

$$v_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x} + v_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial y} + v_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial z}$$

è la derivata temporale del risultato dell'operazione

$$v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}$$

applicata a Φ, che talvolta chiamasi derivazione convettiva;

3° il polinomio

$$v_x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + v_y^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + v_z^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + 2\,v_y v_z\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + 2\,v_z v_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} + 2\,v_x v_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

si riduce a

$$(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})^2\Phi ;$$

4° il coefficiente di $n^2 - 1$ in (5) è

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\Phi + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)^2\Phi .$$

Ma l'operatore

$$\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}$$

esprime, secondo Lagrange e Stokes, la derivazione temporale di una funzione Φ delle quattro variabili x , y , z , t, seguendo il moto del corpo (derivata

sostanziale o molecolare o lagrangiana) e si designa con la notazione D/Dt di Stokes o anche con quella leibniziana d/dt.

In definitiva, l'equazione (5) si può scrivere nella seguente forma

$$(III') \qquad (1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\Phi\right) + (n^2-1)\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0$$

ed anche

$$(IV) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi + \frac{n^2-1}{c^2-v^2}\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0.$$

Per finire, consideriamo la (IV) nei suoi casi particolari:

1° se $\boldsymbol{v} = 0$, l'operatore d/dt si identifica con l'operatore $\partial/\partial t$ e la (IV) si riduce alla (I);

2° se $n = 1$, la (IV) si riduce alla (II);

3° nel caso che Φ sia funzione di x e t soltanto e che $\boldsymbol{v}$ abbia la direzione dell'asse x, si ha

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$$

e la (IV) si riduce all'equazione

$$(n^2-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\,\beta c\,(n^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x} - c^2\,(1-n^2\,\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

che trovasi nella mia Nota del 21 luglio;

4° nel caso che β sia una quantità piccola del 1° ordine (quindi tale che β^2 sia trascurabile di fronte all'unità), la (IV) si riduce all'equazione

$$n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\,(n^2-1)\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\,\Phi) - c^2\,\Delta\Phi = 0$$

che ho dedotta col metodo delle caratteristiche nella Nota del 21 luglio.

Le considerazioni che precedono autorizzano ad enunciare il seguente teorema generale:

Le quattro grandezze elettromagnetiche fondamentali

$$\mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{D}\,,\ \mathfrak{B}\,,\ \mathfrak{H}$$

legate fra loro dalle equazioni di Minkowski (E) debbono soddisfare all'equazione iperbolica del 2° ordine

$$(IV) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi + \frac{n^2-1}{c^2-v^2}\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0.$$

Introducendo l'operatore di d'Alembert–Lorentz

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

la (IV) assume la forma

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{c^2 - v^2}{n^2 - 1}\square\Phi. \tag{IV'}$$

Nel caso limite $v = c$, essa si riduce a

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0 \tag{IV''}$$

ed esprime che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche rispetto ad S è sempre eguale a c.

Un caso particolare notevole della (IV) si ha quando ci si domandi di soddisfare alle equazioni di Minkowski con grandezze $\mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{H}$ funzioni soltanto del posto. In tal caso occorre annullare le derivate temporali locali.

Si tratta dunque di ricercare i campi elettromagnetici stazionari neutri in un dielettrico isotropo omogeneo in moto.

Poiché in tal caso la derivazione temporale sostanziale si riduce alla derivazione convettiva e poiché le grandezze $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ sono irrotazionali, si può affermare che uno qualunque dei due potenziali ψ corrispondenti soddisfa all'equazione

$$(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})^2\,\psi = \frac{c^2 - v^2}{n^2 - 1}\Delta\psi. \tag{V}$$

Dividendo ambo i membri per v^2 e ponendo

$$\lambda^2 = \frac{c^2 - v^2}{v^2(n^2 - 1)} > 0,$$

la (V) diviene

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2} - \lambda^2\Delta\psi = 0, \tag{V'}$$

dove la $\frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2}$ è la derivata seconda del potenziale ψ nella direzione orientata di versore $\boldsymbol{\nu}$ che caratterizza il moto del mezzo.

Nel caso dei campi piani la (V') assume la forma più semplice

$$(\cos^2\varphi - \lambda^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sin 2\varphi\,\frac{\partial\psi^2}{\partial x\,\partial y} + (\sin^2\varphi - \lambda^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{VI}$$

All'equazione (IV) si può giungere anche operando direttamente sulle equazioni di Minkowski sebbene la deduzione sia meno agevole di quella che ho dianzi esposta.

Tuttavia può essere utile l'indicazione del metodo.

Conviene porre

$$p = \frac{1 - \beta^2}{1 - n^2\beta^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2 - n^2 v^2} \quad , \quad q = \frac{n^2 - 1}{1 - n^2\beta^2} - c^2 \frac{n^2 - 1}{c^2 - n^2 v^2}$$

con che si ha

$$\frac{n^2 - 1}{c^2 - v^2} = \frac{1}{c^2} \frac{q}{p} \quad , \quad p + q = \frac{n^2 - \beta^2}{1 - n^2\beta^2} .$$

Sostituendo alle equazioni di campo le espressioni di $\mathfrak{D}$ e di $\mathfrak{B}$ dedotte dalle equazioni materiali si hanno le due equazioni in $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$:

$$(E_1) \qquad \mu p \dot{\mathfrak{H}} - \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \wedge \dot{\mathfrak{E}} - \frac{\mu q}{c^2} (\boldsymbol{v} \dot{\mathfrak{H}}) \boldsymbol{v} = - c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

$$(E_2) \qquad \varepsilon p \dot{\mathfrak{E}} + \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \wedge \dot{\mathfrak{H}} - \frac{\varepsilon q}{c^2} (\boldsymbol{v} \dot{\mathfrak{E}}) \boldsymbol{v} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

e si tratta di eliminare da esse una delle due grandezze $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, per esempio la $\mathfrak{H}$.

Applicando ad entrambe la derivazione locale temporale, alla (E_1) l'operatore rot e tenendo presente che

$$- c \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \mu \boldsymbol{v} \dot{\mathfrak{H}}$$

si perviene all'equazione

$$(E_3) \qquad n^2 p^2 \ddot{\mathfrak{E}} + \frac{q^2}{c^2} \boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \ddot{\mathfrak{E}}) - q \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{E}} - \frac{n^2}{c^2} pq (\boldsymbol{v} \ddot{\mathfrak{E}}) \boldsymbol{v} -$$

$$- q \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \dot{\mathfrak{E}}) + q \operatorname{rot} \{ (\boldsymbol{v} \operatorname{rot} \mathfrak{E}) \boldsymbol{v} \} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

D'altra parte, dalla solenoidalità di $\mathfrak{D}$ si deduce che

$$(E_4) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{q}{c^2 p} \boldsymbol{v} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

(un'analoga equazione vale per $\mathfrak{H}$).

Tenendo presente che la derivata convettiva può essere espressa nella forma

$$(\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} = \boldsymbol{v} \operatorname{div} \mathfrak{E} - \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{E}),$$

la (E_3) si muta nella equazione (IV).

È appena necessario osservare che dalla (IV) si ottiene la velocità di propagazione delle onde in una direzione qualunque.

Per la linearità dell'equazione basta considerare le cosiddette soluzioni monocromatiche.

Fisica matematica. — *Sul teorema di reciprocità dello stato superconduttivo stazionario.* Nota di MARZIANO MARZIANI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

F. London ha esposto recentemente (1) una notevole teoria che inquadra, dal punto di vista della Fisica matematica, il fenomeno della superconduttività nella teoria del campo elettromagnetico. Distinta la superconduttività dalla conduttività infinita, l'Autore introduce, a sostituzione della legge di Ohm, una relazione tra campo magnetico e corrente elettrica: ciò consente d'interpretare i principali aspetti del fenomeno, rendendo conto, tra l'altro, del diamagnetismo dei superconduttori (effetto Meissner).

Le equazioni dello stato superconduttivo puro (equazioni di London) sono, nel sistema di unità gaussiane:

$$c \operatorname{rot} \lambda \boldsymbol{j}_s + \mathbf{H} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \lambda \boldsymbol{j}_s}{\partial t} - \mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

dove $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ denota il campo elettromagnetico, $\boldsymbol{j}_s$ la densità di supercorrente, c la velocità della luce nel vuoto e λ un parametro, funzione della temperatura, caratteristico del mezzo e dell'ordine di grandezza di 10^{-31} sec^2.

Al sistema (1), (2), valido all'interno del superconduttore, vanno associate, anche all'esterno, le equazioni di Maxwell:

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \boldsymbol{j} \tag{3}$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{4}$$

in cui

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_s$$

rappresenta, nel superconduttore, la densità totale di corrente, $\boldsymbol{j}_n = \gamma \mathbf{E}$ la densità di corrente normale, γ la conduttività, mentre nello spazio esterno, che supponiamo coincidente col vuoto (2), $\boldsymbol{j} = 0$ (salvo nei punti dove sono eventuali sorgenti del campo). Nel quadro dell'elettrodinamica dello stato superconduttivo stazionario, stabilisco anzitutto, in questa Nota, una relazione di reciprocità, valida in generale, e da essa deduco il teorema seguente:

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) F. LONDON, *Superfluids*, vol. I. New York, John Wiley & Sons inc. 1950. I fondamenti di tale teoria erano stati esposti in precedenza da: F. LONDON, *Une conception nouvelle de la supra-conductibilité*, « Act. scient. et ind. », Paris - Hermann & C. Editeurs, 1937; M. VON LAUE, *Theorie der Supraleitung*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1949.

(2) L'estensione al caso generale di un mezzo diverso dal vuoto non offrirebbe difficoltà.

In presenza di un superconduttore aciclico, tra i campi magnetici stazionari $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$, *generati da due dipoli magnetici, di momenti* $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$, *posti rispettivamente nei punti* O_1 *e* O_2, *esterni al superconduttore, sussiste la relazione*:

$$\mathbf{M}_1 \times \mathbf{H}_2(O_1) = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{H}_1(O_2). \tag{5}$$

Determino poi il campo generato da un dipolo posto nel centro di un involucro sferico superconduttore e dimostro che, se lo spessore dell'involucro è abbastanza grande, il campo all'esterno è praticamente nullo. Allora, per il teorema di reciprocità, si può affermare che è nullo anche il campo nel centro dell'involucro sferico, soggetto all'azione di un dipolo magnetico esterno, o, più in generale, di un generatore qualsiasi di campo magnetico, generatore che può sempre pensarsi come somma di dipoli.

1. Consideriamo un superconduttore S, dotato di n fori e quindi $(n+1)$ volte connesso, immerso nel vuoto. In condizioni stazionarie, essendo nullo, per la (2), il campo elettrico nel conduttore, $\boldsymbol{j}_n = 0$, $\boldsymbol{j}_s = \boldsymbol{j}$, siano $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ due campi magnetici regolari e $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ i potenziali vettori corrispondenti, cioè $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono i rotazionali rispettivamente di $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$.

Ricordiamo che si dice *flusso generalizzato* (*fluxoid* secondo il London) relativo al foro *r–esimo* del superconduttore l'espressione:

$$\Phi_r = \int_{\Sigma_r} \mathbf{H} \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma_r + c\lambda \int_{l_r} \boldsymbol{j} \times d\mathrm{P}$$

dove l_r è una qualsiasi curva chiusa, luogo di punti P, circondante il foro r–esimo e tutta contenuta nel superconduttore, Σ_r è una superficie avente per orlo l_r, $\boldsymbol{n}$ il versore normale a Σ_r [3].

Se indichiamo con Σ una superficie chiusa che circonda il superconduttore, sussiste la seguente relazione di reciprocità:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \sum_1^n{}_r \Phi_{1,r}\, i_{2,r} = \int_{\Sigma} (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \sum_1^n{}_r \Phi_{2,r}\, i_{1,r} \tag{6}$$

dove $\Phi_{1,r}$, $\Phi_{2,r}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ sono i flussi generalizzati che corrispondono ai campi suddetti, e $i_{1,r}$, $i_{2,r}$ le correnti totali attraverso i diaframmi ideali σ_r che, assieme alla superficie σ del dominio superconduttore lo rendono aciclico [4].

(3) Dalla (1) risulta, applicando il teorema di Stokes, che la Φ_r non dipende dalla scelta di l_r (Cfr. F. London, *Superfluids*, vol. I, p. 50.

(4) È

$$i_r = \int_{\sigma_r} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_r.$$

Per la dimostrazione è bene osservare intanto che [5]:

$$\mathbf{A}_1 + \lambda c \boldsymbol{j}_1 = \frac{c}{e} \operatorname{grad} \chi_1$$

dove χ_1 è il superpotenziale, in generale polidromo, e la carica dell'elettrone.

Ciò premesso, detto v il dominio limitato da Σ e σ, si ha, tenendo presente la prima equazione di Maxwell:

$$(7) \qquad \int_v \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 \, dv + \int_S (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 + 4\pi\lambda \boldsymbol{j}_1 \times \boldsymbol{j}_2) \, dS =$$

$$= \int_v \operatorname{div} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \, dv + \int_S \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_2 \times (\mathbf{A}_1 + c\lambda \boldsymbol{j}_1) \right\} dS = [6]$$

$$= \int_\Sigma (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} \, d\Sigma + \int_S \operatorname{div} (\chi_1 \boldsymbol{j}_2) \, dS = [7]$$

$$= \int_\Sigma (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} \, d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \sum_1^n{}_r \Phi_{1,r} i_{2,r} .$$

Scambiando tra loro gli indici, il primo membro della (7) non muta, così che ne segue tosto la (6).

2. Supponiamo ora aciclico il dominio superconduttore (e di conseguenza nulli i flussi generalizzati) e i campi magnetici $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ siano prodotti da due dipoli di momenti $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$, posti rispettivamente nei punti esterni O_1 e O_2. I potenziali vettori delle sorgenti primarie sono quindi:

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_{1,0} = -\mathbf{M}_1 \wedge \operatorname{grad} \dfrac{1}{r_1} \\ \mathbf{A}_{2,0} = -\mathbf{M}_2 \wedge \operatorname{grad} \dfrac{1}{r_2} \end{cases}$$

dove r_1, e r_2 indicano le distanze di un punto generico, rispettivamente da O_1 e O_2. Introdotte le sfere Σ_1 e Σ_2 di centri O_1 e O_2 e raggi δ_1 e δ_2 sufficientemente piccoli, la (6) continua a valere, purchè si estenda l'integrazione anche a Σ_1 e Σ_2.

(5) Cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, p. 71. Dalla (1) risulta infatti, tenendo presente che $\mathbf{H}_1$ è il rotazionale di $\mathbf{A}_1$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A}_1 + c\lambda \boldsymbol{j}_1) = 0 .$$

(6) I vettori $\mathbf{A}_1 \wedge \boldsymbol{n}$ e $\mathbf{H}_2 \wedge \boldsymbol{n}$ sono continui su σ e quindi anche $(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n}$.

(7) Tenendo conto della polidromia del superpotenziale χ_1 e del fatto che la discontinuità di χ_1 attraverso σ_r vale $\frac{e}{c} \Phi_{1,r}$ (Cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, pp. 75–76) si ha:

$$\int_S \operatorname{div} (\chi_1 \boldsymbol{j}_2) \, dS = \frac{e}{c} \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} \Phi_{1,r} \boldsymbol{j}_2 \times \boldsymbol{n} \, d\sigma_r = \frac{e}{c} \sum_1^n{}_r \Phi_{1,r} i_{2,r} .$$

Fatta tendere Σ all'infinito la (6) diventa così:

$$(9) \qquad \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 =$$

$$= \int_{\Sigma_2} (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_2 - \int_{\Sigma_2} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_2 .$$

Passando al limite nella (9) per $\delta_1 \to 0$ e $\delta_2 \to 0$ si trova che il primo e il secondo membro tendono rispettivamente al primo e al secondo membro di (5), così che questa relazione resta provata [8].

3. Passando a un'applicazione del teorema di reciprocità (5) a un particolare problema di superconduttività, prendiamo in considerazione un involucro sferico superconduttore, di centro O e raggi a e b ($a > b$). Col metodo adottato dal London per il problema della sfera superconduttrice [9], deter-

(8) Infatti, poiché in O_1 sono regolari tanto $\mathbf{H}_2$ che il potenziale vettore secondario $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_{1,0}$, dovuto alla distribuzione di supercorrente, tenuto conto della prima delle (8), si ha:

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_{1,0} \wedge \mathbf{H}_2) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 .$$

$$= - \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} \left(\mathbf{M}_1 \wedge \operatorname{grad} \frac{1}{r_1} \right) \wedge \mathbf{H}_2 \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 =$$

$$= - \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\mathbf{H}_2 (O_1)}{\delta_1^2} \times \int_{\Sigma_1} (\mathbf{M}_1 \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \boldsymbol{n} d\Sigma_1 = \frac{8}{3} \pi \mathbf{M}_1 \times \mathbf{H}_2 (O_1) .$$

Riguardo l'ultimo integrale cfr. P. BURGATTI, *Valori medi di certe funzioni e loro relazione con alcune grandezze fisiche fondamentali*, « Memorie scelte », Bologna – Zanichelli, p. 257–261 (1951). Inoltre la $\mathbf{H}_1$ non è regolare in O_1, però sono ivi regolari $\mathbf{A}_2$ e il campo secondario $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{1,0}$ ($\mathbf{H}_{1,0}$ è il campo primario del dipolo di momento $\mathbf{M}_1$). Si ha pertanto:

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{H}_{1,0}) \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 =$$

$$= \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} \left\{ \mathbf{A}_2 \wedge \operatorname{grad} \left(\mathbf{M}_1 \times \operatorname{grad} \frac{1}{r_1} \right) \right\} \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 =$$

$$= \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\mathbf{M}_1}{\delta_1^2} \times \int_{\Sigma_1} \frac{d \operatorname{grad} r_1}{d\mathrm{P}} (\mathbf{A}_2 \wedge \boldsymbol{n}) d\Sigma_1 - \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\Sigma_1} \mathbf{A}_2 \wedge \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r_1^2} \times \mathbf{M}_1 \right) \operatorname{grad} r_1 \times \boldsymbol{n} d\Sigma_1 =$$

$$= - \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\mathbf{M}_1}{\delta_1^3} \times \int_{\Sigma_1} \mathbf{A}_2 \wedge \boldsymbol{n} d\Sigma_1 = - \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\mathbf{M}_1}{\delta_1^3} \times \int_{v_1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 \, dv_1 = - \frac{4}{3} \pi \mathbf{M}_1 \times \mathbf{H}_2 (O_1) .$$

Da ciò e da quanto detto sopra, segue il primo membro di (5), e inoltre scambiando tra loro gli indici si ha subito che, al limite per $\delta_2 \to 0$, il secondo membro di (9) coincide con quello di (5). Un procedimento di dimostrazione, simile a quello qui seguìto, fu già adottato dal prof. D. GRAFFI in *Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia* (« Boll. U. M. I. », Vol. VIII, 1929) che presenta qualche analogia formale col teorema ora dimostrato.

(9) Cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, pp. 34–36.

miniamo dapprima i campi e le correnti che si hanno quando un dipolo magnetico di momento **M**, costante, è posto in O.

Preso, pertanto, un sistema di riferimento in coordinate polari (r, θ, φ) con l'asse polare parallelo a **M** e polo in O, detto K un parametro, avremo per le componenti di **H** le espressioni:

$$H_r = \left(K + \frac{2M}{r^3}\right)\cos\theta \ , \quad H_\theta = \left(-K + \frac{M}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta \ , \quad H_\varphi = 0 \qquad (r \leq b).$$

Nella regione $b \leq r \leq a$ prendiamo per ragioni di simmetria $j_r = j_\theta = 0$ e [10]

$$j_\varphi = \left\{\frac{A}{r^2}(\operatorname{senh}\beta r - \beta r\cosh\beta r) + \frac{B}{r^2}(\cosh\beta r - \beta r\operatorname{senh}\beta r)\right\}\operatorname{sen}\theta$$

con A e B costanti e $\beta^2 = 4\pi/\lambda c^2$.

Perciò dalla (1), sempre per $b \leq r \leq a$

$$H_r = \frac{4\pi}{\beta^2 cr}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(j_\varphi \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \frac{8\pi}{\beta^2 cr^3}\{A(\operatorname{senh}\beta r - \beta r\cosh\beta r) + B(\cosh\beta r - \beta r\operatorname{senh}\beta r)\}\cos\theta$$

$$H_\theta = -\frac{4\pi}{\beta^2 cr}\,\frac{\partial}{\partial r}(j_\varphi r) =$$

$$= \frac{4\pi}{\beta^2 c}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\{A(\operatorname{senh}\beta r - \beta r\cosh\beta r) + B(\cosh\beta r - \beta r\operatorname{senh}\beta r)\} +$$

$$+ \frac{4\pi}{c}\operatorname{sen}\theta\,(A\operatorname{senh}\beta r + B\cosh\beta r)$$

$$H_\varphi = 0.$$

Infine, detto C un nuovo parametro, si ha per $r \geq a$:

(10) $$H_r = \frac{2C}{r^3}\cos\theta \ , \quad H_\theta = \frac{C}{r^3}\operatorname{sen}\theta \ , \quad H_\varphi = 0.$$

Avendo assunta unitaria la permeabilità magnetica, **H** risulta continuo alla superficie del superconduttore, si ottengono così per K, A, B, C le seguenti espressioni [11]:

$$K\left\{1 + \frac{3}{\beta^2 b^3} + \frac{3}{\beta b^2}\coth\beta(a-b)\right\} = -\frac{2M}{b^3}$$

$$A = \frac{3cK}{8\pi}\,\frac{\cosh\beta a}{\operatorname{senh}\beta(a-b)} \qquad B = -\frac{3cK}{8\pi}\,\frac{\operatorname{senh}\beta a}{\operatorname{senh}\beta(a-b)} \qquad C = \frac{3}{2}\,\frac{aK}{\beta}\,\frac{1}{\operatorname{senh}\beta(a-b)}\,.$$

(10) Nel superconduttore, dove $\boldsymbol{j} = c\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H}$ soddisfa alla (1), si ha:

$$\Delta\boldsymbol{j} - \beta^2\boldsymbol{j} = 0.$$

Preso j_φ della forma $j_\varphi = f(r)\operatorname{sen}\theta$ la f dovrà soddisfare all'equazione:

$$f'' + \frac{2}{r}f' - \left(\frac{2}{r^2} + \beta^2\right)f = 0$$

il cui integrale generale è

$$f = \frac{A}{r^2}(\operatorname{senh}\beta r - \beta r\cosh\beta r) + \frac{B}{r^2}(\cosh\beta r - \beta r\operatorname{senh}\beta r).$$

(11) La conoscenza del campo magnetico applicato, nel caso del superconduttore aciclico, determina univocamente i campi e le correnti. Cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, pp. 73-76.

Risulta da ciò che se $a - b \gg \beta^{-1}$, C è praticamente nullo [12]. Il campo **H** decresce molto rapidamente nel superconduttore fino ad annullarsi. Dalla (5) si può così concludere che è nullo il campo nel centro dell'involucro sferico superconduttore, soggetto all'azione di un dipolo magnetico esterno, per quanto prossimo esso sia. Ciò mostra la proprietà di schermo dell'involucro sferico superconduttore, che si comporta come una sfera cava perfettamente diamagnetica [13].

Chimica fisica. — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli con glicol etilenico* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO, presentata (**) dal Corrisp. G. NATTA.

In una Nota precedente [1] si era studiato l'andamento del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare, in funzione della composizione, per varie miscele binarie contenenti esclusivamente alcoli.

Tale studio era stato condotto a continuazione di precedenti lavori su miscele liquide atermiche o ideali [2] e su miscele idrocarburiche [3,4]. Esso è stato effettuato confrontando i valori sperimentali delle tre grandezze citate con corrispondenti valori calcolati nell'ipotesi che tutte le miscele studiate fossero ideali. In base al segno e all'entità delle deviazioni percentuali dei valori sperimentali da quelli ideali è stato possibile differenziare le miscele in diversi gruppi, per i quali si ripetevano regolarità e comportamenti già osservati nei precedenti citati lavori su miscele di idrocarburi.

Lo studio di miscele contenenti esclusivamente alcoli, anche se ha confermato ed esteso osservazioni fatte su miscele idrocarburiche, non ha però permesso di rilevare singolarità che riflettessero con sicurezza la particolare

(12) $\beta^{-1} = c\sqrt{\lambda/4\pi} \simeq 10^{-5}$ cm rappresenta la cosiddetta *profondità di penetrazione*.

(13) Si può provare che se un dipolo magnetico è posto al centro di un involucro sferico, in condizioni non superconduttive, detta μ_1 la permeabilità magnetica dell'involucro e μ_2 quella del mezzo interno ed esterno, le componenti del campo esterno hanno espressioni uguali alle (10) con

$$C = \frac{9\,M\,a^3\,\mu_1\,\mu_2}{a^3\,(2\,\mu_1 + \mu_2)\,(\mu_1 + 2\,\mu_2) - 2\,b^3\,(\mu_1 - \mu_2)^2}\,.$$

Pertanto, nello stato superconduttivo, l'involucro sferico si comporta come una sfera cava perfettamente diamagnetica ($\mu_1 = 0$). Il diamagnetismo, del resto, è proprietà caratteristica dei superconduttori (effetto MEISSNER), cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I. pp. 51–53.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *17*, 114 (1954).

(2) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *10*, 235 (1951).

(3) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *13*, 131 (1952).

(4) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *17*, 109 (1954).

natura delle interazioni notoriamente esistenti tra molecole alcoliche. Si è pensato perciò di esaminare, a complemento del precedente lavoro, miscele a più alta concentrazione di gruppi alcolici ed in particolare miscele di alcoli e polialcoli contenenti sempre almeno un polialcol.

Nella presente Nota verranno pertanto descritti i risultati di misure dirette di densità e di velocità ultrasonora su miscele binarie di vari alcoli con glicol etilenico. In una Nota successiva saranno pubblicati i risultati su analoghe miscele contenenti glicerina in luogo di glicol etilenico.

Le tecniche sperimentali, le modalità di calcolo dei dati e le preparazioni degli alcoli utilizzati sono identiche a quelle illustrate nei precedenti lavori.

Nella Tabella I sono raccolti tutti i dati sperimentali. Oltre a miscele di vari alcoli alifatici e aliciclici con glicol, sono state studiate, per ragioni di confronto, anche miscele glicerina–glicol ed acqua–glicol.

Nella fig. 1 sono invece riportati i diagrammi delle deviazioni percentuali dei valori sperimentali dai valori ideali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare, in funzione della composizione, per tutti i sistemi che figurano nella Tabella I.

Esaminando i diagrammi si possono dedurre, in via preliminare, alcune interessanti conclusioni.

a) Nei sistemi studiati si verificano in prevalenza contrazioni di volume, talvolta di notevole entità, che raggiungono i massimi valori in miscele ad elevata concentrazione di legami idrogeno (miscele di acqua o di alcoli a basso peso molecolare con glicol).

b) Nei sistemi a contrazione di volume si hanno deviazioni di velocità esclusivamente positive, che raggiungono in qualche caso valori eccezionalmente elevati, non riscontrabili in alcuno dei sistemi esaminati in precedenza. Analoghe considerazioni possono esser fatte sull'entità delle deviazioni di compressibilità, il cui segno è naturalmente in tal caso sempre negativo.

c) Nella serie di miscele di alcoli alifatici normali primari con glicol (fig. 1, prima colonna) le deviazioni, di notevole entità con alcoli a basso peso molecolare, si attenuano a mano a mano che aumenta il peso molecolare del primo componente. Questa attenuazione non porta però, al limite, ad un annullamento delle deviazioni, ma ad un cambiamento parziale di segno, con formazione di un flesso a deviazione nulla nelle curve delle rispettive miscele. Per queste, l'ascissa corrispondente al punto di flesso individua una composizione alla quale la miscela gode di un'idealità apparente. Così, ad esempio, una miscela di alcol ottilico con l'85 % molecolare di glicol non manifesta deviazioni sensibili dall'idealità, mentre per altre composizioni si osservano relativamente accentuate deviazioni sia positive, che negative. È interessante notare che, nel nostro caso, qualora si fosse proseguito lo studio con alcoli a peso molecolare superiore a quello dell'ottilico, si sarebbe presto verificata una miscibilità parziale dei componenti.

d) Le curve delle deviazioni percentuali dei sistemi contenenti alcoli secondari, terziari o ramificati giaciono sempre per il volume e per la com-

pressibilità al disotto e per la velocità al disopra delle curve dei sistemi contenenti, come primo componente, i rispettivi alcoli normali o primari (fig. 1, seconda colonna). La differenza sembra accentuarsi nell'ordine: ramificato – secondario – terziario.

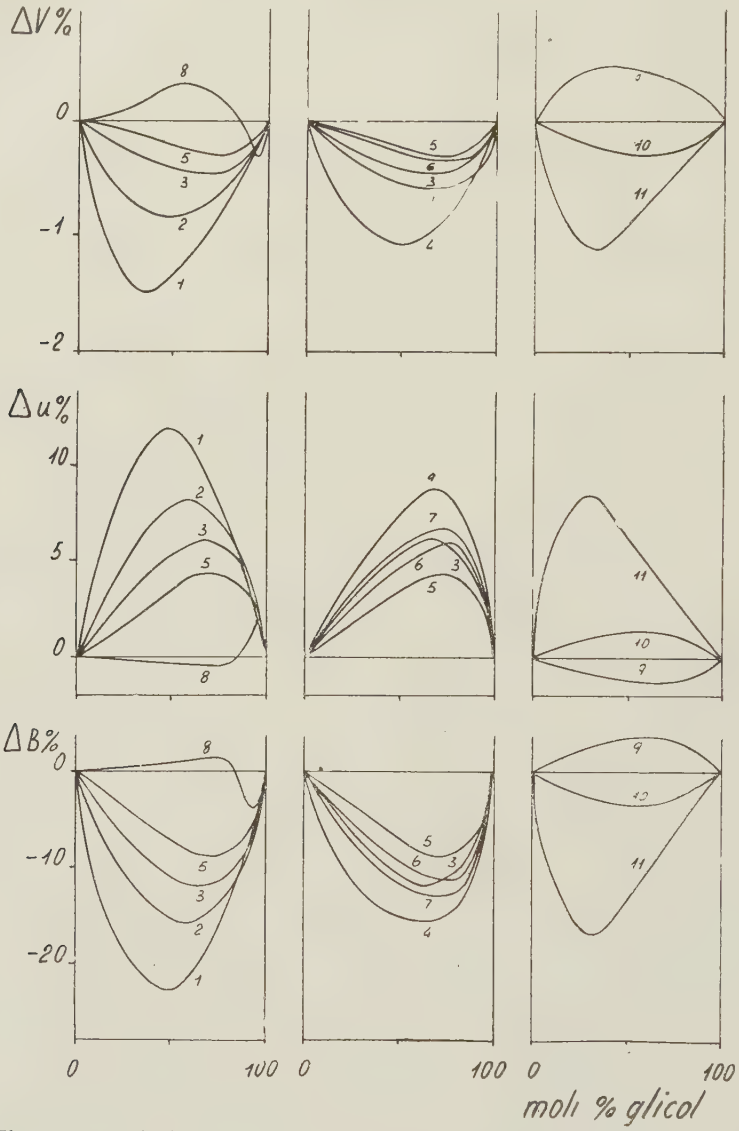


Fig. 1. – Deviazioni percentuali dai valori ideali del volume molecolare V, della velocità ultrasonora u e della compressibilità adiabatica molecolare B in miscele di vari alcoli, di acqua e di glicerina con glicol etilenico (i numeri che contrassegnano le curve corrispondono al numero d'ordine dei sistemi nella Tabella I).

e) In un dato sistema, la composizione a cui si verifica la massima deviazione percentuale di volume non sempre coincide con quella a cui si verificano le massime deviazioni percentuali di velocità e di compressibilità.

TABELLA I.

Densità ρ, *volume molecolare* V, *velocità ultrasonora u e compressibilità adiabatica molecolare* B *di miscele di vari alcoli con glicol etilenico in funzione della frazione molecolare x di glicol, a* 30° C.

n°	Componenti	x moli %	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
1	Metilico	0,00	0,7833	40,90	1094	4,28
		9,32	0,8291	42,02	1162	3,68
		17,83	0,8672	44,12	1219	3,28
		25,22	0,8969	44,16	1273	2,98
		40,99	0,9542	46,48	1365	2,56
		53,64	0,9932	48,48	1435	2,32
		57,18	1,0031	49,06	1452	2,27
		76,62	1,0539	52,23	1547	2,03
	Glicol	100,00	1,1044	56,20	1640	1,85
2	Etilico	0,00	0,7850	58,69	1144	5,60
		15,45	0,8366	58,02	1206	4,68
		21,62	0,8570	57,79	1234	4,34
		32,26	0,8919	57,44	1280	3,86
		45,43	0,9345	57,08	1346	3,31
		58,30	0,9759	56,77	1409	2,87
		82,54	1,0520	56,35	1543	2,21
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
3	n–Propilico	0,00	0,7966	75,43	1193	6,53
		24,62	0,8590	70,52	1263	5,05
		40,31	0,9028	67,45	1318	4,22
		52,62	0,9399	65,04	1369	3,62
		65,98	0,9831	62,46	1432	3,04
		74,99	1,0136	60,74	1480	2,68
		85,16	1,0498	58,85	1545	2,30
	Glicol	100,00	1,1044	56,20	1640	1,85
4	iso–Propilico	0,00	0,7772	77,32	1125	7,71
		27,02	0,8565	70,78	1229	5,37
		54,70	0,9370	65,28	1346	3,77
		79,58	1,0248	60,17	1496	2,57
		87,14	1,0532	58,69	1548	2,28
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
5	n–Butilico	0,00	0,8026	92,35	1228	7,48
		25,51	0,8554	83,06	1277	5,84
		46,73	0,9093	75,32	1336	4,55
		64,31	0,9628	68,93	1410	3,53
		77,08	1,0077	64,33	1475	2,88
		85,44	1,0409	61,31	1530	2,47
		89,31	1,0568	59,86	1558	2,29
	Glicol	100,00	1,1044	56,20	1640	1,85

Segue: TABELLA I.

n°	Componenti	x moli °/₀	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
6	iso–Butilico	0,00	0,7949	93,24	1178	8,29
		31,38	0,8630	81,51	1255	5,88
		56,25	0,9327	72,20	1343	4,21
		80,34	1,0185	63,27	1484	2,77
		90,98	1,0637	59,38	1568	2,23
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
7	iso–Amilico–ter	0,00	0,8055	109,43	1180	9,57
		30,59	0,8641	92,78	1263	6,60
		59,66	0,9399	77,23	1362	4,35
		83,54	1,0269	64,62	1502	2,74
		93,06	1,0708	59,66	1583	2,18
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
8	Ottilico (*a*)	0,00	0,8106	160,65	1325	11,07
		42,65	0,8692	116,37	1351	7,20
		42,88	0,8695	116,16	1349	7,20
		68,86	0,9365	88,94	1396	4,78
		86,02	1,0113	70,80	1485	3,11
		87,67	1,0198	69,10	1494	2,98
		94,26	1,0645	61,98	1580	2,29
		95,05	1,0688	61,23	1584	2,24
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
9	Cicloesanolo	0,00	0,9409	106,45	1448	5,29
		26,74	0,9632	93,41	1457	4,48
		52,20	0,9961	80,59	1481	3,62
		71,25	1,0306	70,85	1523	2,91
		85,63	1,0626	63,56	1563	2,40
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
10	Glicerina	0,00	1,2544	73,41	1911	1,57
		25,26	1,2253	68,97	1854	1,60
		41,05	1,2049	66,20	1815	1,64
		42,67	1,2027	65,92	1808	1,64
		63,08	1,1731	62,36	1769	1,67
		82,74	1,1309	59,05	1697	1,77
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85
11	Acqua	0,00	0,9957	17,10	1512	0,78
		7,99	1,0247	21,02	1603	0,78
		21,83	1,0572	26,13	1686	0,85
		45,82	1,0846	35,22	1705	1,09
		60,54	1,0933	40,88	1685	1,29
	Glicol	100,00	1,1047	56,19	1643	1,85

(*a*) Alcool *n*-ottilico impuro per isomeri.

Quest'ultima constatazione, a differenza delle precedenti, è in contrasto con quella, a suo tempo fatta su miscele idrocarburiche, dell'uguaglianza delle composizioni a cui si verificano le massime deviazioni percentuali delle tre grandezze considerate [5]. Per questa e per altre ragioni essa può assumere aspetti particolarmente interessanti, in relazione alla struttura dei sistemi ed alle possibilità di indagine per la via che seguiamo.

Si considerino, ad esempio, i sistemi acqua-glicol ed alcol metilico–glicol, ambedue ad alta concentrazione di legami idrogeno ed a notevoli deviazioni dall'idealità. Nel primo sistema si ha la massima contrazione di volume ad una proporzione molecolare acqua/glicol di 2/1 ed a questa stessa composizione si ha pure la massima deviazione positiva di velocità e la massima negativa di compressibilità. Nel secondo sistema, invece, si ha ancora la massima deviazione di volume ad una proporzione molecolare metanolo/glicol di 2/1, ma le massime deviazioni di velocità e di compressibilità si verificano ad una proporzione molecolare metanolo/glicol di 1/1.

Questo fatto consente di affermare non solo che i due sistemi devono corrispondere a modelli strutturali diversi, ma anche, più in generale, che la propagazione degli ultrasuoni è sensibile a fattori strutturali a cui non è sensibile il volume molecolare e viceversa.

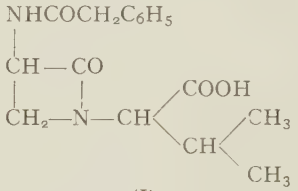
CONCLUSIONI. – Lo studio di miscele contenenti esclusivamente alcoli sulla base di misure dirette di densità e di velocità ultrasonora, sviluppato in una Nota precedente, è stato qui proseguito su miscele a più alta concentrazione di funzioni alcoliche e precisamente su una serie di miscele binarie di vari alcoli, di acqua e di glicerina con glicol etilenico come secondo componente comune.

Dall'andamento delle deviazioni dei valori sperimentali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare da corrispondenti valori ideali, è stato possibile trarre alcune conclusioni significative. *a*) I sistemi esaminati manifestano in prevalenza forti contrazioni di volume. *b*) In corrispondenza di contrazioni di volume si osservano sempre deviazioni positive ancora maggiori di velocità ultrasonora e negative di compressibilità. *c*) In serie di miscele contenenti, oltre al glicol, alcoli di serie omologa, le deviazioni diminuiscono all'aumentare del peso molecolare dell'alcol, fino a cambiare parzialmente di segno, poco prima che si verifichi l'immiscibilità parziale dei componenti (fig. 1, prima colonna). *d*) Alcoli ramificati, secondari o terziari dànno luogo a deviazioni variate sempre nello stesso senso rispetto alle deviazioni dei rispettivi alcoli normali primari (fig. 1, seconda colonna). *e*) Contrariamente a ciò che avviene in miscele idrocarburiche, in un dato sistema, le composizioni a cui si verificano le massime deviazioni percentuali del volume, della velocità e della compressibilità possono essere notevolmente diverse. Le constatazioni fatte possono fornire interessanti punti di vista nell'indagine delle proprietà strutturali delle miscele liquide in generale.

(5) Loc. cit. (3), p. 137 capov. d).

Chimica. — *Su alcune reazioni della detiobenzil–penicillina* (*). Nota di Aurelio Romeo, Luciana Capitò e Lucia Magni, presentata (**) dal Socio G. Bargellini.

La detiobenzil–penicillina (I) che, come è noto (1), si ottiene per idrogenolisi con Ni Raney dalla benzil–penicillina, è



(I)

una sostanza non ancora preparata sinteticamente e chimicamente interessante in quanto presenta una molecola particolarmente reattiva, atta a subire per azione di vari reagenti numerose modificazioni strutturali (2).

Per portare un contributo alla conoscenza delle proprietà di questa sostanza (3), sono state da noi eseguite alcune esperienze, che sono oggetto di questa Nota e che possono essere così schematizzate:

a) Comportamento della detiobenzil–penicillina al riscaldamento della sua soluzione acquosa come tale, o acida per acido cloridrico, o alcalina per idrato sodico.

b) Comportamento della detiobenzil–penicillina al riscaldamento a secco in assenza e in presenza di polvere di zinco.

c) Azione dell'idruro di Li e Al e dell'isopropilato di alluminio sull'estere metilico della detiobenzil–penicillina.

d) Titolazione in acido acetico glaciale con acido perclorico della detiobenzil–penicillina, del suo estere metilico e dell'α–benzilammide dell'acido detiobenzil–penicilloico.

L'azione sulla detiobenzil–penicillina dell'acido cloridrico in soluzione idroalcoolica 0,5 N e in soluzione di diossano è stata studiata da vari Autori

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) *The chemistry of Penicillin*, p. 256 (Princeton, New Yersey, 1949).

(2) Per quanto riguarda la letteratura fino al 1947 sulla detiobenzil penicillina rimandiamo alla esauriente monografia di Edward Kaczka e di Karl Folkers (*The Chemistry of Penicillin*, p. 243, Princeton, New Yersey, 1949). Dal 1947 in poi siamo riusciti a trovare un solo lavoro sulla detiobenzil–penicillina di Homer Adkins (« J. Am. Chem. Soc. », *70*, 2610 (1948)).

(3) Per preparare la detiobenzil–penicillina abbiamo seguìto il metodo descritto dal gruppo Merck (Merck, M. 49, 9; *The Chemistry of Penicillin*, p. 257): tuttavia abbiamo portato al metodo originale qualche piccola modifica, che riporteremo nella parte sperimentale, in modo da rendere la preparazione più agevole. Analogamente abbiamo fatto per l'estere metilico della detiobenzil–penicillina (Merck, M. 46, 9; *The Chemistry of Penicillin*, p. 261).

che sono riusciti ad isolare, nel primo caso (soluzione idroalcoolica), acido D–α–detiobenzil–penicilloico [4] (II) e acido fenilacetico [5] (VII) e nel secondo gli acidi D–α– e D–γ–detiobenzil–penicilloici e ancora cloridrato di valina [6] (V).

Le esperienze da noi eseguite ci hanno portato ai seguenti risultati:

1° Per azione di una soluzione idroalcoolica di acido cloridrico 0,5 N, sulla detiobenzil–penicillina si forma oltre all'acido D–α–detiobenzil–penicilloico (II), anche dell'acido piruvico (IV).

2° Prolungando l'azione a caldo della soluzione idroalcoolica di acido cloridrico 0,5 N sulla detiobenzil–penicillina si ha formazione di basi volatili e riscaldando una soluzione di detiobenzil–penicillina in acido cloridrico 6 N si ha formazione di anidride carbonica.

3° Riscaldando una soluzione acquosa di detiobenzil–penicillina si ha formazione ancora di acido piruvico (IV), mentre l'estere metilico nelle stesse condizioni si recupera inalterato.

4° L'estere metilico della detiobenzil–penicillina è abbastanza facilmente solubile in acido cloridrico 6 N e per rapida neutralizzazione della soluzione acida si separa inalterato.

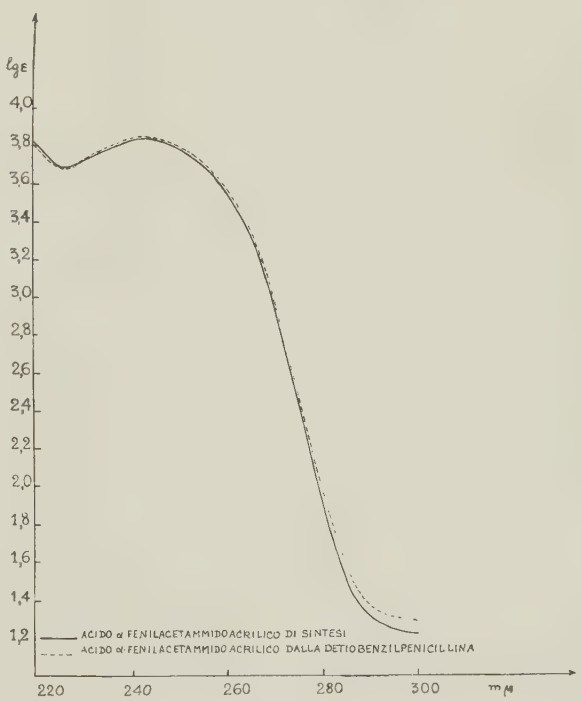


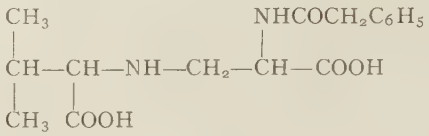
Fig. 1.

L'azione di una soluzione acquosa 0,1 N di idrato sodico sulla detiobenzil–penicillina è stata studiata dai ricercatori del gruppo Merck che hanno isolato dell'acido D–α–detiobenzil–penicilloico (II) [7] ed un composto avente punto di fusione 168° non ancora identificato.

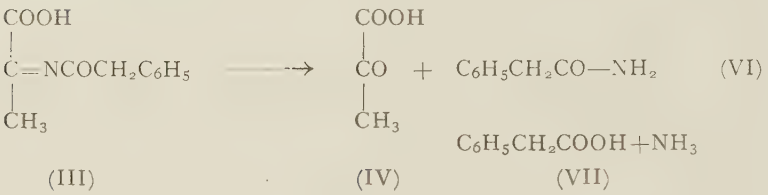
Operando nelle stesse condizioni sperimentali dei ricercatori del gruppo Merck noi abbiamo isolato tale composto e lo abbiamo identificato come acido α–fenilacetammido–acrilico (III) confrontando il suo punto di fusione ed il suo spettro di assorbimento nell'ultravioletto con quello di un campione dello stesso acido preparato sinteticamente [8] (vedi fig. 1).

(4) MERCK, M. 49, 12; 51, 2; *The chemistry of Penicillin*, p. 261.
(5) MERCK, M. 49, 11; *The chemistry of Penicillin*, p. 261.
(6) MERCK, M. 56, 9; 59, 7, 8; *The chemistry of Penicillin*, p. 262.
(7) MERCK, M. 49, 12; 51, 3; *The chemistry of Penicillin*, p. 261.
(8) A. KING, FREEMAN H. MCMILLAN, « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 835 (1950).

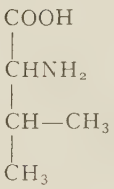
Abbiamo anche isolato, dalla miscela di reazione, della fenilacetammide (VI).



(II)



(III) (IV) (VII)



(V)

Il comportamento all'azione del calore della detiobenzil–penicillina è stato fino ad ora indagato da altri Autori soltanto per il suo estere metilico in soluzione di anisolo. Come prodotto di trasformazione è stato ottenuto il 2–benziliden 4–metil 5–ossazolone [9].

Noi abbiamo studiato il comportamento della detiobenzil–penicillina e del suo estere metilico al riscaldamento a secco a 135–140° in corrente di azoto e abbiamo osservato che nel caso della detiobenzil–penicillina si ha decomposizione con formazione di anidride carbonica, acqua, fenilacetammide e di un residuo che si presenta come una massa vetrosa, mentre nel caso del suo estere metilico non si ha decomposizione in quanto si riesce a recuperarlo in gran parte inalterato.

Sottoponendo ancora al riscaldamento una miscela intima di detiobenzil–penicillina con polvere di zinco, distilla un olio misto ad acqua. L'olio distillato copula con i sali di diazonio e presenta positive le reazioni del fuscello e di Ehrlich [10] [11].

(9) MERCK, M. 72, 8; *The Chemistry of Penicillin*, p. 264.

(10) Il pirrolo e molti suoi derivati mostrano la reazione di Runge (« Ann. Phys. », *31*, 67, (1834)), impartendo una colorazione rossa ad un fuscello di abete inumidito con acido cloridrico conc. Mostrano anche la reazione di Ehrlich e copulano con i sali di diazonio. Queste reazioni tuttavia non sono specifiche, poiché per esempio sono presentate anche da alcuni omologhi del furano (T. REICHSTEIN, « Helv. Chim. Acta », *15*, 1110 (1932)) e da alcuni composti contenenti l'anello della piridina (H. RAPOPORT, « J. Am. Soc. », *74*, 5365 (1952)).

(11) Abbiamo anche notato che sottoponendo al riscaldamento una miscela di sale sodico della benzilpenicillina con polvere di zinco, distilla fenilacetamide, acqua e un olio che presenta positive le reazioni di Ehrlich e del fuscello.

Abbiamo ancora studiato l'azione dell'idruro di litio e di alluminio e dell'isopropilato di alluminio sull'estere metilico della detiobenzil–penicillina [12].

L'estere metilico della detiobenzil–penicillina reagisce con l'idruro di litio e alluminio in tetraidrofurano dando una frazione a carattere basico dalla quale abbiamo isolato, per distillazione in alto vuoto, un prodotto i cui dati analitici (C, H, N) si accordano con la formula $C_{16}H_{26}O_2N_2$. Risulterebbero quindi delle variazioni rispetto all'estere metilico della detiobenzil–penicillina.

$$\underset{\text{estere metilico della detiobenzil–penicillina}}{C_{17}H_{22}O_4N_2} \longrightarrow \underset{\text{prodotto ottenuto per riduzione con } AlLiH_4}{C_{16}H_{26}O_2N_2}$$

Tali variazioni sarebbero dovute alle trasformazioni subìte dalle funzioni ossigenate presenti.

Riscaldando con selenio il composto ottenuto nella riduzione con idruro di litio e alluminio distilla un olio che presenta positive le reazioni del fuscello e di Ehrlich.

L'estere metilico della detiobenzil–penicillina reagisce con isopropilato di alluminio dando un prodotto avente p. f. 89–91°. Lo spettro nell'infrarosso in Nujol di questo prodotto mostra (fig. 2) rispetto allo spettro dell'estere metilico della detiobenzil–penicillina (ved. fig. 3) delle variazioni notevoli.

Degne di rilievo sono soprattutto il rinforzarsi della banda a 3,05 μ (caratteristica del legame O — H e del legame N — H), e di quella a 5,8 μ (caratteristica del legame — C = O), e l'assenza completa, nel caso del prodotto proveniente dalla reazione con isopropilato della banda a 5,69 μ (assegnata al gruppo — C = O β–lattamico).

La determinazione del peso molecolare con il metodo Rast ci ha ripetutamente fornito un peso molecolare pari a 331; i dati analitici (C, H, N) si accorderebbero con la formula $C_{18}H_{24}N_2O_4$.

Il contenuto in carbonio dedotto dalle analisi (C_{18} rispetto a C_{17} della sostanza di partenza) fa però ritenere probabile che la sostanza, nonostante presenti i caratteri di un composto puro (abito cristallino e punto di fusione costante) sia in realtà una miscela difficilmente risolvibile.

Ci proponiamo pertanto di continuare lo studio di questo prodotto per chiarire ulteriormente la sua costituzione.

Analogamente a quanto è stato fatto sulla sodiobenzil–penicillina [13] abbiamo titolato con acido perclorico in acido acetico glaciale la detiobenzil–penicillina e il suo estere metilico. (La soluzione di acido perclorico in acido acetico glaciale deve essere preparata di recente). La titolazione eseguita potenziometricamente ci ha permesso di stabilire per la detiobenzil–penicil-

(12) L'azione dell'idruro di litio e alluminio e dell'isopropilato di alluminio sulla detiobenzil–penicillina e sul suo estere metilico non è stata ancora studiata da altri ricercatori.

(13) «C.P.S.», 88, 44.

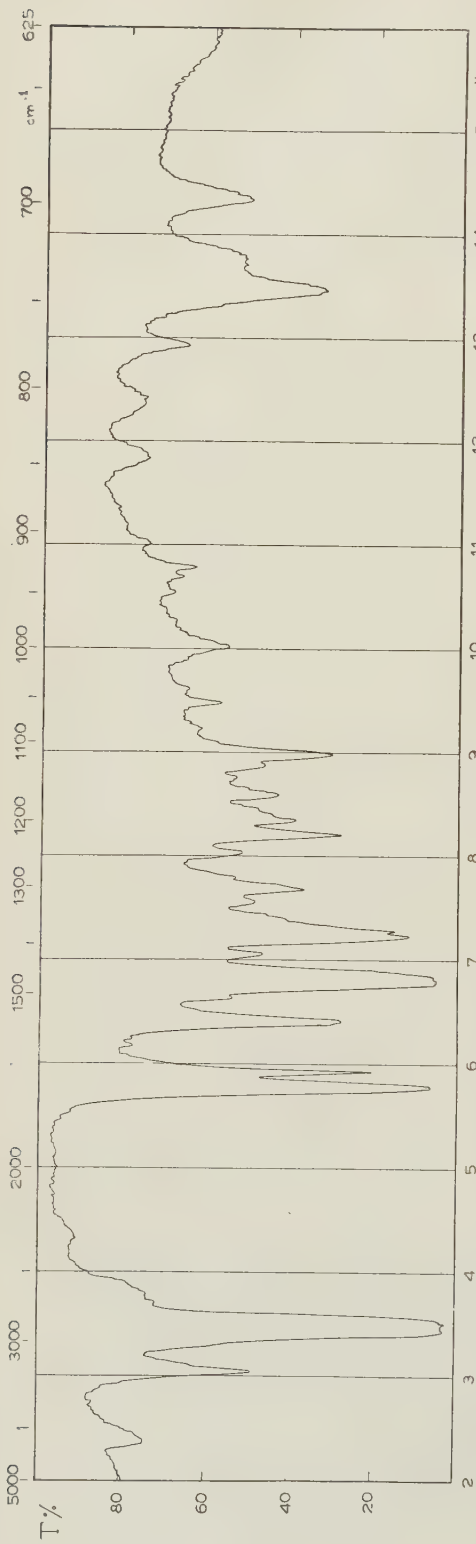


Fig. 2. – Spettro nell'infrarosso del prodotto ottenuto per trattamento con isopropilato di alluminio dell'estere metilico della detiobenzil-penicillina.

lina (ved. fig. 4) un peso equivalente pari a 313 (calcolato 304,34) e per il suo metilestere (ved. fig. 4) un peso equivalente pari a 324 (calcolato 318,36). Tuttavia non siamo riusciti ad isolare dopo la titolazione, i prodotti inalterati.

È da tenere presente che la titolazione richiede un tempo notevole poiché l'equilibrio dopo ogni aggiunta di reattivo si raggiunge lentamente.

Per cercare di indagare quale dei due azoti presenti nella molecola della detiobenzil–penicillina è titolato dall'acido perclorico in acido acetico gla-

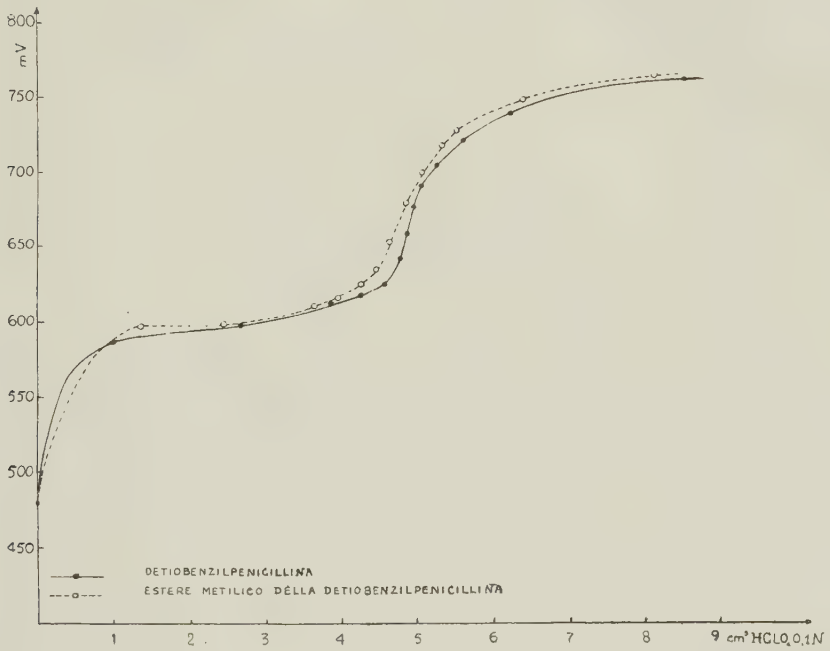
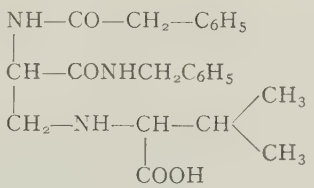


Fig. 4. – Titolazione della detiobenzil–penicillina e del suo estere metilico con $HClO_4$ 0,1 N in CH_3COOH glaciale (usati 0,1550 g di D.B.P. e 0,1540 g di estere metilico della D.B.P.).

ciale, abbiamo preparato l'α–benzilammide dell'acido D–α–detiobenzil–penicilloico (VIII) per azione della benzilammina sulla detiobenzil–penicillina in diossano secondo il metodo descritto dal gruppo Merck [14]



(VIII)

(14) MERCK, M. 52, 8; *The chemistry of Penicillin*, p. 262.

La titolazione potenziometrica di questo composto eseguita come nel caso della detiobenzil–penicillina (con acido perclorico in acido acetico glaciale) ci ha permesso di stabilire per l'α–benzilammide (ved. fig. 5) un peso equivalente pari a 446 (calcolato 411,49).

Questo risultato mette in evidenza che, titolando l'α–benzilammide dell'acido D–α–detiobenzil–penicilloico con acido perclorico in acido acetico glaciale, l'unica funzione che viene titolata è quella amminica e non le due ammidiche presenti.

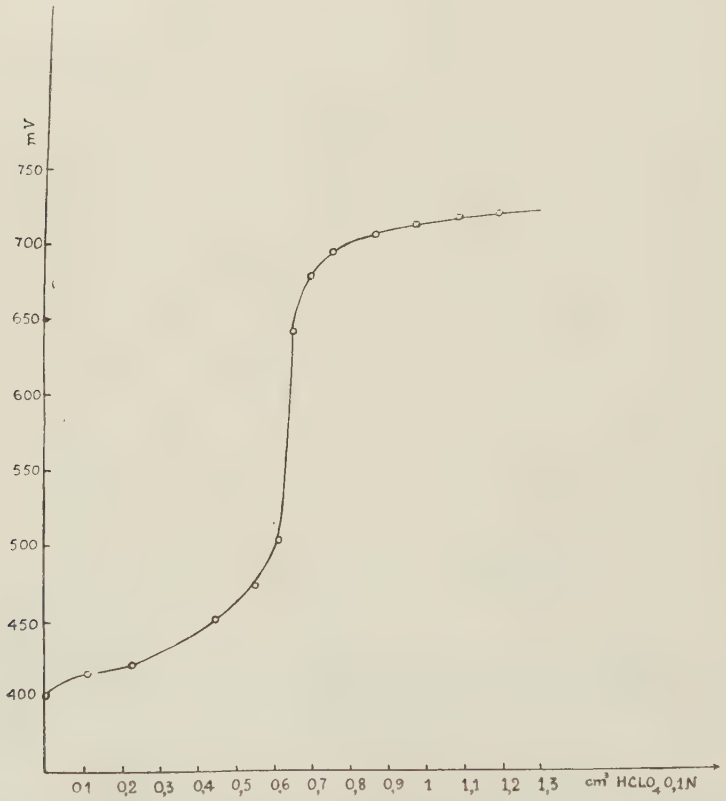


Fig. 5. – Titolazione dell'α–benzilammide dell'acido detiobenzil–penicilloico con $HClO_4$ 0,1 N in CH_3COOH glaciale (usati 0,029 g di α–benzilammide).

Avendo presente la nota complessità che la detiobenzil–penicillina e la penicillina stessa presentano nel loro comportamento chimico, non ancora peraltro chiarito in alcuni suoi aspetti, i risultati delle esperienze qui riportate non si prestano facilmente ad una interpretazione univoca. Nuovi dati che speriamo di ottenere riteniamo siano indispensabili a tal fine. Tuttavia alcuni dei risultati ottenuti appaiono fin d'ora non privi di interesse e in modo particolare:

1° La formazione di acido piruvico e basi volatili dalla detiobenzil–penicillina per riscaldamento con acido cloridrico 0,5 N.

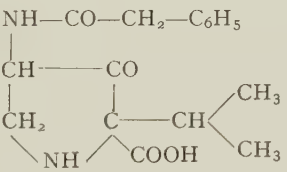
2° La formazione di acido α–fenilacetammido acrilico dalla detiobenzil–penicillina per riscaldamento con idrato sodico 0,1 N.

3° I prodotti che si ottengono con isopropilato di alluminio e con idruro di litio e alluminio.

4° La facile decarbossilazione cui va soggetta la detiobenzil–penicillina in ambiente acido o per semplice fusione.

5° Il comportamento della detiobenzil–penicillina e del suo estere metilico, analogo a quello dell'α–benzilammide dell'acido detio–benzilpenicilloico, nella titolazione in acido acetico glaciale con acido perclorico.

In base ai dati su citati e a quelli già acquisiti in questo settore, pensiamo che sarebbe ad esempio interessante conoscere il comportamento chimico di un acido β–pirrolidonico (ed estere) della seguente struttura (IX) (isomera con quella della detiobenzil–penicillina)



(IX)

o di modelli analoghi non ancora noti in letteratura.

Tali composti dovrebbero infatti fornire gran parte delle nuove reazioni descritte per la detiobenzil–penicillina in questo lavoro e potrebbero inoltre rivelare molte analogie di comportamento al confronto con quanto già noto per questa sostanza.

PARTE SPERIMENTALE [15].

Preparazione della detiobenzil-penicillina. – 90 g di nichel raney sono introdotti in 1100 cm³ di acqua, la miscela viene riscaldata fino a 70° mantenendo una continua agitazione, si aggiungono quindi 15 g di sodio benzil–penicillina sciolti in 100 cm³ di acqua. Dopo circa 15 minuti di agitazione e riscaldamento (non fare superare i 95°) la miscela si raffredda rapidamente fino a temperatura ambiente.

Si filtra e si lava la lega 5 volte con 50 cm³ di acqua ogni volta. Al filtrato si aggiungono 30 cm³ di acido cloridrico 1 N, si separa in tal modo subito allumina che viene allontanata con immediata filtrazione.

(15) I punti di fusione sono stati determinati in un blocco di rame. Non sono stati corretti.

Le analisi (C, H, N, Rast) sono state eseguite nel laboratorio di Chimica Organica dell'Eidg. Technischen Hochschule, Zürich, dal Sig. W. Manser tranne la determinazione dell'azoto del prodotto che si è dimostrato essere acido α–fenilacetammido acrilico, che è stata eseguita da noi. Gli spettri nell'infrarosso sono stati eseguiti nel laboratorio di chimica organica dell'Eidg. Technischen Hochschule, Zürich, dal Sig. A. Hübscher usando uno spettrofotometro di Baird doppio raggio con prisma di NaCl.

Gli spettri nell'ultravioletto sono stati eseguiti da noi con uno spettrofotometro di Beckmann D. U. usando come solvente alcool etilico al 95 %.

Le titolazioni potenziometriche sono state eseguite da noi con un potenziometro di Beckmann. Elettrodi: indicatore, quello di vetro; di riferimento uno a calomelano saturo del tipo a immersione diretta.

Il filtrato si acidifica a viraggio rosso Congo con acido cloridrico 1 N e si porta in ghiacciaia, si inizia la precipitazione della detiobenzil–penicillina che si completa in un giorno o due (mantenendo sempre la soluzione in ghiacciaia). Si filtra e si ottengono così 7 g di detiobenzil–penicillina p. f. 105–109°. Dopo cristallizzazione da alcool etilico–acqua il prodotto fonde a 109–110°.

Preparazione dell'estere metilico della detiobenzil–penicillina. – La detiobenzil–penicillina è sciolta nella minima quantità di acetato di etile, questa soluzione fredda è trattata con una soluzione eterea di diazometano usandone un leggero eccesso (per 1 mole di detio, 1,5 moli di diazometano). Per evaporazione sotto vuoto si ha un olio che viene sciolto in cloroformio; a questa soluzione si aggiunge etere di petrolio fino a quando si ottiene un intorbidamento: si hanno così cristalli di detiobenzil–penicillina metilestere che fondono a 108°.

Azione dell'acido cloridrico a varie concentrazioni sulla detiobenzil–penicillina. – 1° Si fanno bollire a ricadere in corrente di azoto per 1/2 ora g 0,5 di detiobenzil-penicillina in 60 cm³ di acido cloridrico 0,5 N. Dopo raffreddamento si aggiunge una soluzione di dinitrofenilidrazina preparata secondo S.M.McElvain [16]. Si ottiene un precipitato che fonde, dopo ripetute cristallizzazioni da alcool metilico, a 210°, e fu identificato per il dinitro–fenilidrazone dell'acido piruvico mediante il p. f. in miscela e l'analisi:

	trov. %	C	40,47	H	2,88
per $C_9H_8N_4O_6$	calc.		40,30		3,01

2° Si fanno bollire in corrente di azoto per 6 ore 0,5 g. di detiobenzil–penicillina in 60 cm³ di acido cloridrico 0,5 N. Si alcalinizza con idrato sodico e si distilla in corrente di vapore: per 1 mole di detiobenzil–penicillina si raccolgono 0,8 moli di basi volatili.

3° Si fanno bollire per 4 ore a ricadere in corrente di azoto privo di anidride carbonica 0,5 g di detiobenzil–penicillina in 8 cm³ di acido cloridrico 6 N; per una mole di detiobenzil–penicillina si sono raccolte circa 0,12 moli di anidride carbonica determinata come carbonato di bario.

4° L'estere metilico della detiobenzil–penicillina è solubile in acido cloridrico 6 N e per neutralizzazione della soluzione, dopo alcuni minuti, si separa inalterato..

Comportamento al riscaldamento della soluzione acquosa della detiobenzil–penicillina. Riscaldando all'ebollizione per 30 minuti la soluzione acquosa allo 0,5 % circa della detiobenzil–penicillina si forma acido piruvico isolato come dinitrofenilidrazone (p. f. 210°). Invece l'estere metilico della detiobenzil-penicillina rimane praticamente inalterato anche dopo ebollizione a ricadere per 90 minuti in soluzione acquosa allo 0,5 %.

Comportamento della soluzione acquosa–alcalina della detiobenzil–penicillina al riscaldamento. – Si riscalda all'ebollizione per 15 ore la soluzione di 1 g di detiobenzil–penicillina in 100 cm³ di soluzione 0,1 N di idrato sodico. Si estrae la soluzione alcalina 5 volte con 20 cm³ di cloroformio ogni volta. La soluzione cloroformica essiccata su solfato sodico dà per concentrazione 30 mg. di un composto cristallino a p. f. 154°, che è stato identificato come fenilacetammide mediante il punto di fusione in miscela. La soluzione acquosa–alcalina è stata acidificata con 12 cm³ di HCl 1 N, ed estratta 5 volte con 20 cm³ di cloroformio ogni volta. La soluzione cloroformica essiccata su solfato sodico dà per concentrazione 180 mg di un solido che cristallizzato da acetato di etile–etere di petrolio fonde a 166–167° e non dà depressione del punto di fusione in miscela con acido α–fenilacetammido acrilico preparato per sintesi

	trov. %	N	6,97
per $C_{11}H_{11}NO_3$	calc.		6,83

(16) *The characterization of organic compounds*, p. 132 (The McMillan Company, New York, 1953).

Riscaldamento a 135-140° della detiobenzil-penicillina in corrente di azoto. – Si riscaldano a 135–140° in corrente di azoto esente da anidride carbonica 0,51 g di detiobenzil-penicillina. Dopo 3 ore di riscaldamento per 1 mole di detiobenzil-penicillina si ottengono 0,5 moli di acqua e 0,3 moli di anidride carbonica. Riscaldando sotto vuoto a 138° il prodotto rimasto, si ottiene un sublimato (p. f. 154°) costituito da fenilacetammide. Il residuo è una sostanza dall'aspetto vetroso.

L'estere metilico della detiobenzil-penicillina riscaldato nelle stesse condizioni non si altera sensibilmente e si recupera in gran parte inalterato.

Distillazione con polvere di zinco della detiobenzil-penicillina. – 6 g di detiobenzil-penicillina intimamente mescolati con 150 g. di polvere di zinco sottilissima vengono posti in palloncino codato e riscaldati in bagno a lega mantenuto alla temperatura di 350–400°.

Distilla dell'acqua insieme ad un olio che viene ripreso con 30 cm^3 di etere etilico. La soluzione eterea seccata su solfato sodico, per evaporazione dell'etere ha dato un residuo oleoso giallo i cui vapori impartiscono ad un fuscello di abete inumidito con acido cloridrico concentrato una intensa colorazione rossa. Con il reattivo di Ehrlich (soluzione cloridrica di para-dimetilammino-benzaldeide) la sostanza, a freddo, dà colorazione rossa.

Con il cloruro di fenildiazonio, la sostanza in ambiente alcalino, dà una intensa colorazione rossa e con il cloruro di p-nitro-fenildiazonio dà una colorazione viola tendente al nero.

Azione dell'idruro di litio e alluminio sull'estere metilico della detiobenzil-penicillina. – 2,4 g di $AlLiH_4$ sono versati in 30 cm^3 di tetraidrofurano. Si aggiunge quindi una soluzione di 1,4 g di metilestere della detio in 20 cm^3 di tetraidrofurano. Si lascia in agitazione per 4 ore; dopo 12 ore di riposo si aggiungono altri 0,5 g di $AlLiH_4$ e si riscalda a ricadere con agitazione per 4 ore. Si aggiunge dell'acetato d'etile a poco a poco raffreddando per distruggere l'eccesso di $AlLiH_4$ e si eliminano i solventi sotto vuoto. Il residuo viene solubilizzato con una soluzione acquosa di sale di Seignette ed estratto con etere, con un estrattore continuo, per 24 ore. La soluzione eterea viene seccata su solfato sodico e quindi concentrata. Il residuo del peso 1,7 g distillato in alto vuoto in un « tubo a bolle » dà, dopo piccole frazioni di testa a 25° e a 125° una frazione di 0,8 g a 175°. I risultati dell'analisi della frazione *a* p. eb. 175° sono stati i seguenti:

trov. % C 69,30 H 9,11 N 9,41

che si accordano abbastanza soddisfacentemente con la formula $C_{16}\ H_{26}\ N_2\ O_2$.

per $C_{16}H_{26}N_2O_2$ calc. % C 69,03 H 9,41 N 10,06

Azione dell'isopropilato di alluminio sull'estere metilico della detiobenzil-penicillina. – Si trattano 0,2 g di estere metilico della detiobenzil-penicillina con 0,25 g di isopropilato di alluminio e 2 cm^3 di alcool isopropilico anidro.

Si fa bollire a ricadere per un'ora in bagno di olio, si toglie l'acqua del refrigerante, si collega con un refrigerante discendente e si continua il riscaldamento (temperatura del bagno 120–130°). Si porta a secco il residuo sotto vuoto, si acidifica con acido cloridrico 0,1 N fino a viraggio del rosso Congo e si estrae con cloroformio; la soluzione cloroformica, seccata su solfato sodico, viene concentrata a pressione ridotta; rimane un olio incolore che viene ripreso con poco cloroformio e trattato con etere di petrolio fino ad intorbidamento. Si separano cristalli aghiformi a p. f. 89–91° che tale si mantiene anche per ripetute cristallizzazioni da cloroformio-etere di petrolio.

L'analisi elementare ha dato i seguenti valori:

trov. % C 65,16 H 7,31 N 8,41

La determinazione del peso molecolare con il metodo Rast ci ha ripetutamente fornito un peso molecolare pari a 331. I dati analitici fino ad ora ottenuti si adatterebbero con un composto avente come formula grezza $C_{18}H_{24}N_2O_4$.

per $C_{18}H_{24}N_2O_4$ calc. % C 65,04 H 7,28 N 8,43.

Chimica. — *Spettri d'assorbimento del pirrolo e dell'α-pirrolaldeide nella regione ultrarossa tra 400 e 700 cm⁻¹*. Nota di Paolo Mirone e Cesare Bonino (jr.), presentata (*) dal Socio G. B. Bonino.

Abbiamo ripreso gli spettri del pirrolo, N–metilpirrolo e α–pirrolaldeide nella zona tra 400 e 700 cm^{-1} servendoci di uno spettrofotometro Beckman IR2 a registrazione diretta, fornito di monocromatore con prisma in bromuro di potassio. La scala di lunghezze d'onda di questo monocromatore è stata tarata misurando i massimi di assorbimento dell'alcool metilico allo stato di vapore [1]. La larghezza della fenditura, che veniva fatta variare con continuità durante le registrazioni, assumeva i seguenti valori: a 23 μ 2,85 mm (4,8 cm^{-1}); a 20 μ 1,69 mm (4,9 cm^{-1}); a 15 μ 0,60 mm (5,1 cm^{-1}).

Il *pirrolo* usato per le esperienze era sintetico e di provenienza Eastman Kodak; esso veniva distillato a pressione ridotta e subito dopo una goccia del prodotto veniva schiacciata tra due lastrine di KBr e osservata allo spettrofotometro. La tabella I dà le frequenze (in cm^{-1}) dei massimi del pirrolo puro, confrontate con le frequenze, u. r. e Raman, trovate da precedenti autori.

Tabella I.

Pirrolo.

Ultrarosso				Raman	
Questo lavoro	Manzoni e Rolla [6] (1938)	Lord e Miller [2] (1942)	Randall, Fowler, Fuson e Dangl (1949) [7]	Bonino e Manzoni [8] (1936)	Lord e Miller [2] (1942)
561 (9)	↑	↑	↑	574 (0)	545–585 (0)
—	↓	|	|	—	618 (0)
652 (4)	647 (m)	|	↓	649 (1)	647 (3)
—	—	↓	—	708 (2)	711 (3)
734 (10)	728 (ff)	768 (f)	736 (10)	—	—

Lord e Miller [2], che hanno fatto una completa assegnazione delle frequenze del pirrolo, attribuiscono la frequenza di 545–585 cm^{-1} (450 nel pirrolo N–deuterato) all'oscillazione di deformazione « fuori dal piano » del gruppo

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

NH, quella di 647 cm^{-1} a una oscillazione piana del nucleo che interessa sopratutto i quattro atomi di carbonio, e quella di 768 cm^{-1} all'oscillazione « fuori dal piano » dei 5 atomi di idrogeno in fase tra di loro. Riguardo a questa ultima frequenza notiamo che gli altri autori trovano un valore (circa 730 cm^{-1}) sensibilmente più basso di quello di Lord e Miller; ciò è probabilmente dovuto al fatto che la frequenza di 768 cm^{-1} era circa al limite del campo esplorato da questi autori. Comunque la validità dell'assegnazione di Lord e Miller non viene compromessa dalla modificazione da apportarsi al valore della loro frequenza.

Per confermare l'attribuzione della frequenza di 545–585 cm^{-1} (nei nostri spettri 561 cm^{-1}) all'oscillazione «fuori dal piano» del gruppo NH, abbiamo registrato gli spettri di diverse soluzioni di pirrolo in tetracloruro di carbonio. Se l'attribuzione è giusta, la banda a 561 cm^{-1} deve mostrare un comportamento analogo a quello manifestato in soluzione dalla banda a 3395 cm^{-1}, dovuta all'oscillazione di valenza del gruppo NH [3] [4], con la differenza che, trattandosi nel nostro caso di una oscillazione di deformazione, la componente dovuta ai gruppi NH liberi deve manifestarsi a una frequenza più bassa di quella dovuta ai gruppi NH associati. La fig. 1 mostra che queste previsioni si verificano esattamente: la banda dei gruppi NH liberi ha una frequenza di 503 cm^{-1} nel pirrolo 0,53 M, di 504 cm^{-1} nel pirrolo 1,39 M; inoltre è molto più stretta della banda degli NH associati (larghezza a mezza intensità 24 cm^{-1} contro 58 cm^{-1}).

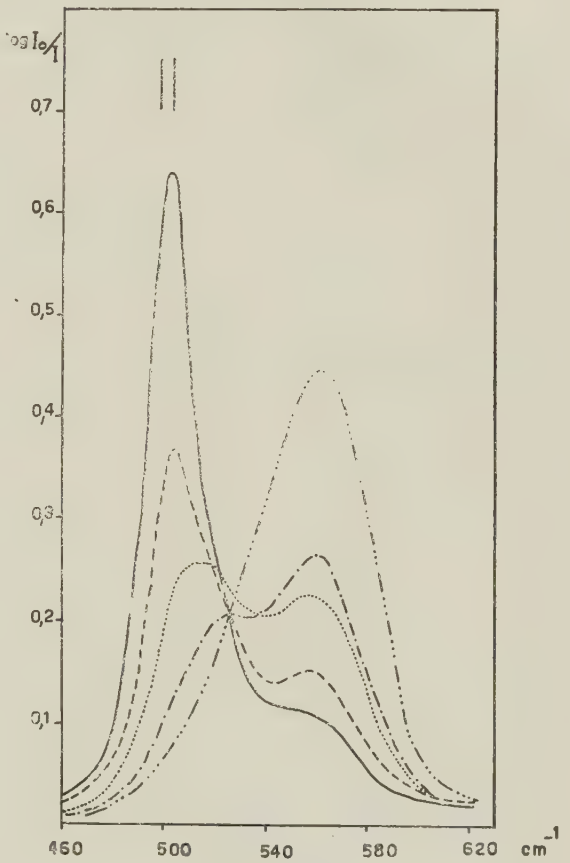


Fig. 1. – Pirrolo in CCl_4

a) — ·· — ·· — 14,4 M (pirrolo puro); $d = \sim 0{,}01$ mm.
b) — · — · — · — 5,93 M; $d = 0{,}040$ mm.
c) ····· 2,97 M; $d = 0{,}040$ »
d) — — — — — 1,39 M; $d = 0{,}040$ »
e) ———— 0,53 M; $d = 0{,}109$ »

N. B. – Per la curva *a*), i valori sulla scala delle estinzioni vanno moltiplicati per 2,5, per la curva *b*) vanno moltiplicati per 4, e per la curva *c*) vanno moltiplicati per 2.

D'altra parte, lo spettro di una soluzione 1,29 M di pirrolo in piridina mostra chiaramente, nonostante la presenza di una forte banda del solvente

a 605 cm^{-1}, che il massimo del pirrolo si sposta tra i 580 e i 590 cm^{-1}, probabilmente perché tra pirrolo e piridina si formano associazioni più intense che tra pirrolo e pirrolo.

L'*α–pirrolaldeide* è stata preparata in questo Istituto, allo stato di alta purezza, da uno di noi (Bonino jr.). Essa è stata osservata allo stato

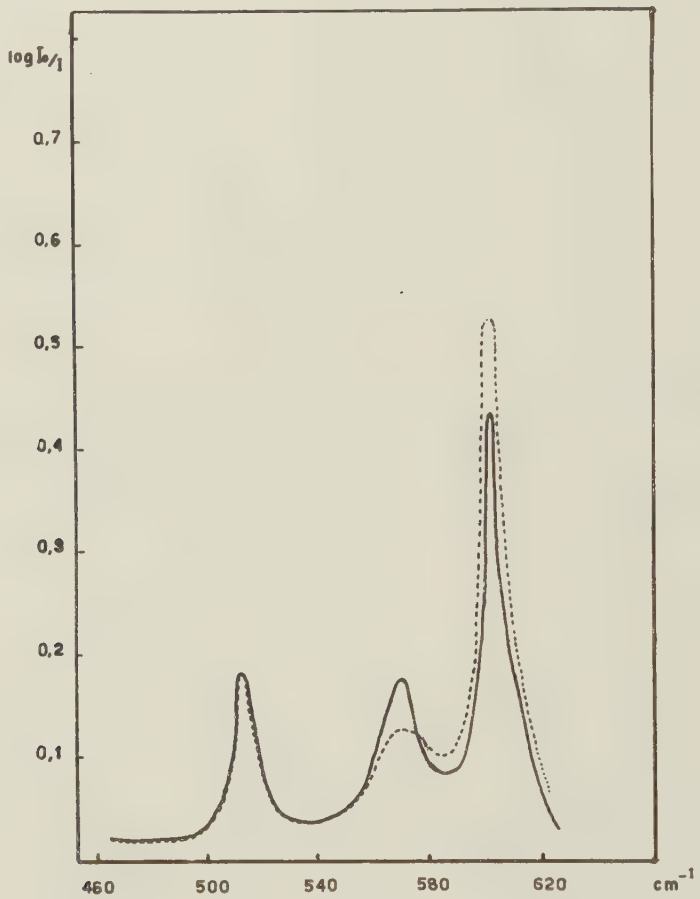


Fig. 2. – α–Pirrolaldeide in CCl_4.

———————— 2,75 M ; d = 0,040 mm.
———————— 1,00 M ; d = 0,109 »

cristallino come pasta con olio di vaselina, e in soluzione di tetracloruro di carbonio a due diverse concentrazioni.

Assumendo provvisoriamente per l'interpretazione dello spettro il modello « carbonilico » dell'aldeide pirrolica, la banda a 606–608 cm^{-1} può essere attribuita alla vibrazione « fuori dal piano » del gruppo NH. Infatti essa mostra in soluzione lo stesso comportamento della banda a 561 cm^{-1} del pirrolo, con la sola differenza che nel caso dell'α–pirrolaldeide il rapporto delle intensità delle due componenti (606–571 cm^{-1}) è meno sensibile alle varia-

zioni di concentrazione (fig. 2). Ciò si verifica del resto anche per la banda a 3270 cm^{-1} della pirrolaldeide, dovuta all'oscillazione di valenza del gruppo NH [5], e deve essere attribuito al fatto che le associazioni intermolecolari sono assai più intense nella pirrolaldeide che nel pirrolo. La banda a 650 cm^{-1} è naturalmente da mettere in relazione con quella a 652 del pirrolo, e può essere attribuita alla stessa oscillazione nucleare che dà origine a quest'ultima. Ciò può considerarsi come una ulteriore prova a favore di una struttura « carbonilica », certamente chelata, della pirrolaldeide, in quanto alla struttura « ossimetilenica » dovrebbero competere delle frequenze nucleari diverse da quelle del pirrolo.

TABELLA II.

2–Pirrolaldeide.

Ultrarosso		Raman	
Cristallina	Soluzione in CCl_4	Cristallina BONINO e CHIORBOLI [9] (1951)	Soluzione in C_6H_6 GHIGI e CHIORBOLI [10] (1951)
522 [3]	512 [3]	507 [1]	508 [2]
531 [4]	—	—	—
—	571 [3]	—	—
608 [6]	606 [7]	—	—
—	650 [2]	—	—

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. BORDEN, « J. Chem. Phys. », *6*, 553 (1938).
[2] R. C. Lord e F. A. MILLER, « J. Chem. Phys. », *10*, 328 (1942).
[3] P. MIRONE, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *11*, 365 (1951).
[4] N. FUSON, M. L. JOSIEN, F. L. POWELL e E. UTTERBACK, « J. Chem. Phys. », *20*, 145 (1952).
[5] Lavoro in corso di pubblicazione.
[6] R. MANZONI–ANSIDEI e M. ROLLA, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VI, *27*, 410 (1938).
[7] RANDALL, FOWLER, FUSON e DANGL, *Infrared Determination of Organic Structures*, New York 1949, p. 221.
[8] G. B. BONINO e R. MANZONI–ANSIDEI, « La Ricerca Scient. », II, *7*, I, 510 (1936).
[9] G. B. BONINO e P. CHIORBOLI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *11*, 247 (1951).
[10] E. GHIGI e P. CHIORBOLI, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna », 1951, p. 89.

Chimica inorganica. — *Ortocobaltiti di elementi delle terre rare*[*]. Nota di Assunta Ruggiero e Riccardo Ferro, presentata[**] dal Socio L. Rolla.

Continuando alcuni studi sugli ossidi doppi delle terre rare con diversi metalli, dopo quelli con Al, Cr, Fe[1] e Ga[2] abbiamo preparato ora i corrispondenti composti con Co.

Questi cobaltiti, di formula generale $(T \cdot R)CoO_3$, sono stati ottenuti mescolando in rapporto stechiometrico le polveri dei sesquiossidi di partenza, preparando dalla miscela una pastiglia alla pressa idraulica, scaldando per circa mezz'ora a 1350° C, ricuocendo per una trentina di ore a 900°–950° e raffreddando poi rapidamente fino a temperatura ambiente; in condizioni, cioè, identiche a quelle impiegate per i precedenti composti.

Per gli elementi delle terre rare i cui ossidi più stabili non sono del tipo $(T \cdot R)_2O_3$, è stato usato, per il praseodimio, il Pr_6O_{11} che si riduce direttamente nel combinarsi con l'ossido di cobalto, analogamente a quanto è stato osservato con Al, Cr, Fe, Ga. Per il cerio, invece, sempre in analogia con quanto visto precedentemente, sono state fatte prove pressando opportuni miscugli di ossidi di cobalto con Ce e CeO_2 (oppure con Co e CeO_2), saldando nel vuoto il blocchetto in un'ampolla di quarzo e sottoponendo al solito trattamento termico. Si è osservato che la reazione procede in modo violentemente esotermico: in sei casi su otto è seguita l'esplosione dell'ampolla; indipendentemente da ciò non si è potuto comunque ottenere così $CeCoO_3$.

Sono state fatte altre prove scaldando a 1300° le pastiglie chiuse dentro una bomba di ferro saldata, oppure a 1400° protette da $BaCl_2$ fuso e ricuocendo lungamente, o infine in corrente di idrogeno. Nei vari casi sono state prodotte sostanze di diverso aspetto ma non si è mai ottenuto $CeCoO_3$ puro. Per alcuni campioni, infatti, all'esame roentgenografico appaiono sul fotogramma delle polveri delle righe che potrebbero appartenere a $CeCoO_3$, ma sono mescolate con altre (generalmente di CeO_2) e troppo deboli per poter affermare con sicurezza la formazione nelle suddette condizioni di questo composto.

Dei vari cobaltiti, i prodotti ottenuti ($LaCoO_3$, $PrCoO_3$, $NdCoO_3$, $SmCoO_3$, $GdCoO_3$), fragili molto duri, analogamente agli ortoferriti, sono ferromagnetici se temprati da 1300° mentre perdono questa proprietà per ricottura a temperatura inferiore; il loro colore è grigio–bruno scuro salvo quello col gadolinio che è grigio rosa scuro.

I vari campioni all'esame roentgenografico, condotto col metodo delle polveri (radiazione $K_\alpha Fe$, disposizione Straumanis) mostrano una struttura di

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Lavoro presentato al VII Congresso Nazionale di Chimica Pura ed Applicata (Genova, maggio–giugno 1954), in corso di stampa.

(2) A. Ruggiero e R. Ferro, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *17*, 48 (1954).

tipo perowskitico più o meno deformato. Si osserva al solito una diminuzione abbastanza regolare delle dimensioni reticolari al crescere del numero atomico della terra rara e contemporaneamente una progressiva deformazione della cella.

Per $SmCoO_3$ e $GdCoO_3$ si hanno delle deformazioni simili a quelle presenti in $SmFeO_3$ e $GdFeO_3$ per quanto minori, $NdCoO_3$ è praticamente cubico ideale e $LaCoO_3$ e $PrCoO_3$ differiscono invece da tutti i precedenti in quanto romboedrici. Precisamente per questi ultimi composti risultano (dal calcolo

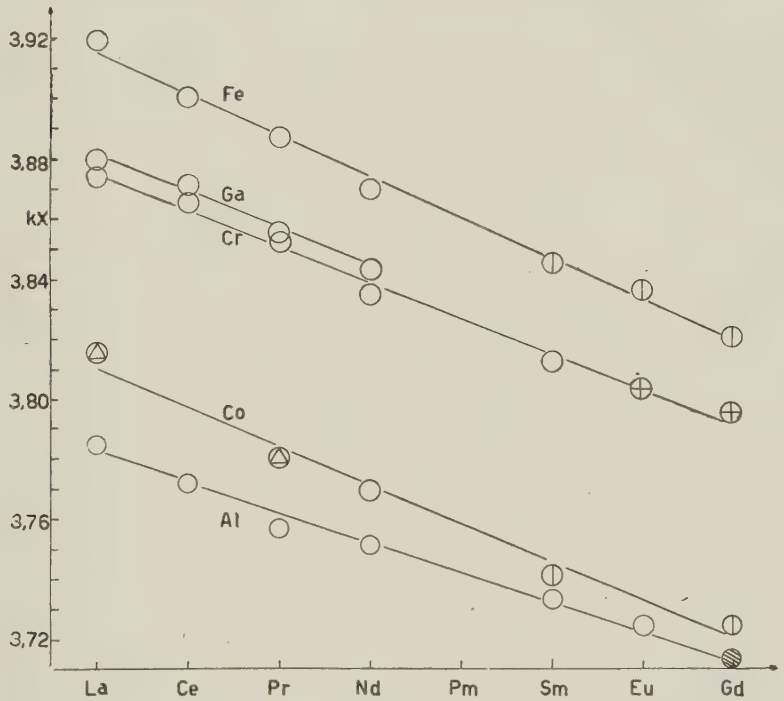


Fig. 1. – Sono riportate le costanti di orto-alluminati, cromiti, ferriti, galliti e cobaltiti di elementi delle terre rare. Sono indicati i composti per i quali si notano leggere deformazioni della cella cubica.

di compensazione sui valori corretti delle d/n) come più probabili per le costanti i valori seguenti:

$LaCoO_3$ (romboedr.)	$a = 3{,}816$ kX ; $\alpha = 90° 41'$
$PrCoO_3$ (romboedr.)	$a = 3{,}780$; $\alpha = 90° 13'$
$NdCoO_3$ (cubico)	$a = 3{,}770$.

Per $LaCoO_3$ e $PrCoO_3$ le celle esagonali triprimitive equivalenti alle date sono rispettivamente con $a = 5{,}429$, $c/a = 1{,}203$ e $a = 5{,}351$, $c/a = 1{,}218$ [3]. Per $NdCoO_3$, come detto, le righe si ordinano bene per una cella cubica ed anche le intensità concordano bene con la disposizione ideale perowskitica: 1 Nd in 0, 0, 0; 1 Co in 1/2, 1/2, 1/2, ; 3 O in 0, 1/2, 1/2 ecc.

(3) Per $LaCoO_3$ i dati trovati concordano coi valori $a_r = 3{,}82$, $\alpha = 90°42'$ già pubblicati da F. ASKHAM, I. FANKUCHEN e R. WARD, « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 3799 (1950).

Può essere opportuno notare infine, che nei composti col Co in contrapposto a quanto visto prima e soprattutto col Fe, il punto di massima stabilità per la cella cubica ideale si è spostato dal La al Nd, e che, mentre per i composti cogli elementi che precedono il Nd si hanno deformazioni delle celle di tipo diverso, per le terre rare che lo seguono queste distorsioni sono invece simili se pur di grado minore) a quelle osservate per i ferriti.

$SmCoO_3$ e $GdCoO_3$ infatti dànno fotogrammi delle polveri che lasciano supporre una simmetria rombica od inferiore, la piccolezza delle distorsioni non permette una conclusione precisa, comunque (analogamente a quanto avviene pei ferriti), tenendo come criterio sussidiario quello di aver a che fare con una cella di dimensioni prossime a quelle degli altri cobaltiti, la massima parte delle righe di questi fotogrammi si può con buona approssimazione ordinare con le seguenti costanti rombiche:

$$SmCoO_3 \qquad a = 3{,}74_0\ kX\ ;\ a : b : c = 1{,}00 : 1{,}01_5 : 0{,}99_5$$
$$GdCoO_3 \qquad a = 3{,}72_5\ \ ;\ a : b : c = 1{,}00 : 1{,}02\ : 0{,}98_5$$

Nella figura 1 sono riportate le dimensioni reticolari di tutti e trenta i composti finora studiati, e tutti preparati nelle stesse condizioni.

Chimica inorganica. — *Il composto* BaZn [*]. Nota di Riccardo Ferro, presentata [**] dal Socio L. Rolla.

Dei composti 1 : 1 dei metalli alcalino–terrosi con Zn, Cd e Hg erano conosciuti CaCd e CaHg [1], in un recente lavoro ho studiato SrCd, BaCd, SrHg e BaHg [2] e in questa Nota descrivo i risultati ottenuti con lo Zn.

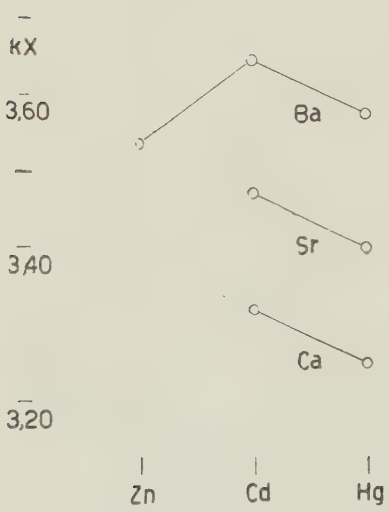


Fig. 1. – Distanze interatomiche nei composti 1 : 1 dei metalli alcalino–terrosi con Zn, Cd e Hg.

BaZn (Ba °/₀ 67,75) è stato preparato per sintesi dagli elementi chiusi in un crogiolo di ferro saldato, scaldando dapprima a circa 950° C e raffreddando poi molto lentamente fino a temperatura ambiente. La lega ottenuta, che sembra sia fusa, è abbastanza fragile e non molto dura, facilmente attaccabile e rapidamente ossidabile, almeno in superficie.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) A. Iandelli, « Rendic. Seminario Fac. Scienze Univ. Cagliari », *19*, 1 (1949).

(2) R. Ferro, « Acta Crystallographica », *7*, 781 (1954).

TABELLA I.

Fotogramma delle polveri di BaZn. *Radiazione* $K_\alpha Cu$.

h k l	$\sin^2\theta$ calc.	$\sin^2\theta$ oss.	Intens. calc.	Intens. oss.
100	0,0355	—	0,6	—
110	0,0710	0,0711	7,5	*mmf*
111	0,1066	—	0,5	—
200	0,1421	0,1419	2,5	*d*
210	0,1776	—	1,1	—
211	0,2131	0,2134	8,2	*mf*
220	0,2842	0,2837	3,3	*md*
300 + 221	0,3197	—	0,9	—
310	0,3552	0,3554	5,8	*mmd*
311	0,3907	—	0,7	—
222	0,4262	0,4269	1,7	*dd*
320	0,4618	—	0,6	—
321	0,4973	0,4968	10,3	*f*
400	0,5683	—	1,3	—
410 + 322	0,6039	—	1,5	—
411 + 330	0,6394	0,6395	9,0	*mf*
331	0,6749	—	0,8	—
420	0,7104	0,7099	7,1	*m*
I seguenti valori per la K_{α_1}				
421	0,7447	—	2,1	*d* sfumata
332	0,7802	0,7804	9,0	*f*
422	0,8511	0,8511	12,2	*f*
500 + 430	0,8865	—	2,5	*d* sfumata
510 + 431	0,9220	0,9220	56,8	*ff*

$$\frac{4\sin^2\theta}{\lambda^2} = 0{,}060014\cdot(h^2+k^2+l^2) \quad : \quad a_0 = 4{,}082\ \text{kX}$$

L'esame coi raggi X mostra che BaZn, isostrutturale coi predetti composti, è cubico tipo CsCl con $a_o = 4{,}082$ *k*X, come risulta dalla tabella I. La densità calcolata è 4,92 contro il valore sperimentale di 5,0$_o$ gr/cm^3.

Le distanze interatomiche per i vari composti studiati sono riportate nel grafico della fig. 1.

Un confronto diretto anche coi composti dello Zn con Ca e Sr non è possibile in quanto per queste leghe non si è potuto ottenere una struttura simile, in condizioni analoghe a quelle per il Ba: infatti i diversi trattamenti termici: tempre, ricotture a diverse basse temperature (in particolare per il CaZn tenendo conto dei dati del diagramma di stato [3] eseguiti su queste leghe, mostrano la non esistenza di fasi isostrutturali a quelle descritte.

Nella fig. 1, comunque, si nota il buon parallelismo delle linee che può ritenersi indice della costanza delle dimensioni atomiche di questi elementi nei loro composti, mentre, per esempio, una simile regolarità non si ha per i composti analoghi dello Zn [4], Cd [5] e Hg [6] con le terre rare.

Mineralogia. — *Sintesi e proprietà cristallografiche ottiche e strutturali del composto* $CoCaSiO_4$, (*tipo monticellite* $MgCaSiO_4$) [*]. Nota di Mario Cola, presentata [**] dal Corrisp. P. Gallitelli.

Nel corso delle esperienze sulla sintesi del composto Co_2SiO_4 (Gallitelli e Cola, 1954), si era notato che, usando come fondente il cloruro di calcio, si aveva la formazione di cristalli di colore violetto, più grandi del Co_2SiO_4, di abito simile a quello dell'olivina, che all'analisi chimica rivelavano la presenza di notevoli quantità di calcio.

Un esame più approfondito di questi cristalli ha mostrato trattarsi del composto $CoCaSiO_4$ – analogo alla monticellite $MgCaSiO_4$ ed alla glaucocroite $MnCaSiO_4$ – che non risulta sia stato ancora preparato e descritto [1].

Nel presente lavoro riferisco perciò sulla sintesi, sulle proprietà e sulla struttura del $CoCaSiO_4$ o « monticellite di cobalto ».

(3) Si veda: M. Hansen, *Der Aufbau der Zweistofflegierungen*, J. Springer, Berlin (1936), p. 413.

(4) L. Rolla, A. Iandelli, « Ricerca Sci. », *12*, 1216, (1941).

(5) A. Iandelli e E. Botti, « Gazz. chim. ital. », *67*, 638 (1937).

(6) A. Iandelli e R. Ferro, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *10*, 48 (1951).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) L'unica notazione sulla preparazione di un silicato di cobalto e calcio si trova nel lavoro di Bourgeois (1889):

« ... un silicate de cobalt et de chaux en prismes allongés de couleur rose, très faiblement polychroique, ayant les clivages et les propriétés optiques du pyroxène, inattaquable aux acides, a été obtenu par M. Fouqué. Il n'a pu être isolé dans un état de pureté suffisant pour l'analyse; c'est très probablement un bisilicate ».

Il $CoCaSiO_4$ si ottiene senza difficoltà, sotto forma di bei cristalli, fondendo le miscele di CoO, $CoCl_2$ ed SiO_2, già usate nella preparazione dell'ortosilicato di cobalto (Gallitelli e Cola, 1954), quando si aggiunga $CaCl_2$ in quantità variabili da circa il 30 % fino al doppio della massa reagente.

Le fusioni che hanno dato i migliori risultati sono state eseguite partendo da una miscela avente i seguenti rapporti:

$$1/2 \text{ mol } CoO : 1 \text{ mol } CoCl_2 : 4 \text{ mol } SiO_2 : 4 \text{ mol } CaCl_2 .$$

La massa reagente, intimamente mescolata, posta in crogiolo di porcellana coperto è stata portata gradualmente a 1000° C in forno a muffola, mantenuta a questa temperatura per un'ora e mezza, quindi raffreddata lentamente. L'aumento della temperatura massima o il prolungamento del tempo di reazione provocano una notevole diminuzione del rendimento in $CoCaSiO_4$.

Nel prodotto della fusione, oltre al $CoCaSiO_4$, si osservano sempre in notevole quantità cristalli prismatici allungati birifrangenti, caratterizzati da un indice di rifrazione medio di $\sim$ 1,61. Per confronto dello spettrogramma di Debye ottenuto da questi cristalli, con i dati riportati sull'indice ASTM, questo composto è stato identificato come Wollastonite.

Non sono rari inoltre cristalli bleu, di abito tetraedrico, sulla natura dei quali si riferirà appena ultimate le ricerche in corso.

Fra la massa dei cristalli ottenuti, è stato agevole scegliere al binoculare cristalli di $CoCaSiO_4$ in quantità sufficiente per l'analisi chimica, per l'esame roentgenografico, per le misure goniometriche e per la determinazione del peso specifico.

L'analisi chimica è stata effettuata su due campioni, provenienti da due diverse preparazioni, mediante attacco del silicato con HCl dil. e insolubilizzazione della silice. Nel filtrato si determinava il cobalto elettroliticamente. Quindi sulla stessa soluzione si dosava il calcio come ossido, dopo avere scacciato, per riscaldamento, la maggior parte dell'NH_3 necessaria per il deposito del cobalto al catodo.

Il risultato medio delle due analisi, molto concordanti fra loro, è il seguente:

	osservato	calcolato per $CoCaSiO_4$
SiO_2	31,36 %	31,51 %
CoO	38,83	39,19
CaO	29,41	29,31
	99,60	100,00

I cristalli di $CoCaSiO_4$, rombici, si presentano di un bel colore violetto scuro, e con dimensioni massime di mm 1 × 0,6 × 0,4.

Gli abiti che si riscontrano più frequentemente sono: (assumendo l'orientazione che lo Strunz (1949) dà alla monticellite):

a) di tipo prismatico piramidale per la presenza e predominante sviluppo del prisma (011) e della bipiramide (111), cui si associano i prismi (110) e (101) con (102) ed il pinacoide (001);

b) un tipo che, per il grande sviluppo di (011) e per la mancanza del pinacoide (001), risulta schiacciato secondo l'asse y.

I cristalli hanno perciò sviluppo predominante secondo x nel primo caso e secondo z nel secondo.

Sono state effettuate le seguenti misure goniometriche:

TABELLA I.

Misure goniometriche.

Angoli misurati	n. misure	Limiti delle misure	Media	Calcolati	Diff.
$011 : 01\bar{1}$	19	46° 52′– 47° 20′	47° 3′ *	—	—
001 : 011	35	66° 1′– 66° 48′	66° 29′	66° 27′	+ 2′
$101 : 10\bar{1}$	4	60° 37′– 60° 56′	60° 48′	59° 55′	+ 53′
$102 : 10\bar{2}$	7	97° 4′– 97° 29′	97° 10′	98° 8′	— 58′
001 : 101	8	59° 1′– 61° 18′	60° 11′	60° 3′	+ 8′
001 : 102	13	39° 22′– 41° 43′	41° 8′	40° 57′	+ 11′
$110 : 1\bar{1}0$	5	105° 39′–106° 5′	105° 52′ *	—	—
$111 : 1\bar{1}\bar{1}$	9	110° 17′–110° 42′	110° 34′	110° 35′	— 1′
$011 : 11\bar{1}$	20	34° 18′– 35° 9′	34° 41′	34° 42′	— 1′

Il rapporto parametrico calcolato delle misure angolari è pertanto:

$$1,3238 : 1 : 2,2969.$$

Usufruendo dell'angolo fra le facce del prisma {011} si sono misurati, col metodo della deviazione minima, gli indici di rifrazione corrispondenti alle vibrazioni secondo gli assi x e z.

I valori ottenuti sono (media di misure effettuate su tre cristalli):

per la luce rossa $Nz = 1,698$
$Nx = 1,748$

per la luce violetta $Nz = 1,718$
$Nx = 1,774$

Una sezione sottile parallela al piano xy ha permesso di misurare alla piattaforma universale l'angolo fra gli assi ottici, e di stabilire l'orientazione dell'indicatrice.

Si ha:

$$2V = 53^\circ \quad ; \quad \alpha = z \quad ; \quad \beta = y \quad ; \quad \gamma = x ;$$

perciò birifrangenza di segno negativo.

Dai valori di α, γ e $2V$ si è calcolato β in base alla nota formula. Si ha:

per la luce rossa $Ny = 1{,}738$

per la luce violetta $Ny = 1{,}763$

I cristalli di $CoCaSiO_4$ presentano in sezione sottile un leggero pleocroismo:

α = roseo

β = violetto chiaro

γ = violetto leggermente più chiaro.

Gli spettrogrammi di polvere hanno portato una ulteriore conferma della stretta analogia fra il $CoCaSiO_4$ e la monticellite.

Nella Tabella II i valori di d osservati per il composto in istudio sono messi a confronto con quelli della monticellite dedotti dall'indice ASTM.

La concordanza dei dati è, come si vede, ottima entro i limiti degli errori sperimentali.

Nello spettrogramma del $CoCaSiO_4$ compaiono alcune righe che non sono presenti in quello della monticellite. Esse si possono calcolare dalle costanti riportate più sotto: per esempio le interferenze a 4,45 Å, 2,15 Å, 2,01 Å, 1,42 Å sono dovute rispettivamente ai piani (011), (213), (015) e (231). Tutte queste interferenze sono state osservate anche sui Weissenberg.

Le costanti della cella elementare sono state determinate sia da spettrogrammi di cristallo rotante intorno a [100] ed a [001], sia dai corrispondenti Weissenberg equatore.

Non è stato possibile, nonostante ripetuti tentativi, ottenere il rotante intorno all'asse [010] dato il forte appiattimento dei cristalli secondo questo asse ed il forte assorbimento delle due direzioni di massimo sviluppo [001] e [100].

Le costanti ottenute sono:

$$a_0 = 6{,}39 \text{ Å}$$
$$b_0 = 4{,}81 \text{ Å}$$
$$c_0 = 11{,}06 \text{ Å}$$

e sono state calcolate come media dei valori che si ottengono, sia misurando le distanze degli strati sui rotanti per la FeK_α ($\lambda = 1{,}93597$ Å) e la FeK_β ($\lambda = 1{,}75653$ Å), sia le distanze delle serie dei pinacoidi sui Weissenberg equatore.

Il rapporto parametrico che si calcola dai valori suddetti è:

$$1{,}327 : 1 : 2{,}297$$

in buon accordo con il valore trovato con le misure goniometriche:

$$1{,}3238 : 1 : 2{,}2969.$$

Ricalcolando per controllo i valori delle costanti dagli spettrogrammi di polvere si può valutare un errore massimo probabile di $\pm$ 0,01 Å, nei valori sopra rîportati.

TABELLA II.

Spettrogrammi di polvere.

Radiazione FeKα (media α_1 e α_2) $\lambda = 1{,}9373$ Å;
$2r = 71{,}62$ mm.

ASTM monticellite		$CoCaSiO_4$	
I	*d*	I*	*d**
10	5,5	70	5,55
		20	4,45
10	4,17	30	4,19
10	3,84	10	3,87
40	3,62	50	3,64
10	3,18	30	3,20
20	2,92	80	2,94
10	2,87	10	2,87
10	2,76	40	2,76
70	2,66	60	2,66
40	2,58	100	2,59
10	2,53	20	2,53
20	2,38	20	2,40
10	2,35	10	2,35
10	2,19	10	2,20
		30	2,15
		30	2,01
10	1,90	10	1,92
100	1,81	90	1,82
10	1,77	10	1,78
10	1,74	10	1,74
20	1,71	20	1,72
10	1,70	20	1,70
10	1,68		
80	1,59	50	1,60
10	1,53	10	1,54
20	1,50	30	1,50
		20	1,42
10	1,39	20	1,40
20	1,38	20	1,39
10	1,35		
10	1,32	20	1,33
10	1,27	10	1,27
		10	1,25
10	1,20	40	1,20
10	1,19		
10	1,16	10	1,16
10	1,12	20	1,13
10	1,12	20	1,12
10	1,10	10	1,10
20	1,09	30	1,09

*d** Corretto per lo spessore della pellicola e per il diametro del preparato.
I* Stimata a vista attribuendo il valore 100 alla riga più intensa.

Dalle costanti trovate, ammettendo per il $CoCaSiO_4$ la struttura simile a quella della monticellite con 4 molecole nella cella elementare (Brown and West, 1928), si calcola la densità di 3,74 gr/cm^3, in buon accordo col valore osservato di 3,69 gr/cm^3.

Dall'esame degli spettrogrammi di Weissenberg si nota che risultano estinte le riflessioni (*h*o*l*) con *l* dispari, (*hk*o) con $h + k$ dispari, e le (*h*oo), (o*k*o), (oo*l*) con *h*, *k*, *l* dispari. Il gruppo spaziale è quindi, come per gli altri composti della serie delle olivine e della monticellite, il *Pnma*.

Se si esaminano i rapporti del $CoCaSiO_4$ con gli altri termini della famiglia della monticellite si possono fare le seguenti considerazioni:

1° l'esame delle proprietà ottiche dell'ortosilicato di cobalto e calcio indica che il comportamento del cobalto come sostituente del Mg^{++} nella monticellite è analogo al comportamento de Fe^{++} e del Mn^{++}. Infatti (Winchell and Winchell, 1951) la sostituzione del Co^{++} al Mg^{++} in questo minerale innalza l'indice di rifrazione ed abbassa il valore dell'angolo assiale ottico come già si osserva nel $FeCaSiO_4$ e nel $MnCaSiO_4$;

2° le dimensioni delle celle elementari del Co_2SiO_4 (Gallitelli e Cola, 1954) e del $CoCaSiO_4$ sembrano indicare invece una più stretta analogia fra Co^{++} ed Mg^{++} che non fra Co^{++} ed Fe^{++}. Questo fatto osservabile benchè il raggio del Co^{++} sia più vicino a quello de Fe^{++} che non a quello del Mg^{++}, è stato preso in considerazione anche da V. M. Goldschmidt (1954 *a*) in base ai risultati delle ricerche di Sandell e Goldich (1943) e di Nockolds e Mitchell (1948) i quali, pur non potendo ancora spiegare in modo esauriente il fenomeno, suggeriscono che il Co^{++} debba avere per qualche ragione un raggio « effettivo » vicino a quello del Mg^{++}. D'altra parte non si può dimenticare che Landergreen (1948), a questo proposito, prospetta la possibilità che altri fattori abbiano importanza maggiore del raggio ionico nella sostituibilità del Co^{++} nei minerali ferromagnesiaci, e che V. M. Goldschmidt (1954 *b*) richiama l'attenzione sul fatto che nel caso di reticoli, nei quali oltre ai legami ionici possono intervenire « forze che sono specialmente connesse con un tipo peculiare di struttura elettronica », tali forze possano avere sensibile influenza sulle distanze che separano i singoli ioni del reticolo e di conseguenza sulle dimensioni della cella elementare.

Ringrazio la Fondazione «Massimo de Giaçomo », che, consentendomi di usufruire di una Borsa di Studio, ha reso possibili queste ricerche.

BIBLIOGRAFIA.

BOURGEOIS L. (1889), *Sur la preparation des ortosilicates de cobalt et de nickel cristallisés*, « Compt. Rend. », *108*, 1177.

BROWN G. B., and WEST J. (1928), *The structure of monticellite* ($MgCaSiO_4$), « Zeit. Krist. », *66*, 155.

GALLITELLI P. e COLA M. (1954), *Sintesi, proprietà cristallografiche e strutturali del composto* Co_2SiO_4 (tipo dell'olivina).

GOLDSCHMIDT V. M. (1954 *a*), *Geochemistry*, 667. Clarendon Press: Oxford.
GOLDSCHMIDT V. M. (1954 *b*), op. cit., p. 655.
LANDERGREN S. (1948), *On the Geochemistry of Swedish iron ores and associated rocks. A study on ironore formation.* « Sver. Geol. Undersökn. », Ser. C, Avhandl. och Uppsat., No 496 « Årsbok », 42, No 5. (Fide Rankama, K. and Sahama, Th. G., *Geochemistry*, p. 683. The University of Chicago Press: Chicago, (1950)).
NOCKOLDS S. R. and MITCHELL R. L. (1948), « Trans. Roy. Soc. Edin. », *61*, (ii), 533. (Fide Goldschmidt, V. M. op. cit., p. 667).
SANDELL E. B., and GOLDICH S. B. (1943), *The rarer metallic constituents of some American igneous rocks.* « J. Geol. », *51*, p. 99 e 167. (Fide Goldschmidt, V. M. op. cit., p. 667).
STRUNZ H. (1949), *Mineralogische Tabellen.* 2ª Aufl. p. 181. Geest & Portig. Leipzig.
WINCHELL A. N. and WINCHELL H. (1951), *Elements of optical Mineralogy*. Fourth Ed. Part. II p. 503. Wiley & Sons, New York.

Fisiologia vegetale. — *Azione delle auxine sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in estratti di pisello* (« *Pisum sativum* ») *e di giglio* (« *Lilium candidum* ») (*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORESTE ARRIGONI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

In precedenti lavori è stato rilevato come tanto le auxine quanto le antiauxine esplichino, in determinate condizioni sperimentali, una evidente azione sull'attività di sistemi enzimatici ossidativi, studiati in estratti di piante superiori: le antiauxine inibendo l'ossidazione di diversi substrati respiratorî, e l'auxina apparendo capace, almeno nel caso dell'ossidazione diretta del glucosio-6-fosfato, di rovesciare parzialmente l'effetto inibente delle antiauxine (1,2).

Le esperienze qui riferite confermano per le auxine la capacità di un deciso effetto attivante su sistemi respiratorî in estratti di piante superiori e dimostrano come tale effetto, in determinati materiali, possa rilevarsi anche in assenza dell'aggiunta di antiauxine, condizione che invece nelle esperienze precedenti, condotte su estratti di plantule di avena, era apparsa indispensabile.

L'importanza fisiologica di questi risultati, ai fini della comprensione del meccanismo d'azione delle sostanze di crescita, deriva dal fatto che l'azione attivante *in vitro* delle auxine sul sistema respiratorio da noi studiato appare molto vicina a quella ben nota, e tanto discussa per quanto riguarda il suo determinismo, dell'auxina sull'attività respiratoria dei tessuti viventi: infatti tanto la esiguità delle concentrazioni in ormone attive, quanto l'intensità dell'effetto attivante appaiono, nei due casi (*in vivo* e *in vitro*) singolarmente simili. La probabilità che l'effetto da noi qui osser-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.
(1) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *15*, 433 (1953).
(2) E. MARRÈ e C. DUGNANI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s. (1954) (in corso di stampa).

vato stia alla base dell'azione fisiologica dell'auxina sulla respirazione appare ancora sottolineata dalla constatazione che composti strutturalmente molto simili alle auxine, ma fisiologicamente inattivi, come le antiauxine, risultano, anche *in vitro*, incapaci di esplicare a parità di concentrazione l'effetto attivante caratteristico per tutte le auxine da noi prese in considerazione, mentre a concentrazioni più elevate, come si è detto, anziché attivare inibiscono nettamente.

MATERIALI e METODI. — Il materiale utilizzato in queste esperienze è stato fornito di regola dalla regione apicale (5 mm.) di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska) coltivate in stanza termoregolata a 25 gradi C, prelevate all'ottavo–decimo giorno dalla germinazione. Buoni risultati abbiamo pure ottenuto usando cotiledoni di pisello in fase di crescita (immaturi) e ovuli di giglio (*Lilium candidum*) prelevati immediatamente dopo l'antesi. In ogni caso il materiale, appena raccolto, veniva conservato alcune ore in frigorifero, quindi tritato in mortaio con sabbia di quarzo e tampone ai fosfati o al trisidrossimetilaminometano (tris). Sugli estratti, filtrati attraverso tre strati di garza e centrifugati a circa 800 volte la gravità, l'attività deidrogenasica veniva determinata, dopo adeguato periodo di incubazione con substrato e cofattori, e in presenza o meno di auxine o antiauxine, mediante il metodo al cloruro di trifeniltetrazolio, applicato nel vuoto secondo Marrè e Servattaz [3].

Come auxina abbiamo usato prevalentemente l'acido naftalenacetico (NA) risultato più costante nella sua azione dell'auxina naturale, o acido indolacetico, rapidamente ossidato negli estratti. Altre auxine usate sono stati gli acidi para–clorofenossiacetico (PClPA) e diclorofenossiacetico (2–4 D). Come antiauxine, abbiamo scelto l'acido trans–cinnamico (TC) l'acido 2–4–trijodobenzoico (TIB) e il 2–4–dicloroanisolo (DClA).

In ogni esperienza l'uguaglianza, per tutte le prove, tanto del pH che del volume finale dell'incubato veniva rigorosamente controllata all'inizio del periodo di incubazione: sì che sembra da escludere, sui fenomeni rilevati, un intervento di questi due fattori.

Come reagenti abbiamo usato: tris, glucosio–6–fosfato (Gl. 6–P), trifosfopiridinnucleotide (PTN), adenosintrifosfato (ATP) e flavinmononucleotide (FMN) della ditta « Sigma » di St. Louis, acidi indolacetico, naftalenacetico, trijodobenzoico e trans–cinnamico della «Merck », diclorofenossiacetico, para–clorofenossiacetico e dicloroanisolo della « NBC » di New York.

ESPERIENZE E RISULTATI. – I dati delle Tabelle I e II dimostrano come l'acido indolacetico e l'acido naftalenacetico, a concentrazioni tra 10^{-5} e 10^{-7}, possano attivare, in estratti grezzi di tessuti in fase di attiva crescita, il sistema enzimatico responsabile dell'ossidazione del Gl. 6–P. L'effetto di stimolo appare ben significativo, anche se di entità relativamente mo-

(3) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Giorn. di Bioch. » (1954) (in corso di stampa).

desta (come del resto nel caso dell'attivazione respiratoria dell'auxina *in vivo*), ed è rilevabile sia in presenza che in assenza di cofattori intimamente connessi all'attività di questo sistema enzimatico, come l'ATP e il FMN (Arrigoni e Marrè [4]).

TABELLA I.

Azione dell'acido indolacetico sull'ossidazione del Gl. 6–P *in estratti di cotiledoni immaturi di pisello. Composizione delle prove: tessuto* 20 %, *tampone al tris* 0,05 M, pH 7,2, Gl. 6–P 3 mg./cc., TPN 20 γ/cc., *cloruro di trifeniltetrazolio* (TTC) 0,1 %, *volume finale* 1 cc. *Temperatura* 20 gradi C. *Tempo di incubazione 30 minuti primi. Dati come medie di determinazioni in doppio. Attività endogena sottratta.*

Aggiunte	γ TTC ridotto	Attivazione
Nessuna	40	—
IA 10^{-5}	42	5 %
IA $3 \cdot 10^{-6}$	49	22 %
IA 10^{-6}	48	20 %

TABELLA II.

Azione dell'acido naftalenacetico sull'ossidazione del Gl. 6–P *in estratti della parte apicale di piantine eziolate di pisello. Tessuto* 14 %, *altre condizioni sperimentali come alla tabella I.*

Aggiunte	γ TTC ridotto	Attivazione
Nessuna	54	—
NA $5 \cdot 10^{-6}$	59	9 %
NA 10^{-6}	69	27 %
NA 10^{-7}	70	29 %
FMN $3 \cdot 10^{-4}$	88	—
FMN $3 \cdot 10^{-4}$, NA 10^{-6}	114	29 %
FMN $3 \cdot 10^{-4}$, NA 10^{-7}	106	20 %
ATP $3 \cdot 10^{-4}$	61	—
ATP $3 \cdot 10^{-4}$, NA 10^{-6}	72	18 %
ATP $3 \cdot 10^{-4}$, NA 10^{-7}	70	15 %

(4) O. ARRIGONI e E. MARRÈ, « Giorn. di Bioch. » (1954) (in corso di stampa).

TABELLA III.

Azione delle auxine NA, PCIPA *e* 2–4 D, *e delle antiauxine* TC *e* DClA *sull'ossidazione del* Gl. 6–P *in estratti della parte apicale di piantine eziolate di pisello. Tessuto* 15 %, *altre condizioni sperimentali come alla tabella I.*

Aggiunte	γ TTC ridotto	Attivazione
Nessuna	32	—
NA $5 \cdot 10^{-6}$	37	15 %
NA $5 \cdot 10^{-7}$	40	25 %
2–4 D $5 \cdot 10^{-6}$	35	9 %
2–4 D $5 \cdot 10^{-7}$	42	30 %
PCLPA $5 \cdot 10^{-6}$	39	21 %
PCLPA $5 \cdot 10^{-7}$	37	15 %
TC $5 \cdot 10^{-6}$	32	0
TC $5 \cdot 10^{-7}$	31	0
DClA $5 \cdot 10^{-6}$	30	0
DClA $5 \cdot 10^{-7}$	33	3 %

TABELLA IV.

Azione delle auxine NA *e* 2–4 D *e delle antiauxine* TIB *e* DClA *sulla ossidazione del* Gl. 6–P *in estratti di ovuli di giglio. Tessuto* 20 %, *altre condizioni sperimentali come alla tabella I.*

Aggiunte	γ TTC ridotto	Attivazione
Nessuna	15	—
Na $5 \cdot 10^{-6}$	19	26 %
NA $5 \cdot 10^{-7}$	18	20 %
2–4 D $5 \cdot 10^{-6}$	19	26 %
2–4 D $5 \cdot 10^{-7}$	19	26 %
TIB $5 \cdot 10^{-6}$	16	6 %
TIB $5 \cdot 10^{-7}$	15	0
DClA 10^{-6}	14	0

Dai dati delle Tabelle III e IV risulta come non solo gli acidi indolacetico e naftalenacetico, ma anche altre auxine tipiche, come gli acidi para–cloro– e 2–4 dicloro–fenossiacetico, possano esplicare un netto effetto attivante sull'attività glucosio–6–fosfato deidrogenasica in estratti. Accanto a questo dato, altrettanto importante sembra quello dell'attività scarsa, nulla o addirittura negativa di altri composti, strutturalmente apparentati alle auxine, ma antagonisti di queste da un punto di vitsa fisiologico, quali gli acidi trans–cinnamico e trijodobenzoico, e il dicloroanisolo.

Le tabelle soprariportate esprimono il fenomeno nella forma in cui esso ci si è presentato nella grande maggioranza delle numerose serie di esperienze eseguite. È tuttavia necessario osservare come in alcuni casi l'effetto delle auxine sull'ossidazione del Gl. 6–P sia apparsa del tutto assente: fatto che è indice espressivo della complessità del fenomeno in esame, e che appare determinato, presumibilmente, da variazioni nelle caratteristiche del materiale al momento del prelievo. Osserviamo come i risultati più costantemente positivi siano stati da noi ottenuti su estratti grezzi della parte apicale di piantine prelevate dopo l'ottavo giorno dalla geminazione; e, per quanto riguarda le condizioni degli estratti, per concentrazioni in tessuto tra il 15 e il 20 %. Tentativi di purificazione dell'estratto hanno dato, in genere, risultati negativi; la dialisi prolungata, a freddo, contro tampone, sembra annullare completamente la capacità del sistema di reagire alle auxine.

Conclusioni. – Riassumendo:

1° Tutte le auxine usate (acidi indolacetico, naftalenacetico, paraclorofenossiacetico e 2–4 diclorofenossiacetico) sono apparse capaci di indurre un netto effetto di stimolo sull'ossidazione del glucosio–6–fosfato in estratti grezzi di piante superiori. Tra le diverse auxine, l'acido naftalenacetico sembra fornire i risultati più costanti. Le concentrazioni attive oscillano per tutte le auxine considerate tra 10^{-5} e 10^{-7}, e sono quindi ben comparabili a quelle che inducono, su tessuti integri, i noti effetti fisiologici caratteristici delle auxine.

2° L'acido trans–cinnamico, l'acido trijodobenzoico e il dicloroanisolo, composti strutturalmente simili alle auxine, ma a queste antagonisti, o inattivi in quanto ad azione fisiologica, sono apparsi pure praticamente inattivi per quanto riguarda l'attività sullo stesso sistema ossidativo esaltato dall'auxina negli estratti, quando usati alle stesse concentrazioni per cui le auxine esplicano il massimo delle loro attività.

Biologia. - *Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare.* - III. *Fenomeni involutivi in neuroni di Purkinje durante il ciclo vitale del gatto* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nella precedente Nota (Baffoni (1954)) (1) ho osservato che le cellule di Purkinje del cervelletto di un Mammifero (*Felis domestica* G.) originano da neuroblasti dello strato granulare ove possono differenziarsi nella normale istogenesi o restare a lungo quiescenti ed acquistare i propri differenziamenti specifici in tempi successivi, sia durante l'accrescimento somatico dell'organismo che nell'adulto. Scopo della presente Nota è di riferire alcune osservazioni preliminari che spiegano la coesistenza della fissità numerica dei neuroni di Purkinje di Mammiferi adulti, dimostrata dalle ricerche di Ellis (1919) (2), De Lorenzi (1931) (3), Andrew (1936) (4), con il differenziamento di nuovi elementi osservati in gatti adulti.

Per il materiale ed i metodi impiegati, rimando a quanto reso noto in precedenti Note (Baffoni 1954 (1, 5)).

Ricordo che le cellule di Purkinje del cervelletto di Mammiferi adulti si presentano in diversi aspetti citologici, specialmente per ciò che riguarda i quadri della sostanza basofila (Van Durme 1901 (6), Saguki 1930 (7), Einarson 1933 (8), Andrew 1936 (4), 1938 (9), Fumagalli e Gualtieratti 1950 (10)); ho infatti osservato che vicino ad elementi tipici, già nel gatto di un mese dalla nascita, si presentano elementi cromofobi e cromofili, nonché stadî di passaggio tra queste forme. I diversi aspetti delle cellule di Purkinje sono stati messi in rapporto con l'attività funzionale del neurone (Van Durme (6), Saguki (7), Andrew (8)); più di recente Hydén (1943) (11) ha distinto due quadri caratteristici e cioè cellule di Purkinje tipiche, che classifica di I tipo (nel citoplasma tigroide ben differenziata, a zolle, e calotta basofila sulla porzione della membrana nucleare che si affaccia al tronco dendritico) e quelle cromofile, che denomina di II tipo (elementi di minori dimensioni, con citoplasma ricco di

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *17*, p. 70 (1954).

(2) R. S. ELLIS, « Journ. Comp. Neurol. », *32*, p. 1 (1920).

(3) E. DE LORENZI, « Z. Zellforsch. mikr. Anat. », *14*, p. 310 (1931).

(4) W. ANDREW, « Z. Zellforsch. mikr. Anat. », *25*, p. 583 (1936).

(5) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *16*, p. 113 (1954).

(6) D. VAN DURME, « Le Nevraxe », *2*, p. 125 (1901).

(7) S. SAGUKI, « Zytologische Studien », (Kanazawa), *4*, p. 1 (1930).

(8) L. EINARSON, « Amer. Journ. Anat. », *53*, p. 141 (1933).

(9) W. ANDREW, « Z. Zellforsch. mikr. Anat. », *28*, p. 292 (1938).

(10) FUMAGALLI e T. GUALTIERATTI, « Biologica Latina », *2*, p. 439 (1950).

(11) H. HYDÉN, « Acta Physiol. Scand. », *6*, Suppl. XVII, (1943).

proteine basiche e ribonucleotidi) ed interpreta questi quadri come espressione dei diversi stadî di un processo fisiologico, avendo l'Autore riscontrato analoghi aspetti in altri neuroni affaticati. Devo però osservare che i neuroni che hanno subìto iperattività funzionale, e perciò affaticati, presentano basofilia accompagnata da ipertrofia del pirenoforo: mi riferisco, oltre che a personali osservazioni (Baffoni 1952) [12], specialmente alle accurate ricerche di Lugaro (1895) [13], confermate da successivi Autori (Pugnat 1901 [14], Holmes 1903 [15], Dolley 1913 [16], ecc.) ed alle stesse microfotografie di Hydén (op. cit., figg. 45–49) su neuroni stimolati elettricamente; le cellule di Purkinje cromofile, invece, non si presentano ipertrofiche, ma al contrario, come risulta anche dai disegni di Saguki [7] e dalle microfoto di Hydén (fig. 69) e di Fumagalli e Gualtieratti [10], appaiono atrofiche e con cavità di

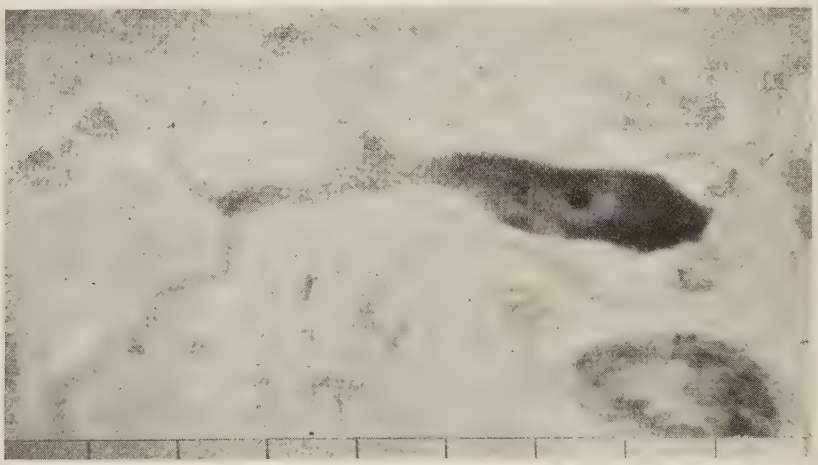


Fig. 1. – Microfotografia di un elemento di Purkinje cromofilo di gatto adulto.

Notare la notevole atrofia del pirenoforo, la coartazione del dendrite e le cellule di microglia attorno al neurone (ogni intervallo della Scala in calce = 10 μ).

retrazione attorno al pirenoforo. Da misurazioni da me eseguite, l'atrofia delle cellule di Purkinje cromofile si manifesta con la riduzione dei diametri trasversi del pirenoforo (da 30 a 9 μ), ma anche e specialmente con quella dell'arborizzazione dendritica (all'origine del tronco da 8 a 2 μ), che nei preparati inclusi in celloidina–paraffina, a differenza di quella degli elementi tipici o cromofobi, si presenta coartata (fig. 1). Ho inoltre osservato che gli elementi di Purkinje più atrofici sono quelli più cromofili; attorno al pirenoforo ed al tronco dentritico degli elementi più cromofili, inoltre, ho constatato l'arrivo e l'accollarsi di elementi di microglia (fig. 1) ed i caratteristici

(12) G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *12*, p. 189 (1952).

(13) E. Lugaro, « Arch. Ital. de Biol. », *24*, p. 258; « Lo Sperimentale » (Firenze) *49*, p. 159 (1895).

(14) C. A. Pugnat, « Journ. de Physiol. Pathol. Gén. », *3*, p. 183 (1901).

(15) G. M. Holmes, « Z. Allg. Physiol. », *2*, p. 502 (1903).

(16) D. H. Dolley, « Arch. Zellforsch. », *9*, p. 485 (1913).

aspetti del processo di neurofagia, quale descritto da tempo in neuroni senescenti (ved. Esposito 1908 [17] e di recente Andrew e Cardwell 1940 [18]). Già di fronte a queste considerazioni ed a queste sommarie indicazioni, sono rimasto perplesso sulla validità della interpretazione attribuita ai neuroni di Purkinje cromofili.

Ma ulteriori osservazioni hanno constatato altri fatti: seriando infatti le cellule di Purkinje in funzione delle dimensioni decrescenti dei loro pirenofori (ved. Tabella), escludendo naturalmente gli elementi dimostrati in differenziamento (ved. precedente Nota [1]), ho individuato tre aspetti caratteristici, collegati tra di loro da una serie continua di forme di passaggio: *a*) cellule di Purkinje *tipiche*, quali quelle classificate da Hydén [11] di I tipo; *b*) cellule cromofobe, già descritte da Saguki [7] (più piccole delle precedenti, prive o quasi di sostanza basofila citoplasmatica e con nucleolo decolorato e vacuolizzato); *c*) cellule *cromofile*, le più atrofiche di tutte, e corrispondenti a quelle di II tipo secondo Hydén [11]. Dichiaro subito che le cellule cromofobe sono rarissime negli animali in accrescimento e nei giovani adulti, ma divengono frequenti nei gatti di nove anni; probabilmente nei giovani animali l'aspetto cromofobo è transitorio e di breve durata. Dalle cellule di Purkinje tipiche, che nello sviluppo sono le prime a comparire (nei gatti di 20 giorni dalla nascita) si passa agli elementi cromofobi mediante una serie di modificazioni che rispecchiano esattamente l'andamento della *cromatolisi periferica* (fig. 2): le zolle di tigroide, infatti, scompaiono progressivamente dal neuroplasma a partire dal tronco dendritico e quindi dalla periferia alla area perinucleare del pirenoforo; ultima a scomparire è la fascia basofila che è sulla calotta della membrana nucleare affacciata al tronco dendritico; nel contempo il cromocentro è divenuto indistinguibile ed il nucleolo perde la sua affinità per i coloranti basici; esso al termine del processo può presentarsi del tutto vuoto di ribonucleoprotidi. In questo processo il neurone di Purkinje, a parte una lieve riduzione dei diametri trasversi e la perdita dei ribonucleotidi, conserva intatta la propria forma e le proprie strutture (fig. 2); il quadro pertanto si identifica con quello che ho descritto all'inizio della involuzione fisiologica, normale (Baffoni e coll. 1951–1952) [19] o provocata sperimentalmente (Baffoni 1950–53) [12, 20], in un peculiare neurone intracentrale di Vertebrati inferiori (cellule di Mauthner di Ittiopsidi); in proposito faccio presente che in esperienze di digiuno (Baffoni 1952) [21] e rialimentazione (Baffoni, inedito) è risultato che atrofia e cromatolisi periferica sono fenomeni *reversibili* fin quando l'atrofia non supera certi limiti e la cromatolisi non diviene totale: quando infatti la sostanza

(17) G. ESPOSITO, « Il Manicomio », (Nocera), *24*, p. 1 (1908).

(18) W. ANDREW e E. S. CARDWELL, « Arch. Pathol. », *29*, p. 400 (1940).

(19) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. », *43*, p. 373 (1951); G. M. BAFFONI e L. SERRA, « Riv. di Biol. », *44*, p. 469 (1952).

(20) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *9*, p. 282 (1950); G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *14*, p. 138 (1953).

(21) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *13*, p. 281 (1952).

basofila a ridosso della membrana nucleare scompare del tutto, il processo diviene irreversibile e non è più possibile il ritorno ai quadri normali, ma l'elemento nervoso va incontro a processi degenerativi.

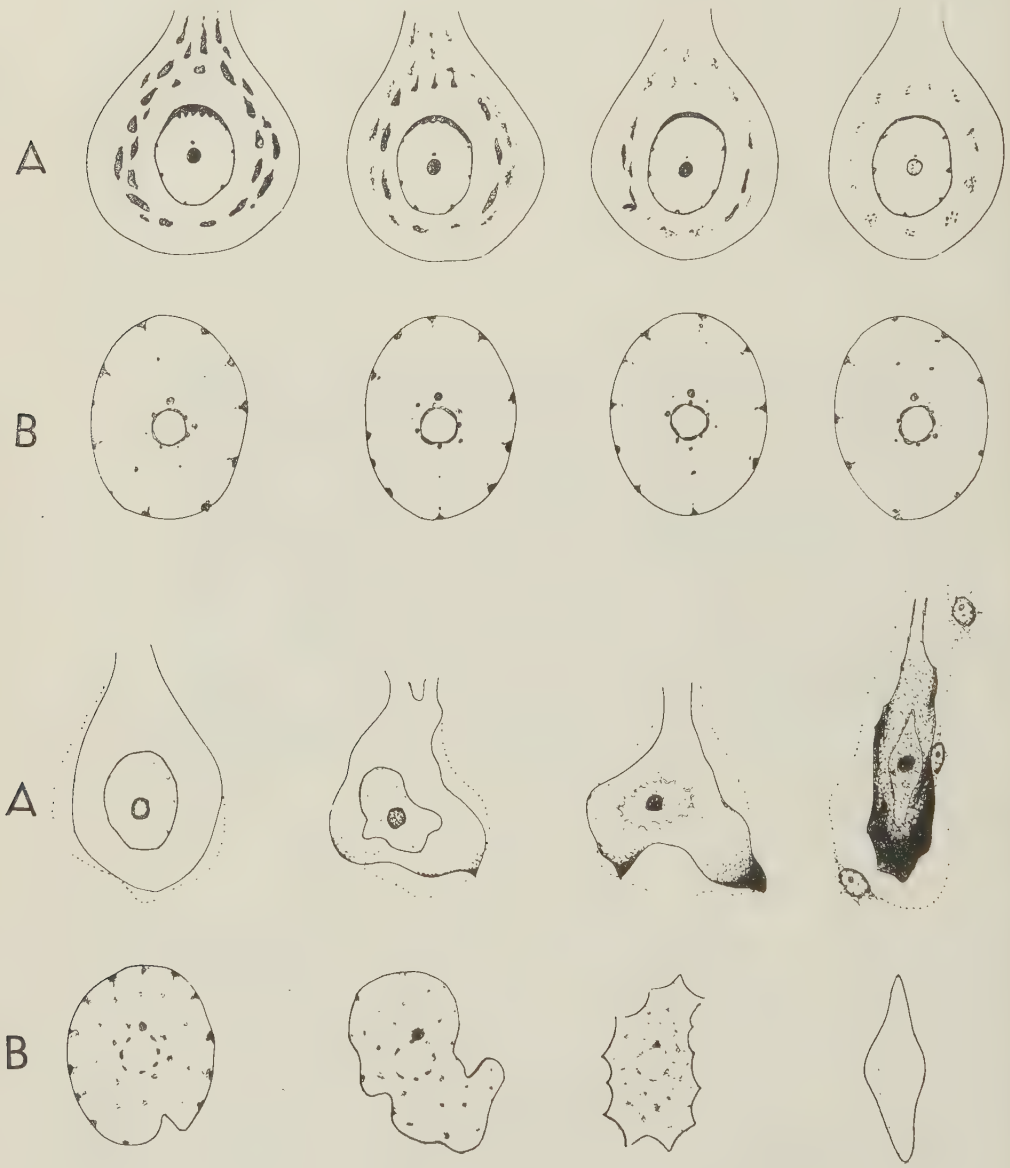


Fig. 2. – Aspetti del processo regressivo delle cellule di Purkinje.

Sopra: fase di reattività funzionale. Sotto: fase degenerativa.
A: modificazioni della sostanza basofila. B: corrispondenti modificazioni dei differenziamenti nucleari Feulgen positivi.
(Da microfotografie; a destra scale di 10 in 10 μ).

Dopo la cromatolisi periferica, le cellule di Purkinje cromofobe possono trasformarsi in elementi cromofili; il fenomeno si accompagna ad una accentuata atrofia neuroplasmatica e nucleare ed a profonde alterazioni morfologiche che riguardano la forma del pirenoforo e del nucleo e delle strutture neuroplasmatiche e carioplasmatiche (fig. 2). Il pirenoforo delle cellule di Purkinje, infatti, si assottiglia notevolmente, si deforma divenendo prima lobato, quindi grinzoso ed infine fusiforme; il nucleo si riduce di volume, prima lievemente, poi notevolmente, ed assume una forma lobosa, poi spinosa ed infine affusolata; la cromatina diviene imprecisa, le zolle Feulgen–positive scompaiono dalla membrana nucleare e si osservano diffuse omogeneamente nel carioplasma, divenendo nel contempo sfumate ed infine confluendo con la cromatina nucleolo–associata, che si era spezzettata, in una struttura Feulgen–positiva di aspetto reticolare ed infine polverulento (fig. 2); la cromatina sessuale delle femmine, probabilmente a causa delle dimensioni relativamente cospicue, mantiene a lungo la tipica localizzazione ed il suo aspetto, così che è possibile individuarla anche quando le altre strutture Feulgen–positive sono irriconoscibili. Durante queste modificazioni, nel citoplasma, generalmente a partire dal polo neuritico della cellula di Purkinje, compaiono masse di materiale basofilo che sono risultate ricche in ribonucleotidi (metodi per il RNA), proteine, (metodo del Bleu di bromofenolo) e polisaccaridi (PAS reazione); esse progressivamente invadono il neuroplasma con l'aumentare dell'atrofia del pirenoforo e del dendrite; il nucleolo sembra aumentare di volume e torna basofilo, ma i suoi contorni restano imprecisi e la sua basofilia non riprende l'intensità osservata nelle cellule di Purkinje tipiche; al termine di questo processo ho osservato nel nucleo basofilia diffusa e intensa reazione del Bleu di bromofenolo (proteine) sia nel carioplasma che nel neuroplasma. Alle modificazioni descritte si accompagnano alterazioni a carico delle neurofibrille: dopo impregnazione argentica (metodo di Bodian), infatti, le neurofibrille, che durante la cromatolisi periferica si presentano tuttalpiù ispessite e rarefatte, divengono confuse, si disgregano e conferiscono al neuroplasma degli elementi più atrofici e basofili un'intensa argirofilia diffusa, come avviene nelle cellule di Mauthner nel corso del processo degenerativo (Baffoni [19–21]).

Da queste osservazioni appare chiaro che le cellule di Purkinje cromofile vanno considerate come elementi in degenerazione, destinati a scomparire; essi pertanto non possono essere interpretati espressione di attività funzionale del neurone.

Ulteriori ragguagli degni di nota emergono; *a*) da osservazioni sul rapporto nucleo–plasmatico (N/P) e *b*) sulla frequenza degli elementi in regressione in individui di diversa età:

a) il rapporto N/P durante la cromatolisi periferica aumenta (da 7 a 15) e, poiché i valori assoluti dei diametri nucleari restano immodificati (ved. Tabella), tale aumento va imputato alla lieve atrofia neuroplasmatica, analogamente a quanto ho osservato [19–21] nei processi involutivi del neurone di Mauthner; nel processo degenerativo, invece, il rapporto N/P in un primo tempo continua ad aumentare a causa dell'intensificarsi dell'atrofia neuroplasmatica (il nucleo presenta infatti accenni di atrofia) e nelle ultime fasi precipita (da 17 a 7) a causa dell'attiva partecipazione del nucleo al processo involutivo finale; a questo

abbassamento dei valori assoluti e relativi del nucleo sono associate le alterazioni più profonde delle strutture nucleari (Feulgen–positive) e la diminuzione della cromatina;

b) mentre le cellule di Purkinje di gatti di 20 giorni dalla nascita sono tutte di I tipo, nei gatti di 30–40 giorni compaiono elementi in cromatolisi periferica e cromofili; questi, rispetto agli elementi tipici, nei gattini di 30–40 giorni sono rari (in media 1 : 5), ma diventano più numerosi (in media 1 : 3) nei giovani adulti e frequentissimi (in media 4 : 1) negli adulti di 9 anni: ciò significa che i processi degenerativi a carico degli elementi di Purkinje aumentano numericamente con l'età. Questo fatto, e la rarefazione di neuroblasti e di elementi in differenziamento osservata negli adulti (ved. Nota precedente [1]), armonizza con i risultati di precedenti Autori (Hodge 1894 [22], Ellis 1919 [2], Harms 1924, 1927 [23], Inukai 1928 [24], Spiegel 1928 [25], Andrew 1936 [4]) che in Mammiferi senescenti hanno constatato la rarefazione di elementi di Purkinje. Va osservato infine che gli elementi di Purkinje in cromatolisi sono molto più frequenti che quelli cromofili; ma poiché la frequenza tra i due aspetti varia notevolmente nei diversi individui esaminati, il fenomeno si spiega supponendo, date le lievi modificazioni degli elementi di Purkinje in cromatolisi e per analogia con quanto osservato sulle cellule di Mauthner in larve di Anfibi digiune [21] e rialimentate, che il processo della « cromatolisi periferica » è reversibile.

TABELLA.

Cellule di Purkinje	Pirenoforo		Nucleo		N. 100 / P — N
	diametri	volume	diametri	volume	
Tipiche	30 × 30 μ	15.700 μ³	13 × 12 μ	1.050 μ³	7
	30 × 29	14.000	13 × 12	1.050	8
	30 × 27	12.000	12 × 13	1.050	9,5
	30 × 24	9.000	13 × 12	1.000	12,5
Cromofobe	30 × 21	6.900	12 × 12	900	15
	27 × 18	4.850	12 × 11	700	17
	25 × 14	3.000	12 × 8	300	11
Cromofile	25 × 9	1.250	12 × 5	80	7

Il fenomeno regressivo dei neuroni di Purkinje, in base a tutte queste risultanze, presenta due fasi successive: una fase di *reattività funzionale*, che può essere reversibile, caratterizzata da modica atrofia citoplasmatica e dai quadri tipici della cromatolisi periferica, ed una fase *degenerativa*, contrassegnata da notevole atrofia del neurone e da alterazioni irreversibili nelle sue strutture cario-plasmatiche e citoplasmatiche, quali quelle già da tempo note in elementi nervosi di animali senescenti, anche a proposito dei neuroni di Purkinje (Hodge 1894 [22], Dolley 1911 [26], Salimbeni e Gery 1912 [27], Spiegel 1928 [25], Inukai 1928 [24], Andrew 1938 [9]) e che sono state interpretate come espressione di

(22) C. F. HODGE, « Journ. Physiol. », 17°, p. 129 (1894).
(23) W. HARMS, « Zool. Anz. », *74*, p. 249 (1927).
(24) T. INUKAI, « Journ. Comp. Neurol. », *45*, p. 1 (1928).
(25) A. SPIEGEL, « Zool. Anz. », *79*, p. 173 (1928).
(26) D. H. DOLLEY, « Journ. Med. Res. », *24*, p. 309 (1911).
(27) A. T. SALINBENI e I. GERY, « Ann. Inst. Pasteur », *26*, p. 577 (1912).

processi degenerativi. Il quadro degenerativo delle cellule di Purkinje è perciò caratterizzato dalla cromofilia, accompagnata da atrofia e picnosi nucleare; la cromofilia citoplasmatica, pertanto, in questo caso si interpreta come dovuta alla depolimerizzazione delle proteine neuroplasmatiche ed alla liberazione di ribonucleotidi e di glucidi, analogamente a quanto è stato osservato in altri elementi in degenerazione fisiologica che presentano quadri picnotici simili a quelli delle cellule di Purkinje (Pasteels 1948 [28], Battaglia e Omodeo 1949 [29], Battaglia 1950 [30], Sarà 1950 [31], Stefanelli e Urbani 1954 [32]).

La presenza di processi degenerativi a carico dei neuroni di Purkinje del cervelletto di gatto, spiega chiaramente perché la neoformazione di nuovi neuroni, osservata nell'adulto [1], non comporta il loro aumento numerico: gli elementi di Purkinje che si differenziano nell'adulto, infatti, vengono a sostituire quelli che fisiologicamente si involvono e scompaiono.

In base a queste risultanze, le cellule di Purkinje del cervelletto vanno annoverate tra quei neuroni che Stefanelli (1954) [33] ha classificato « a ciclo vitale limitato ».

E poiché il cervelletto presiede alla coordinazione delle attività muscolari volontarie ed involontarie per la stazione e l'equilibrio del corpo, la sostituzione dei suoi elementi più cospicui, messa in evidenza da queste osservazioni, va correlata con le modificazioni statiche dell'organismo che si verificano nei diversi periodi della vita del mammifero; basti pensare alle modificazioni morfologiche delle ossa (Amprino e Bairati 1935) [34], e di tendini (Amprino e Cattaneo 1936, Bairati 1938) [35] e muscoli (Bucciante e Luria 1934) [36] ad esse funzionalmente connessi; le cellule di Purkinje, perciò, si rinnovano nel ciclo vitale dell'organismo onde adeguare le risposte motorie alle modificate esigenze statiche.

IN CONCLUSIONE: Dalle presenti osservazioni sul gatto, che dimostrano una continua involuzione ed una continua differenziazione di elementi di Purkinje, si conclude che questi neuroni possono essere annoverati tra quelli « a ciclo vitale limitato » Stefanelli. Il numero delle cellule di Purkinje nell'adulto non varia a causa del differenziamento di nuovi elementi in sostituzione di quelli che degenerano. Il rinnovamento dei neuroni di Purkinje è messo in rapporto funzionale con le modicazioni statiche e dinamiche che avvengono nel ciclo vitale dell'organismo.

(28) J. PASTEELS, « Arch. de Biol. », *59*, p. 405 (1948).

(29) B. BATTAGLIA e P. OMODEO, « Caryologia », *2*, p. 1 (1949).

(30) B. BATTAGLIA, « Riv. di Biol. », *42*, p. 27 (1950).

(31) M. SARÀ, « Arch. Zool. Ital. », *35*, p. 195 (1950).

(32) A. STEFANELLI e E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *16*, p. 282 (1954).

(33) A. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *10*, p. 159 (1950); « Scientia », in corso di stampa (1954).

(34) R. AMPRINO e A. BAIRATI, « Z. Zellforsch. mikr. Anat. », *24*, p. 439 (1935); R. AMPRINO, *L'Accrescimento degli Organismi*, Acc. Naz. Lincei, Quaderno 28°, p. 70 (1952).

(35) R. AMPRINO e R. CATTANEO, « Monit. Zool. Ital. », *47*, Suppl. p. 94 (1936); A. BAIRATI, « Z. Zellforsch. mikr. Anat. », *28*, p. 547 (1938).

(36) L. BUCCIANTE e S. LURIA, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », *33*, p. 110 (1934).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Guido Fubini

tenuta (*) dal Socio Beniamino Segre

Il 6 giugno 1943 mancava improvvisamente a New York Guido Fubini, matematico eminente, membro della nostra Accademia fin dal 1916 quale Corrispondente ed a partire dal 1932 quale Socio Nazionale. Non potè Egli allora venir commemorato fra noi, causa la situazione bellica e politica di quei tempi. La commemorazione si sarebbe dovuta tenere l'anno scorso, nella ricorrenza del decennale della morte; il breve rinvio ad oggi, senza toglier nulla alla solennità dell'occasione, ha permesso alla vedova – a cui sono lieto di porgere il mio deferente saluto – di venire ad assistere alla cerimonia, muovendosi dall'America. Dubito però che io possa essere all'altezza del difficile compito – affidatomi dalla Presidenza dell'Accademia – di rievocare una personalità scientifica tanto elevata e complessa: ma, se non osai sottrarmi a tale compito, è nella speranza che l'affetto e l'ammirazione ch'io nutro verso l'indimenticabile Maestro possano valermi un po' d'indulgenza.

* * *

Guido Fubini nacque a Venezia il 19 gennaio 1879 da Lazzaro, professore di matematica in quella Scuola macchinisti, e da Zoraide Torre. Sin dalla più tenera età dimostrò eccezionali attitudini verso gli studi matematici. Ricordava ad esempio con un certo compiacimento di aver stupito i suoi esaminatori, ad una prova finale in quarta elementare, risolvendo in modo inaspettato un problema propostogli con l'uso di logaritmi a base 2. Come altro esempio, in terza liceo trovò una serie fornente π con una convergenza più rapida degli analoghi sviluppi allora noti.

Compiuti brillantemente gli studi medi nella città natìa, Egli fu accolto nel 1896 quale Allievo interno presso la Scuola Normale Superiore di Pisa; in questa sede Egli doveva quindi trascorrere il periodo formativo della Sua vita, che sempre rammentava con nostalgia, rievocando commosso i Suoi grandi Maestri: Luigi Bianchi, Ulisse Dini, Eugenio Bertini, specie il primo, ch'ebbe grande influenza su di Lui. Da quel tempo datavano le Sue abitudini mattiniere, la Sua costanza e resistenza al lavoro, l'ampiezza e varietà delle Sue vedute e dei Suoi interessi matematici, il Suo amore per l'eleganza dei procedimenti propri alla geometria differenziale ed alla geometria proiettiva, ed il desiderio – da Lui realizzato più tardi – di fondere questi due rami in un tutto organico.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

Anche a Pisa manifestò ben presto la Sua spiccata disposizione per gli studi matematici e la Sua precocità, pubblicando – a soli 18 anni! – un interessante lavoro [1] [1] in cui, ottenuta una funzione di due variabili reali con un procedimento di limite operato sull'iterazione alternata delle due operazioni di media aritmetica e geometrica, ne trae una nuova definizione delle funzioni circolari ed iperboliche inverse e della funzione logaritmica, ricavandone tutto un complesso di eleganti relazioni, utili anche per il calcolo numerico. L'anno appresso approfondì ulteriormente siffatte questioni [2], dimostrando fra l'altro che le funzioni *cos* e *log* sono le sole che soddisfino a certe equazioni funzionali. Altri tre lavori pubblicò ancora da studente, fra cui – particolarmente notevole – la Sua prima Nota lincea [4], che risale al 1899, ove stabilisce un intimo legame fra il problema della deformazione delle superficie negli spazi a curvatura costante e l'analogo problema nello spazio euclideo, ed osserva come il primo problema – allo stesso modo del secondo – possa venire utilmente ravvicinato alla teoria delle congruenze W.

La produzione giovanile del Nostro culmina con la Sua importante tesi di laurea, dedicata a *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici* [6], che Gli valse nel 1900 il dottorato a pieni voti, con lode e dignità di stampa. Tale ricerca, complessa e sapientemente congegnata, offre un ampio quadro delle proprietà differenziali degli spazi a curvatura costante positiva, con l'introduzione dei cosidetti p a r a m e t r i d i s c o r r i m e n t o – preludenti alla moderna teoria degli spinori – e lo studio di curve, superficie, congruenze, ecc.; essa fu poi integrata in lavori successivi [27, 37], mediante lo studio dell'applicabilità delle superficie negli spazi ellittici e la determinazione delle coppie di superficie applicabili con conservazione dei raggi di curvatura.

Ha così inizio, in modo estremamente brillante, un'attività fervida ed indefessa di ricercatore che sa muoversi con prodigiosa disinvoltura lungo cammini originali ed impervi; attività che doveva arrecare alla Scienza una gran messe di risultati significativi e portare il Fubini giovanissimo alla cattedra. Ed ecco invero quest'ultimo abilitato con lode all'insegnamento della matematica nel 1901, ottenere quindi a Pisa il posto di perfezionamento Lavagna per l'Analisi superiore, e la nomina ad assistente volontario in Algebra e Geometria analitica. Finchè, al principio del 1903, conseguita la libera docenza in Analisi superiore, viene chiamato dall'Università di Catania come professore incaricato. Ed a Catania rimase fino al principio del 1906, essendo nel frattempo ivi nominato straordinario quale vincitore di un Concorso ch'ebbe come Commissari Arzelà, Bianchi, Capelli, Pincherle e Volterra. Passato a Genova nel 1906 per l'Analisi matematica, fu poi chiamato per la stessa disciplina nel 1908 al Politecnico di Torino, ove rimase per trent'anni, ossia finchè fu dispensato dal servizio in seguito alle cosidette leggi razziali. Durante lo stesso periodo – salvo qualche breve interruzione –

(1) I numeri arabici entro parentesi quadre si riferiscono alle Note e Memorie figuranti nell'elenco delle pubblicazioni posto alla fine della presente Commemorazione; i numeri romani fra parentesi tonde rinviano ai Trattati di tale elenco.

ebbe anche l'incarico dell'Analisi superiore presso l'Università di Torino. Ed in questa città a Lui cara, sposò Anna Ghiron il 28 settembre 1910, ed ebbe i due figli: Gino nel 1911, oggi architetto e costruttore civile, ed Eugenio nel 1913, attualmente direttore di un gruppo di ricerca di un laboratorio americano.

* * *

L'opera scientifica di Guido Fubini è così vasta e multiforme, che difficile riesce dirne in breve senza rischio di sminuirla; tanto più che neppure oggi si può asserire che dalle Sue geniali vedute sulla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, sul principio di minimo e sulla geometria proiettivo–differenziale sia già stato tratto tutto il frutto ch'esse sono in grado di dare. Va inoltre rilevato come i lavori del Nostro varino grandemente dall'uno all'altro non soltanto nell'argomento, ma altresì per quanto concerne la struttura e lo stile, sì che si stenta talora a credere ch'essi siano opera di uno stesso Autore.

In Fubini si palesa il creatore possente e geniale, che con la pura forza dell'intuizione prevede i fatti e riesce sovente a superare gravi difficoltà. Ma in Lui v'è nello stesso tempo il virtuoso che sa adoprare con maestria gli algoritmi più elevati, e che non di rado perviene a risultati riposti attraverso a calcoli formidabili, inabbordabili ai più. L'opera del Fubini lascia un'orma duratura in vari rami classici dell'Analisi e della Fisica matematica; essa ha però dato sopratutto una nuova impronta alla Geometria differenziale, preludendo ai più recenti sviluppi in quest'indirizzo, ed ha arrecato contributi preziosi – anche se saltuari – a quell'opera di rinnovamento dei fondamenti dell'Analisi che si fregia dei nomi di Peano e di Lebesgue. Fubini amava gli affreschi grandiosi, e rifuggiva da casi e questioni particolari, il cui studio di solito lasciava deliberatamente ad altri. Ciò non toglie che nulla vi sia in Lui del matematico astratto; chè anzi le teorie da Lui elaborate originano sempre da problemi concreti, e non si riducono mai a mere estensioni formali.

I lavori del Nostro possono venir classificati, come ora faremo, in diversi gruppi assai distanti fra loro. Di solito, quand'Egli s'interessava di un dato campo di ricerche, si gettava in esso con ardore ed entusiasmo, approfondendo via via questioni sempre più ampie, con uno sforzo di mesi od anche di anni, che apparentemente Gli faceva trascurare e quasi deprezzare argomenti da Lui precedentemente studiati con altrettanta passione. Non infrequenti erano però i ritorni a vecchi ordini d'idee, specie durante gli ultimi anni trascorsi in esilio, il che sta a dimostrare come – nel fatto – tali indirizzi di studio non siano mai stati tanto lontani dal Suo cuore.

* * *

Un primo imponente complesso di ricerche è quello dedicato alla *teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*. Un notevolissimo lavoro [21] del 1903 inizia lo studio delle sostituzioni lineari che mutano in sè una o più forme quadratiche o hermitiane, nonchè dei gruppi da quelle formati,

con particolare riguardo ai gruppi propriamente discontinui ed alla costruzione dei relativi campi fondamentali; ivi, con magistrale sicurezza, s'intrecciano abilmente considerazioni algebriche, geometriche ed aritmetiche, e compare per la prima volta l'utile nozione di p s e u d o d i s t a n z a, ripresa poi in lavori successivi [28, 183] ai quali anche si collegano importanti ricerche dello Study (cfr. [40]). Tali nozioni e considerazioni vengono poi ulteriormente estese ed approfondite in un lavoro [39] del 1905, ove vengono gettate le basi per lo studio delle funzioni automorfe. A questo studio sono dedicati vari ulteriori lavori dello stesso periodo [22, 30, 46, 47], estendenti risultati classici di Poincaré, Klein, Picard, Hilbert e Blumenthal attraverso la costruzione delle funzioni iperfuchsiane e zeta–fuchsiane e delle loro trasformazioni, e con la generalizzazione dei gruppi iperabeliani ed ipermodulari. Altri lavori della medesima epoca [29, 31, 43, 44, 54] approfondiscono l'influenza della discontinuità propria di un gruppo, in relazione al problema della costruzione delle funzioni automorfe e dei campi fondamentali: notevole a questo riguardo è il metodo [esposto in 31] secondo cui o g n i gruppo di proiettività può venire reso propriamente discontinuo, con la scelta di opportuni enti geometrici quali « punti ».

Vari dei risultati suddetti trovansi rielaborati, insieme ad altri per la maggior parte nuovi, in un ampio trattato (I) pubblicato nel 1908 e che ancora oggi fa testo sull'argomento. Taluno dei capitoli di questo volume è tirato giù alla brava, con un rapido schizzo e frequenti ricorsi all'intuizione, sicchè la piena comprensione non riesce sempre agevole: ma l'eleganza degli sviluppi e la ricchezza delle idee sono tali da compensare ampiamente dello sforzo necessario alla lettura. Vanno particolarmente rilevati lo studio delle cosidette g e o m e t r i e h e r m i t i a n e, le applicazioni aritmetiche della esistenza dei campi fondamentali, la risoluzione del problema della determinazione delle funzioni armoniche automorfe, l'approfondimento del teorema generale di diramazione per le funzioni automorfe, infine l'estensione alle funzioni iperfuchsiane ed automorfe dei teoremi di Weierstrass sulle funzioni più volte periodiche.

Parecchi di questi argomenti si presterebbero oggi ancora ad ulteriori investigazioni. Qualcuno degli sviluppi di quel libro potrebbe poi venir utilmente collegato con ricerche recenti di Siegel, Sugawara ed altri, il che fu parzialmente fatto dallo stesso Fubini [182, 183, 186], durante l'ultimo Suo soggiorno in America.

* * *

Nello studio delle funzioni automorfe si presentano come essenziali la metrica di Bolyai e diversi altri tipi di metriche, assieme al gruppo dei relativi movimenti. Ciò doveva spingere il Fubini a fare svariate *applicazioni dei gruppi continui alla geometria differenziale ed alle equazioni della dinamica*, in relazione specialmente al p r o b l e m a d i R i e m a n n–H e l m h o l t z, il quale – com'è ben noto – si propone di caratterizzare la geometria euclidea

o non euclidea partendo da opportune semplici proprietà del relativo gruppo dei movimenti, assunte come postulati.

In alcuni lavori giovanili [8, 13], il Nostro aveva anzitutto approfondita la teoria degli spazi riemanniani generalizzati (ossia a ds^2 non necessariamente positivo) aventi un qualunque numero n di dimensioni e dotati di un gruppo continuo di movimenti. Il caso $n = 3$ era già stato trattato dal Bianchi fin dal 1897, con metodi che non si lasciano però estendere al caso generale. Il Fubini pervenne a caratterizzare i gruppi ammessi da qualche spazio riemanniano ed a determinare – con sole quadrature – gli spazi relativi ad uno qualunque di tali gruppi, assegnando anche un metodo speciale particolarmente semplice, relativo al caso $n = 4$. A queste ricerche si riattaccano vari recenti lavori di Jano e di altri.

Il problema della trasformazione delle equazioni dinamiche in assenza di forze, equivale notoriamente a quello di determinare gli spazi riemanniani che ammettono un gruppo conservante le geodetiche. Le ricerche di Lie e di Koenigs su tali questioni ne avevano dimostrato la grande difficoltà; successivamente, Dini e Levi-Civita avevano determinato tutti gli spazi geodeticamente applicabili. Il Fubini ha quindi arrecato altri importanti contributi col mostrare [15] che, mentre i coefficienti delle trasformazioni infinitesime dei gruppi da considerare sono soggetti ad equazioni a derivate parziali del 2° ordine, il problema può con speciali artifici ridursi al 1° ordine ed in certi casi addirittura alle derivate ordinarie. In tre Note lincee [17] del 1903, il Nostro studia inoltre i problemi dinamici in cui le forze derivano da un potenziale e pei quali i fasci di traiettorie sono permutati fra loro da un gruppo di Lie; in una Nota [23] dell'anno successivo determina tutti i problemi dinamici a due variabili per cui esiste un gruppo trasformante in sè le traiettorie; infine, in due Note lincee [38] del 1905, riprende lo studio e la determinazione di tutte le coppie di varietà fra loro geodeticamente applicabili, dando anche una semplice caratterizzazione di tali varietà.

Ulteriori contributi considerevoli al problema di Riemann-Helmholtz trovansi in un lavoro [16] sul problema degli spazi dotati di un gruppo conforme, con speciale riguardo al caso in cui tale gruppo risulta di movimenti in altro spazio, ed in due lavori [33, 61] sul problema delle trasformazioni di contatto fra spazi riemanniani che mutano ipersfere in ipersfere. Per questo ultimo studio occorrono speciali artifici, in quanto non è possibile di caratterizzare le ipersfere con equazioni differenziali, e mediante essi il Fubini dimostra fra l'altro la possibilità di ricondurre il secondo problema al primo. I vari risultati così conseguiti nel suddetto indirizzo trovansi rielaborati e coordinati in una Memoria riassuntiva [57], pubblicata nel 1908 nei «Mathematische Annalen».

* * *

Un altro argomento a cui il Fubini arrecò contributi essenziali, è quello del *principio di minimo* e delle relative estensioni. È ben noto che B. Riemann, nelle sua « Theorie der Abelschen Functionen » del 1857, aveva creduto

di rendere evidente l'esistenza di una funzione $z = z(x, y)$ armonica in un dato campo ed assumente al contorno valori assegnati, osservando che ciò equivale a trovare fra le funzioni z che assumono al contorno i valori prescritti quella che rende minimo l'integrale $J = \int\int (p^2 + q^2)\, dx\, dy$ esteso a quel campo. L'insufficienza di questa argomentazione fu resa manifesta dal Weierstrass, che rilevò la necessità di dimostrare l'esistenza del minimo; ma si dovette attendere il 1900 – dopo alcuni tentativi di Weber (1871) e di Arzelà (1897) – per precisi chiarimenti sul modo di superare la difficoltà, dati da un suggestivo processo di Hilbert, al quale si riattacca poi tutta una serie di lavori volti a sviluppare metodi diretti di dimostrazione, dovuti specialmente a B. Levi, Lebesgue e Fubini.

Il processo consiste nel considerare l'estremo inferiore L di J per le z soddisfacenti alle condizioni al contorno, e scegliere poi una conveniente successione minimizzante $z_1, z_2, z_3, \cdots$, tale cioè che, posto $J_n = \int\int (p_n^2 + q_n^2)\, dx\, dy$, risulti $\lim_{n\to\infty} J_n = L$. Si tratta allora di rispondere alle seguenti questioni.

1ª) Esiste sempre, o sotto quali condizioni esiste, il $\lim_{n\to\infty} z_n = z$?

2ª) Quand'è che si può asserire che una z siffatta soddisfa alle condizioni al contorno?

3ª) Per tale z, risulta proprio $L = \int\int (p^2 + q^2)\, dx\, dy$?

4ª) La suddetta z risulta di fatto armonica nel dato campo?

Il Fubini diede dapprima [45, 49] soddisfacente risposta alle questioni 3ª) e 4ª), chiarendo e semplificando precedenti sviluppi di B. Levi. Egli quindi si volse [52, 55] alle più difficili questioni 1ª) e 2ª), che riuscì a trattare con originalità e profondità di vedute, usando sistematicamente l'integrale di Lebesgue e ricorrendo a convenienti artifici ed a nuove geniali nozioni. Un risultato saliente da Lui ottenuto in quest'ordine d'idee è la dimostrazione del fatto che il $\lim_{n\to\infty} z_n$ può anche mancare in un insieme I di punti del campo assegnato o, anche esistendo, esser ivi diverso dalla funzione z cercata; tuttavia l'insieme I risulta – com'Egli dice – linearmente nullo, tale cioè da intersecare ogni linea analitica in un insieme di misura lineare nulla, il che fa sì che l'insieme stesso possa venire trascurato quando sulle z_n si effettuino operazioni di tipo abbastanza generale, come ad esempio quelle che portano ai coefficienti delle relative serie di Fourier, sicchè risulta lecito invertire siffatte operazioni con quella di passaggio al limite per $n \to \infty$.

L'importanza dei metodi del Fubini risiede anche in ciò ch'essi possono venir estesi ad altri problemi di *calcolo delle variazioni* o della *teoria delle equazioni differenziali*, come pure allo studio di certe *equazioni integrali*. Di tali estensioni si è occupato lo stesso Fubini in una serie di lavori notevoli [48, 50, 51, 52, 56, 163, 175], su cui non ci soffermiamo per mancanza di tempo, ma dai quali oggi ancora dovrebbero potersi trarre conseguenze rilevanti.

Facciamo inoltre soltanto cenno alle Sue ricerche [11, 12, 18] concernenti le funzioni armoniche ed il problema di Dirichlet negli spazi ellittici od iperbolici; ai vari Suoi teoremi di esistenza ed unicità [19, 24, 34–36, 60, 157'], relativi anche a problemi al contorno di tipo nuovo; ad un teorema di confronto per le equazioni del 2° ordine alle derivate ordinarie, ottenuto [157] con procedimento assai elegante e mezzi elementari; ai Suoi studi asintotici [176] per equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie nell'intorno di un punto singolare; all'istituzione di nuovi legami [63, 64, 70] fra il calcolo delle variazioni e la teoria delle equazioni integro–differenziali. Va rilevato che, in talune delle molteplici Sue ricerche sulle equazioni integrali [25, 26, 65–67], il Fubini è stato preceduto dall'Holmgren; tuttavia Egli riuscì coi Suoi metodi, e quindi senza far uso dell'algoritmo delle forme quadratiche ad infinite variabili, ad estendere la teoria degli autovalori a varie classi di equazioni integrali a nucleo non simmetrico ed alle cosidette equazioni polari, ed a fare un primo passo in una via tuttora quasi inesplorata, dimostrando l'esistenza di almeno un autovalore per certe classi di equazioni integrali n o n lineari.

* * *

Uno dei meriti di Fubini è stato quello di aver apprezzato fra i primi l'ordine d'idee perseguito dal Lebesgue nella sua tesi, e di aver partecipato al largo rinnovamento dell'Analisi che da questa è derivato, non soltanto con gli studi già menzionati sul principio di minimo, ma anche con una serie di brevi Note assai istruttive di *Analisi pura*, varie delle quali sono dei veri gioielli. Il Fubini, però, non apprezzava eccessivamente questi Suoi lavori, che si limitava a considerare come cosette graziose, ed era stupito nel constatare che il Suo nome all'estero – anzichè ai vari profondi risultati da Lui conseguiti in altri campi – veniva per lo più associato al teorema che assegna le condizioni più generali sotto cui un integrale superficiale può venir ottenuto con una doppia integrazione lineare. Questo teorema, ch'Egli ottenne in una Nota lincea [53] del 1907, è stato poi da Lui invertito in due Note lincee [69, 71] del 1913, ove – insieme al teorema inverso, nel frattempo già altrimenti ottenuto dal Tonelli – si dànno esempi sottili di eccezioni; sull'intera questione Egli è poi tornato nell'interessante conferenza [193] pubblicata postuma nel '49, ove la genesi di quel teorema viene nitidamente chiarita.

Vanno inoltre menzionati, nel suddetto indirizzo, la Nota lincea [68] del 1912 che assegna un criterio con cui, dall'esistenza delle $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$, si deduce l'esistenza delle altre derivate d'ordine $\leq n$ per una funzione $f(x, y)$ di due variabili; quella [73] del 1915 in cui si dimostra che una serie di funzioni monotone convergente in un intervallo risulta ivi quasi dappertutto derivabile termine a termine; quella [74] dello stesso anno che fornisce la riduzione dell'integrale che Weierstrass introdusse nel calcolo delle variazioni ad un integrale di Lebesgue. E non si può tacere delle Note [75, 76, 179] che esten-

dono i teoremi di Rolle e della media alle funzioni additive d'insieme; nè di quella [77] in cui, rispondendo ad una questione postaGli dal Tonelli, dimostra l'esistenza quasi dappertutto della derivata mista di un integrale doppio; nè, infine, delle eleganti dimostrazioni [78] dei teoremi di Bernstein e Pringsheim sullo sviluppo in serie di Taylor, o degli studi [180] sui differenziali esatti di classe C°.

* * *

Le ricerche a cui il Fubini giustamente teneva di più, ed in cui Egli ha maggiormente dimostrato la Sua forza creatrice, sono però quelle di *geometria proiettivo–differenziale*. Ed infatti, nonostante già prima di Lui vi fossero sviluppi più o meno sistematici in questo indirizzo, dovuti a Halphen, Wilczynski ed altri, è al Nostro che si deve la più grandiosa ed organica costruzione, quasi in tutto paragonabile a quella della geometria differenziale metrica; tale costruzione, inoltre, ha poi servito di modello a teorie consimili relative al gruppo affine o conforme, ed ha contribuito potentemente a suggerire l'introduzione degli spazi a connessione e delle loro estensioni. Il Fubini, nel cercare l'analogo di molte proprietà metrico–differenziali nel campo proiettivo–differenziale, incontrò difficoltà algoritmiche gravissime, da Lui superate magistralmente con l'uso del calcolo differenziale assoluto e con l'introduzione di opportuni « differenziali controvarianti ». Definita localmente l'applicabilità di due varietà di fronte ad un gruppo di Lie (il che per il gruppo delle collineazioni esige in particolare la considerazione degli intorni del 2° ordine), Egli ottiene l'« elemento lineare proiettivo » d'una superficie in S_3 o d'una ipersuperficie in S_n, quale quoziente di due forme differenziali covarianti del 3° ordine, l'una cubica e l'altra quadratica, e dimostra che condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva è l'uguaglianza degli elementi lineari proiettivi. Sulla scorta di questi concetti e risultati, e con l'utile avvertenza di « normare » convenientemente le coordinate omogenee di un punto variabile sulla superficie od ipersuperficie, Egli ha quindi definite e studiate le due « normali proiettive », le « geodetiche proiettive », la « metrica proiettiva », le « pangeodetiche », ecc., andando a fondo nell'intricato problema della deformazione proiettiva (connesso, nel caso delle superficie, con le proprietà di certe congruenze W). Ha altresì svolto teorie analoghe per le congruenze ed i complessi di rette di S_3, ed ha esteso le classiche ricerche del Bianchi sulle trasformazioni asintotiche ed i relativi teoremi di permutabilità alle superficie da Lui chiamate « isotermo–asintotiche ». In quest'indirizzo si inquadrano numerosissime ricerche Sue e di altri, fra i quali Bompiani, Terracini, Čech, Cartan e Finikoff, le quali gettano luce anche su svariate questioni di geometria metrica od affine (così, ad esempio, Fubini ha mostrato che le trasformate affini delle superficie a curvatura costante nell'ordinario spazio euclideo possono venir caratterizzate con la proprietà di avere la seconda forma proiettiva all'infinito).

Non mi è qui possibile di render conto più particolareggiatamente di un complesso di ricerche così imponente e multiforme, nè d'indicarne esplicitamente le svariate ripercussioni in altri campi. Mi limiterò quindi a rilevare che il Fubini vi ha contribuito con una settantina di Note e Memorie [72, 79–81, 84, 85, 87–89, 91–93, 95, 97–100, 102, 103, 106–114, 116–120, 122, 125–130, 132–139, 144–146, 155, 158, 162, 170, 178, 181, 187, 189] che vanno dal 191 al 1942, nonchè con un ampio trattato in italiano (V) e con un volume (VI) in francese, entrambe queste opere essendo state redatte con la preziosa collaborazione del Čech [2]. Riferirò piuttosto alcuni passi di una lettera a me diretta da questo illustre matematico cecoslovacco, i quali gettano luce sul modo singolare della loro collaborazione, nonchè sulle doti scientifiche ed umane del Fubini.

«...Vi sono delle personalità eminenti, » – scrive il Čech – « l'opera delle quali si compie principalmente nell'aprire nuovi vasti orizzonti. Mi pare che tale sia precisamente in grandi linee il significato dell'opera di Fubini in geometria proiettiva differenziale. Benchè il primo lavoro del Fubini in questo campo sia stato scritto 40 anni fa, il gruppo di lavori allora iniziato contiene molte idee il cui sviluppo completo non è tuttora che nella prima fase. I lavori nei quali Fubini mirava a fondare la geometria proiettiva differenziale con l'introduzione delle forme differenziali e delle coordinate normali furono scritti negli anni dal 1914 al 1920, vale a dire prima del mio soggiorno a Torino. Giudicandone l'importanza, è necessario tener presente che allora non esisteva nè la geometria affine nè la teoria delle connessioni.

« Feci la conoscenza personale di Fubini nel 1921, ossia due anni dopo che io avevo incominciato ad occuparmi di questioni che ora appartengono al quadro della geometria proiettiva differenziale; e da tale anno, nell'autunno del quale cominciai il mio studio a Torino, data la stampa del mio primo lavoro scientifico. Quel soggiorno di nove mesi è stato decisivo per tutta la mia opera scientifica fino al 1931, quando abbandonai per lunghi anni la geometria differenziale per dedicarmi prima alla topologia e più tardi alla didattica. Debbo menzionare che la Memoria [81] di Fubini del 1916, che però io lessi soltanto nel 1920, mi piacque tanto che nulla mi pareva allora più importante che vederne l'Autore. Oggi pure l'importanza di questo lavoro nell'aprire nuovi orizzonti mi pare immenso: non solo son numerosi i miei vecchi lavori dove risolvevo dei problemi sorgenti da quella Memoria, ma appunto i lavori che sto sviluppando in questi ultimi anni sono pienamente ispirati dalla Memoria citata...

« Al principio del mio soggiorno a Torino, Fubini mi aiutava moltissimo ascoltando con pazienza in tutti i dettagli le mie descrizioni di ricerche appena cominciate e seguendo praticamente ogni giorno l'evoluzione delle mie idee. Benchè Egli stesso fosse piuttosto uno spirito analitico, mi incoraggiava

(2) Per la storia della genesi e dello sviluppo delle idee del Fubini nel presente indirizzo cfr. A. TERRACINI, *Guido Fubini e la geometria proiettiva differenziale*, « Rend. Semin. Mat. Torino », 9, 97–123 (1949 50).

noltissimo a sviluppare la facoltà di ragionare sinteticamente; d'altra parte u Lui a non cessare d'incoraggiarmi ad occuparmi di questioni che richiedevano dei calcoli lunghi ed intricati. Non c'è dubbio che, se più tardi risolsi n alcune Memorie delle questioni analiticamente molto complicate, senza 'incoraggiamento di Fubini non avrei nemmeno osato di pensare a risolverle.

« L'idea di collaborare scrivendo un ampio compendio di geometria proiettiva differenziale risale a Fubini, e nacque in Lui verso la fine del mio soggiorno a Torino. Io non ritenevo di essere capace a farlo, e soltanto con molta fatica Fubini riuscì a persuadermi. Durante la preparazione della nostra "Geometria proiettiva differenziale" e più tardi, ci siamo scambiati centinaia di lettere, talvolta molto voluminose. Non ci sono forse molti esempi di collaborazione così intima non appoggiata che allo scambio di lettere. Eppoi, se ci sono molti libri composti da uno scienziato esperto in collaborazione con un giovane discepolo, raro è invece il caso come il nostro in cui il Maestro pienamente concedeva al principiante di mettere nell'opera comune l'esposizione dettagliata di sviluppi talvolta lontani dagli interessi del Maestro. Credo anche questo punto notevole, e testimonianza significativa della grandezza di Fubini. Io mettevo tutte le mie forze nel condurre a termine temi che Fubini non aveva che abbordato, ma purtroppo non sempre vi riuscivo. Ciononostante credo di poter dire che ebbi qualche successo cercando di divulgare le idee del Fubini, le quali dopo tanti anni continuano giustamente ad attirare l'attenzione dei geometri di tutti i paesi ».

* * *

La vasta e multiforme attività scientifica del Fubini non si limita ai campi di ricerca teorica già delineati, ma abbraccia vari rami della *scienza applicata*; in quest'indirizzo Egli era dotato di una grandissima capacità di orientamento e di una singolare competenza, ancora maggiore di quanto non risulti dai Suoi lavori. Così, ad esempio, fu tra i primi ad apprezzare il valore della teoria della relatività, ed ebbe anche qualche polemica sui giornali a sostegno di quest'ultima, sebbene Egli non abbia mai propriamente lavorato in tale campo. Un ramo applicativo che per contro deve a Lui contributi importanti, è quello della *balistica*. Da contatti avuti con ufficiali combattenti durante la prima guerra mondiale, si era reso conto dell'insufficienza dei metodi allora noti nel caso di traiettorie molto curve (tiro indiretto) e di forti dislivelli fra origine e bersaglio. Ed eccolo quindi occuparsi, con nuovi metodi ed intendimenti [82, 83, 90], del calcolo della traiettoria e della correzione del tiro, fondandosi sulla considerazione di un'equazione alle derivate parziali – da Lui ottenuta – cui soddisfa la gittata d'un proietto. Ciò gli attirò una polemica [94] con certo militare nostrano troppo ligio alle tradizioni, seguìta però da un lusinghiero riconoscimento in Francia, ove le Sue ricerche furono accolte nel «Mémorial de l'Artillerie Française» [124]. Sull'argomento Egli ebbe a tornare negli anni dell'esilio, con l'estendere il noto teorema sull'angolo di caduta di un proietto [188] e fare varie interessanti osservazioni di

balistica esterna [191], in occasione di un corso di balistica – tenuto allora – nel quale diede altresì una teoria completa del « boomerang », rimasta però inedita.

Il Fubini ebbe anche ad occuparsi in varie occasioni di altre questioni di *fisica-matematica*, concernenti l'estensione delle ricerche di Poincaré e Lauricella sulla vibrazione delle membrane [10], la propagazione della luce in un mezzo non isotropo e non omogeneo [58], l'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico [59, 62], la teoria della trave inflessa [160, 165, 167, 171–174, 192] e quella dei condensatori [149]. Ma il Suo interessamento verso le applicazioni della matematica alla fisica ed all'ingegneria, spronato anche dal desiderio ch'Egli aveva di seguire ed aiutare i figli nei loro studi, andava molto al di là; del che si può avere conferma scorrendo il bel volume (III) di « Esercizi di analisi matematica » in collaborazione col Vivanti e, ancor più, leggendo « La matematica degli ingegneri », opera enciclopedica (IV) – scritta negli ultimi anni in collaborazione con l'Albenga – rimasta però purtroppo al primo volume.

Terminando la nostra necessariamente sommaria analisi dei lavori, sorvoliamo per brevità su alcune ricerche di carattere occasionale [9, 20, 121, 123, 148, 151, 154, 161, 170, 177, 184, 185, 190], fra le quali hanno particolare importanza le due Note lincee [151, 154] collegate a teoremi di Severi e Hartogs, nonchè sui discorsi [150, 152, 153, 155, 159, 168, 169], necrologi, commemorazioni [86, 140–143, 156, 166] ed articoli vari [3, 5, 41, 42, 104, 105, 115, 131, 147, 163, 164]. Ma non possiamo tacere delle Sue limpidissime « Lezione di Analisi matematica », opera (II) giunta alla 5ª edizione, nella quale aveva profusi i tesori della Sua lunga e sagace esperienza didattica, dedicandovi costanti ed amorevoli cure. Una caratteristica di tale opera, imitata poi in vari altri Corsi consimili, è la riduzione al minimo della parte algebrica, per dare massimo risalto ai concetti propri al calcolo differenziale ed integrale, presentati nella forma più accessibile accompagnando la trattazione rigorosa con rappresentazioni intuitive e figurazioni immaginosamente suggestive.

* * *

Far lezione, era per Lui gioia e piacere; talvolta febbricitante, non rinunciava alla scuola, dimenticando malesseri e dolori nell'impeto dell'insegnamento e nella soddisfazione da Lui provata nel trasmettere ad altri il sapere. Aborriva invece gli esami, che però – anche in questo ligio al dovere nel modo più scrupoloso – si sorbiva tutti uno per uno, facendone circa 800 per sessione e lavorando spesso in periodo di esami dalle 8 alle 12 e dalle 14 alle 19. Parlatore vivace ed arguto, sovente paradossale, Sua prima preoccupazione era di non annoiare l'uditorio, di cui riusciva a captare e conservare l'attenzione con la voce tonante, il gesto espressivo, la parola piana e scultorea, mettendo a nudo l'essenza delle cose nel modo più semplice ed attraente. Ciò rendeva il Suo insegnamento efficacissimo ed apprezzatissimo dagli studenti, che

accorrevano in gran numero alle Sue lezioni, e dei quali era l'idolo nonostante la Sua proverbiale irrequietezza e severità agli esami.

Per dare un'idea del Suo stile pieno di contrasti e di enfasi, riporterò un passo di una Sua conferenza [159], ove dice che – chi procedesse così e così – « commetterebbe l'enorme sproposito di introdurre simboli non ancora definiti, o, ciò che è forse lo stesso, farebbe atto di audace intuizione ». In quell'« enorme », e nel successivo inciso « ciò che è forse lo stesso », c'è tutto Fubini!

Si può forse dire che il contrasto risiedesse in Lui, fra l'esuberanza stessa della Sua forte personalità e la minutezza del Suo fisico, ciò che a Princeton Gli aveva valso il nomignolo scherzoso di « little giant ». Aveva grande presenza di spirito, e doti non comuni di adattabilità e di coraggio personale. Facile agli entusiasmi, amante della libertà e di carattere aperto e rettilineo, parlava sempre francamente, senza perifrasi e senza preoccupazioni di carattere politico o personale.

Non poteva conseguentemente trovarsi bene sotto il fascismo, di cui risentiva l'intolleranza e la vuota prosopopea, e di cui antivedeva con chiarezza la catastrofe. Si rinchiuse quindi sempre più in sè, dividendo la Sua vita fra la famiglia, lo studio e l'insegnamento. Fu marito e padre esemplarmente devoto ed affezionato e seguì ed aiutò i figli con pazienza e comprensione, diventandone il consigliere e l'amico, come sempre fu consigliere ed amico dei Suoi allievi. Ebbe fra l'altro a dimostrare il Suo attaccamento alla famiglia, col volere negli ultimi anni aggiunto al Suo nome quello Ghiron della moglie.

Fra le caratteristiche Sue più spiccate erano la freschezza della mente, la giovanilità dell'animo, la prontezza e la vivacità che metteva in ogni cosa, anche se accompagnate talora da una certa incostanza e mutevolezza di umori, il brillante spirito intuitivo, la rapida visione della via corretta nella ricerca ed il giudizio quasi infallibile su risultati futuri, infine la disinteressata passione per il lavoro, tutte doti conservatesi pressochè inalterate fino alla morte, nonostante la malattia degli ultimi anni. I Suoi scritti sono ricchi di vedute originali e profonde e di suggestioni che vanno sovente molto al di là della materia trattata. In essi, come nelle Sue lezioni, Egli si limitava sovente a tracciare le grandi linee di teorie generali, senza mai perdersi in particolari minuti, mettendo vividamente in luce i punti salienti, illustrando con chiarezza e semplicità la genesi delle idee e degli artifici, e non peritandosi talvolta di segnalare qualche risultato o problema che avesse resistito ai Suoi sforzi.

Oltre che alla nostra Accademia, appartenne quale Socio Nazionale all'Accademia delle Scienze di Torino ed all'Accademia dei XL, e fu membro dell'Istituto Lombardo e Socio onorario dell'Unione Cecoslovacca dei Matematici e Fisici. Nel 1920 gli fu conferito il Premio Reale dei Lincei, in competizione con vari altri matematici di chiara fama, fra cui Gaetano Scorza e Orazio Tedone; e nel 1928, con la scomparsa di Luigi Bianchi, era a questi succeduto nella condirezione degli « Annali di Matematica », rimanendovi

fino all'anno 1938, quando ne fu rimosso in conseguenza dei già ricordati provvedimenti razziali.

Privato allora persino della gioia dell'insegnamento, ebbe l'amarezza di dover andare con la famiglia esule a Parigi, ove fu colpito dalle prime avvisaglie del male che doveva poi stroncarne l'esistenza. Parve riprendersi quando fu chiamato a Princeton all'« Institute for Advanced Study ». Ed infatti, dopo un breve periodo d'inazione, si mise con ammirevole entusiasmo e rinnovato ardore ad approfondire la lingua inglese e la storia dell'America ed a coltivare ancora i prediletti studi scientifici. Pubblicò quindi, in rapida successione, una serie di svariatissimi ed interessanti lavori, di cui taluni riecheggiano vecchi temi a Lui cari, ma altri concernono argomenti del tutto nuovi, più vicini agli interessi dei matematici americani. Fra questi ultimi merita di venire segnalata particolarmente una Nota [185] del 1940, per le notevolissime proprietà e considerazioni aritmetiche ivi svolte sui gruppi finiti.

Purtroppo, però, a migliorare la Sua salute ormai scossa non bastò l'atmosfera serena e riposante della libera America, nè l'accoglienza cordiale ed affettuosa di colleghi ed amici, fra i quali Egli era particolarmente lieto di annoverare Oswald Veblen ed Albert Einstein. I Suoi disturbi peggiorarono, ed Egli allora si trasferì a New York, preferendo il clima di questa città a quello di Princeton, e cercò di non pensare ai propri mali assorbendosi sempre più nella ricerca matematica. Egli spesso ringraziava Dio, che Gli aveva fatto scegliere un ramo di scienza per cui non occorrono nè macchine nè laboratori, ma soltanto un pezzo di carta ed una matita, coltivando il quale diceva di godere gioie estetiche – paragonabili a quelle offerte dalla musica – che Gli permettevano di appartarsi dal mondo e vivere in una sfera superiore, staccata dalle umane perfidie.

Lavorò così fino all'ultimo. La mattina stessa in cui doveva mancare, venne pregato dal figlio Gino di risolvergli un non facile problema; felice di rendersi utile, si immerse subito in equazioni e calcoli intricati, giungendo velocemente alla soluzione desiderata. Qualche minuto più tardi si sdraiò su di un divano, dicendosi stanco: e così mancò, subitamente, della morte del giusto.

Il Suo nome sta scritto – a lettere indelebili – sia nel Pantheon dei grandi matematici italiani che nel cuore dei molti che Lo amarono!

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI GUIDO FUBINI

TRATTATI.

I. – *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Pisa, Spoerri, 1908.

II. – *Lezioni di Analisi matematica* (ristampa della 5ª ediz.), Torino, Viglongo, 1947.

III. – (In collaborazione con G. VIVANTI) *Esercizi di analisi matematica* (ristampa della 2ª ediz.), Torino, Viglongo, 1947.

IV. – (In collaborazione con G. ALBENGA) *La matematica degli ingegneri*, Bologna, Zanichelli, vol. I, 1949.

V. – (In collaborazione con E. ČECH) *Geometria proiettiva differenziale*, 2 voll., Bologna, Zanichelli, 1926–27.

VI. – (In collaborazione con E. ČECH) *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier–Villars, 1931.

NOTE E MEMORIE.

[1] 1897. *Nuovo metodo per lo studio e per il calcolo delle funzioni trascendenti elementari*, « Period. di Mat. », vol. 12.

[2] 1898. *Di una nuova successione di numeri*, « Period. di Mat. », vol. 14.

[3] 1899. *Quistione 446*, « Period. di Mat. », vol. 14.

[4] 1899. *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazi a curvatura costante*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 81.

[5] 1900. *Sulla teoria dei limiti*, « Giorn. di Battaglini », vol. 38.

[6] 1900. *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici*, « Ann. di Pisa », vol. 9.

[7] 1901. *Su una classe notevole di superficie nello spazio ellittico*, « Atti Ist. Veneto », vol. 60.

[8] 1902. *Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 8.

[9] 1902. *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 11.

[10] 1902. *Sopra una classe di equazioni che ammettono come caso particolare le equazioni delle membrane e delle piastre sonore*, « Rend. Ist. Lombardo », ser. 2ª, vol. 35.

[11] 1902. *I principî fondamentali della teoria delle funzioni armoniche negli spazi a curvatura costante*, « Ann. di Pisa », vol. 9.

[12] 1902. *Sulle funzioni armoniche che ammettono un gruppo discontinuo*, « Atti Acc. Torino », vol. 37.

[13] 1902. *Sugli spazi a 4 dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 11_2.

[14] 1903. *Sugli spazi a 4 dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 9.

[15] 1903. *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche*, « Mem. Acc. Torino », ser. 2ª, vol. 53.

[16] 1903. *Sulla teoria degli spazi che ammettono un gruppo conforme*, « Atti Acc. Torino », vol. 38.

[17] 1903. *Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 12, 3 Note.

[18] 1903. *Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 12.

[19] 1903. *Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni alle derivate parziali*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 17.

[20] 1903. *Una generalizzazione del teorema di Malus–Dupin*, « Boll. Acc. Gioenia », fasc. 79.

[21] 1903. *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme*, « Atti Acc. Gioenia », ser. 4ª, vol. 17.

[22] 1903. *Applicazioni analitiche dei gruppi di proiettività trasformanti in sè una forma Hermitiana*, « Atti Acc. Gioenia », ser. 4ª, vol. 17.

[23] 1904. *Sulle traiettorie di un problema dinamico*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 18.

[24] 1904. *Su alcune nuove applicazioni dei metodi di Picard e di Riemann alla teoria delle equazioni alle derivate parziali*, « Atti Acc. Gioenia », ser. 4ª, vol. 18.

[25] 1904. *Sopra una formula del Fredholm nel problema dell'inversione degli integrali definiti*, « Boll. Acc. Gioenia », fasc. 83.

[26] 1904. *Sull'inversione degli integrali definiti*, « Rend. Acc. Napoli », ser. 3ª, vol. 10.

[27] 1904. *Sulle coppie di superficie applicabili nello spazio ellittico*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 13.

[28] 1904. *Sulle metriche definite da una forma Hermitiana*, « Atti Ist. Veneto », ser. 8ª, vol. 63.
[29] 1904. *Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 13.
[30] 1904. *Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 10.
[31] 1904. *Sui gruppi di proiettività*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 13_2, 2 Note.
[32] 1904. *Sui gruppi di proiettività*, Catania, Galatola.
[33] 1905. *Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque*, « Rend. Ist. Lombardo », ser. 2ª, vol. 38.
[34] 1905. *Un'osservazione sulla teoria delle funzioni poliarmoniche*, « Rend. Ist. Lombardo », ser. 2ª, vol. 38.
[35] 1905. *Nuove applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 14.
[36] 1905. *Alcuni nuovi problemi che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali*, « Atti Acc. Torino », vol. 40.
[37] 1905. *Le superficie di Bonnet nello spazio ellittico*, « Boll. Acc. Gioenia », fasc. 84.
[38] 1905. *Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 14, 2 Note.
[39] 1905. *Sulla teoria dei gruppi discontinui*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 11.
[40] 1905. *Sulle metriche Hermitiane*, « Boll. Acc. Gioenia », fasc. 86.
[41] 1905. *Sugli integrali definiti di una funzione finita*, « Period. di Mat. », ser. 3ª, vol. 20.
[42] 1905. *Sugli integrali definiti di una funzione finita*, « Boll. Acc. Gioenia », fasc. 80.
[43] 1906. *Nuove ricerche intorno ad alcune classi di gruppi discontinui*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 21.
[44] 1906. *Sulla costruzione dei campi fondamentali di un gruppo discontinuo*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 12.
[45] 1906. *Sul principio di Dirichlet*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 22.
[46] 1906. *Sulla teoria delle funzioni automorfe*, « Atti Ist. Veneto », vol. 65.
[47] 1907. *Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro trasformazioni*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 14.
[48] 1907. *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 23.
[49] 1907. *Il principio di minimo*, « Rend. Circ. Palermo, », vol. 23.
[50] 1907. *Il problema di Dirichlet considerato come limite di un ordinario problema di minimo*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 16.
[51] 1907. *Di alcuni nuovi problemi, ai quali è applicabile il principio di Dirichlet*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 16.
[52] 1907. *Nuove applicazioni al principio di minimo* (*Il problema di Lord Kelvin*), « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 14.
[53] 1907. *Sugli integrali multipli*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 16.
[54] 1908. *Sulla discontinuità propria dei gruppi discontinui*, « Atti Congr. Int. Mat., Roma ».
[55] 1908. *Sul principio di minimo di Dirichlet*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 15.
[56] 1908. *Applicazioni del calcolo delle variazioni alle equazioni differenziali che non coincidono con le equazioni aggiunte*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 17.
[57] 1908. *Applicazioni della teoria dei gruppi continui alla geometria differenziale ed alle equazioni di Lagrange*, « Math. Ann. », vol. 66.
[58] 1908. (In collaborazione con A. GARBASSO) *Sopra il problema più generale dell'ottica*, « Atti Acc. Torino », vol. 44.
[59] 1908. *Sull'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico*, 2 Note., « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 17.
[60] 1909. *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni alle derivate parziali*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 18_1.

[61] 1909. *Sulle rappresentazioni che conservano le ipersfere*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 16.
[62] 1909. *L'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico e l'equazione di Eulero delle campane sonore*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 18.
[63] 1910. *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 19.
[64] 1910. *Le successioni minimizzanti nel calcolo delle variazioni*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 19_1.
[65] 1910. *Di alcune nuove classi di equazioni integrali*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 19.
[66] 1910. *Equazioni integrali e valori eccezionali*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 17.
[67] 1912, *Sulle equazioni integrali di 3ª specie di Emile Picard*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 21.
[68] 1912. *Derivate successive di una funzione di più variabili*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 21.
[69] 1913. *Sugli integrali doppi*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 22_1.
[70] 1913. *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 20.
[71] 1913. *Su un teorema relativo agli integrali doppi*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 22.
[72] 1914. *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, « Atti Acc. Torino », vol. 49.
[73] 1915. *Sulla derivazione per serie*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 24_1.
[74] 1915. *Sulla definizione di arco di una curva e dell'integrale di Weierstrass, che si presenta nel calcolo delle variazioni*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 24_1.
[75] 1915. *Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla?*, « Atti Acc. Torino », vol. 50.
[76] 1915. *Il teorema del valor medio*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 24_1.
[77] 1915. (In collaborazione con L. TONELLI) *Sulla derivata seconda mista di un integrale doppio*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 40.
[78] 1916. *I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor*, « Atti Acc. Torino », vol. 51.
[79] 1916. *Su una classe di congruenze W di carattere proiettivo*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 25_1.
[80] 1916. *Invarianti proiettivo-differenziali delle curve tracciate su una superficie e definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, « Ann. di Mat. », ser. 3ª, vol. 25.
[81] 1916. *Applicabilità proiettiva di due superficie*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 41.
[82] 1917. *Alcune formule di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 26_1.
[83] 1917. *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 26_1.
[84] 1918. *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie*. 2 Note., « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 27_2.
[85] 1918. *Studi relativi all'elemento lineare proiettivo di una ipersuperficie*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 27.
[86] 1918. (In collaborazione con G. LORIA) *Eugenio Elia Levi (1883-1917)*, « Boll. di Bibliogr. e Storia delle Scienze Mat. ».
[87] 1918. *Fondamenti di geometria proiettiva-differenziale*. « Rend. Circ. Palermo », vol. 43.
[88] 1918. *Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie. Le varietà a un qualsiasi numero di dimensioni*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 27_2.
[89] 1918. *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, « Atti Acc. Torino », vol. 53.
[90] 1918. *Alcune osservazioni relative ai problemi secondari della balistica esterna*, « Scritti Mat. offerti a Enrico D'Ovidio », Torino, Bocca.
[91] 1918. *I differenziali controvarianti*, « Atti Acc. Torino », vol. 54.
[92] 1918. *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 27.

[93] 1919. *Fondamenti della geometria proiettivo–differenziale dei complessi e delle congruenze di rette*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 28.
[94] 1919. *Alcune osservazioni sui problemi della balistica esterna*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 28_1.
[95] 1920. *Sur les surfaces projectivement applicables*, « Comptes Rendus », vol. 171.
[96] 1920. *Sur les fonctions automorphes*, « Comptes Rendus », vol. 171.
[97] 1920. *Differenziali controvarianti*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 29_1.
[98] 1920. *Invarianti affini differenziali di una superficie*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 29_1.
[99] 1920. *Nuove ricerche di geometria proiettivo–differenziale*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 29_1.
[100] 1921. *Sulla teoria proiettiva delle congruenze W*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 30.
[101] 1921. *Sur les fonctions automorphes*, « Comptes Rendus », vol. 172.
[102] 1921. *Teoria de las superficies de Gauss*, « Rev. Mat. Hisp. Amer. », vol. 3.
[103] 1921. *Geometria differencial proyectiva de una superficie*, « Rev. Mat. Hisp.–Amer. », vol. 3.
[104] 1921. *Teorie elementari della relatività*, « Eserc. Mat. », vol. 1.
[105] 1922. *Lo sviluppo matematico della relatività di Einstein*, Genova, Libr. Ed. Moderna.
[106] 1922. *Geometria proiettivo–differenziale di una superficie* V_2 *nello spazio* S_4 *a quattro dimensioni*, « Math. Ann. », vol. 85.
[107] 1922. *Un teorema di Čech sulle superficie proiettivamente applicabili*, « Boll. U.M.I. », vol. 1.
[108] 1923. *La teoria proiettiva delle congruenze W*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 32_1.
[109] 1923. *Relazioni tra le due falde focali di una congruenza W. Composizione di 2 trasformazioni W*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 32_1.
[110] 1923. *Le congruenze W a falde focali rigate e il teorema di Segre. Le superficie isotermo–asintotiche e le loro trasformazioni*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 32_1.
[111] 1923. *La teoria proiettiva delle congruenze W e il problema della deformazione infinitesima (metrica) di una superficie*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 32.
[112] 1923. *Alcuni risultati di geometria proiettivo–differenziale*, « Rend. Lincei », ser. 5ª, vol. 32.
[113] 1924. *La trasformazione di Jonas delle superficie*, « Boll. U.M.I. », vol. 3.
[114] 1924. *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie* R, « Ann. di Mat. », ser. 4ª, vol. 1.
[115] 1924. *Sul valore della teoria di Einstein*, « Scientia », vol. 35.
[116] 1924. *Riassunto di alcune ricerche di geometria proiettivo–differenziale*, « Atti Congr. Int. Mat., Toronto ».
[117] 1924. *Recherches sur la théorie des congruences et dès complexes de droites* (in cecoslovacco), « Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk ».
[118] 1925. *Applicabilità proiettiva di due superficie*, « Boll. U.M.I. », vol. 4.
[119] 1925. *Un'osservazione sulla quadrica di Lie*, « Boll. U.M.I. », vol. 4.
[120] 1925. *Sulle congruenze coniugate od armoniche ad una superficie data*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 49.
[121] 1925. *Il gruppo modulare nello spazio a quattro dimensioni*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 1.
[122] 1925. *Sulle varietà a sezioni piane collineari*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 1.
[123] 1925. *Un'osservazione sulla trascendente d(z) del Pincherle*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 1.
[124] 1925. *Quelques recherches de balistique extérieure*, «Mémorial de l'Artillerie Française».
[125] 1926. *Geometria proiettivo–differenziale*, « Boll. U.M.I. », vol. 5.
[126] 1926. *Nuova trattazione elementare dei fondamenti della geometria proiettivo–differenziale di una superficie*, « Rend. Ist. Lombardo », t. 59.
[127] 1926. *Sulla teoria delle superficie* R *e delle loro trasformazioni*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 4.

[128] 1926. *Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 4.
[129] 1927. *Invarianti proiettivi, metrici, affini di una superficie*, « Boll. U.M.I. », vol. 6.
[130] 1927. *Un'osservazione a proposito della nota precedente*, « Boll. U.M.I. », vol. 6.
[131] 1927. *Relazione sui lavori presentati dal prof. Koebe*, « Bull. Soc. Phys. Mat. Kazan », ser. 3ª, vol. 2.
[132] 1927. *Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 5.
[133] 1928. *Una nuova generazione delle quadriche di Darboux*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 7₁.
[134] 1928. *Le trasformazioni di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperficie*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 8.
[135] 1928. *Ancora sulle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard per le ipersuperficie*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 8.
[136] 1928. *Sugli invarianti di una equazione di Laplace*, « Boll. U.M.I. », vol. 7.
[137] 1928. *La trasformazione di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperficie*, « Atti Congr. Int. Mat., Bologna ».
[138] 1928. *Il problema dell'applicabilità negli spazi quadratici*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. 52.
[139] 1928. *Una rapida scorsa ai fondamenti della geometria proiettivo-differenziale*, « Rend. Sem. Mat. Milano », vol. 2.
[140] 1928. (In collaborazione con A. CONTI) *In memoria di Luigi Bianchi*, « Boll. di Mat. », ser. 2ª, vol. 7.
[141] 1929. *Luis Bianchi, su obra cientifica*, « Rev. Mat. Hisp. Amer. ».
[142] 1929. (In collaborazione con A. M. BEDARINA) *Luigi Bianchi e la sua opera scientifica*, « Ann. di Mat. », ser. 4ª, vol. 6.
[143] 1929. *Commemorazione del Socio Luigi Bianchi*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 10.
[144] 1929. *Un problema della teoria delle congruenze di rette con applicazioni al problema della rappresentazione sferica di una superficie non-euclidea ed a un teorema di Bianchi e di Blaschke*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 9.
[145] 1929. *Sul fascio canonico*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 9.
[146] 1929. *Ancora sul fascio canonico*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 9.
[147] 1929. *Le trasformazioni in geometria differenziale e l'opera di Luigi Bianchi*, « Boll. di Mat. », ser. 2ª, vol. 8.
[148] 1930. (In collaborazione con T. LEVI-CIVITA) *Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini*, « Ann. di Mat. », ser. 4ª, vol. 7.
[149] 1930. (In collaborazione con E. PERUCCA e G. C. VALLAURI) *Studio di un particolare condensatore elettrico*, « L'Elettrotecnica », vol. 17, n. 12.
[150] 1930. *La matematica come creazione del pensiero e come strumento tecnico*, « Giorn. Mat. Fin. », vol. 12.
[151] 1931. *Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 14.
[152] 1931. *Sui teoremi di esistenza e di unicità per i sistemi di equazioni differenziali*, « Conf. Fis. Mat., Torino ».
[153] 1931. *La matematica come creazione del pensiero e come strumento tecnico*, « Annuario della Scuola di Ing. Torino ».
[154] 1932. *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs ed uno del Severi*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 15.
[155] 1932. *Idee direttive nello sviluppo delle geometrie differenziali*, « Conf. Fis. Mat., Torino ».
[156] 1933. *Eugenio Bertini*, « Atti Acc. Torino », vol. 68.
[157] 1933. *Su un teorema di confronto per le equazioni del 2° ordine alle derivate ordinarie*, « Ann. di Pisa », ser. 2ª, vol. 2.

[157'] 1933. *Un teorema di unicità per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 18_2.

[158] 1934. *Sur la géométrie projective des réseaux plans*, « Compos. Math. », vol. 1.

[159] 1934. *Introduzione ai metodi simbolici di calcolo*, « Conf. Fis. Mat., Torino ».

[160] 1935. *Sobre la flexion de la viga de pequena curvatura*, « Rev. Mat. Hisp. Amer. », ser. 2ª, vol. 10.

[161] 1935. *Dimostrazione elementare della sviluppabilità in serie di Fourier di alcune funzioni*, « Ann. di Pisa », ser. 2ª, vol. 4.

[162] 1935. *I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale*, « Ann. di Pisa », ser. 2ª, vol. 4.

[163] 1935. *Principio di minimo*, « Publ. Labor. Mat. Madrid ».

[164] 1935. *El principio de minimo*, 2 Note, « Rev. Mat. Hisp.-Amer. », ser. 2ª, vol. 10.

[165] 1935. *Sulla teoria delle travi flesse*, « Boll. U.M.I. », vol. 14.

[166] 1935. *Luigi Lagrangia*, « Celebrazioni Piemontesi », vol. 1.

[167] 1936. *Sulla deformazione delle travi ad asse curvo*, « Scritti offerti a L. Berzolari », Pavia.

[168] 1936. *Una lezione sul calcolo funzionale degli elettrotecnici*, « Conf. Fis. Mat., Torino ».

[169] 1936. *Problemi tecnici e problemi matematici*, « Atti Soc. It. Progr. Scienze », XXIV Riunione, vol. 3.

[170] 1937. *Sulle terne di congruenze di curve nello spazio proiettivo*, « Ann. di Mat. », ser. 4ª, vol. 16.

[171] 1937. *Sulla teoria della trave ad asse curvo*, « Atti Acc. Torino », vol. 72.

[172] 1937. *Sul teorema di Castigliano*, « Atti Acc. Torino », vol. 72.

[173] 1937. *Sullo sforzo di taglio nella teoria della trave flessa*, « Atti Acc. Torino », vol. 72.

[174] 1937. *Il principio di minimo nella teoria della flessione delle travi ad asse curvo*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 61.

[175] 1937. *Sopra una nuova classe di problemi al contorno*, « Rend. Circ. Palermo », vol. 61.

[176] 1937. *Studi asintotici per alcune equazioni differenziali*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 26.

[177] 1938. *Una lezione sulla riduzione di un differenziale ellittico reale a forma canonica con una trasformazione reale*, « Boll. U.M.I. », vol. 17.

[178] 1940. *One property of W congruences*, « Ann. of Math. », ser. 2ª, vol. 41.

[179] 1940. *El teorema del valor medio para funciones no derivables*, « Publ. Univ. Litoral », vol. 2.

[180] 1940. *On Cauchy's integral theorem and on the law of the mean for non-derivable functions*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », vol. 26.

[181] 1940. *On Bianchi's permutability theorem and the theory of W congruences*, « Ann. of Math. », ser. 2, vol. 41.

[182] 1940. *A remark on general Fuchsian groups*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », vol. 26.

[183] 1940. *The distances in general Fuchsian geometries*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », vol. 26.

[184] 1940. *Equazioni differenziali per i periodi di un integrale iperellittico*, « Rev. Mat. y Fis. Téor., Tucuman », vol. 1.

[185] 1940. *Algunas propriedades de los grupos discontinuos finitos*, « Publ. Univ. Litoral », vol. 3.

[186] 1940. *On hyperautomorphic functions*, « Rev. Mat. y Fis. Teor., Tucuman », vol. 1.

[187] 1941. *On the asymptotic lines of a ruled surface*, « Bull. Amer. Math. Society », vol. 47.

[188] 1941. *An elementary property of the trajectories of a projectile*, « Am. Math. Montly », vol. 48.

[189] 1942. *On a class of surfaces*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », vol. 28.

[190] 1942. *On Abel's converse theorem*, « Ann. of Math. », ser. 2ª, vol. 43.

[191] 1942. *Una observacion elemental sobre las ecuaciones de la balistica externa*, « Math. Notae », Ano 2.

[192] 1945. *Un problema sulle piastre su cui agisce un carico concentrato e sue generalizzazioni analitiche*, « Public. Univ. Litoral », vol. 5.

[193] 1949. *Il teorema di riduzione per gli integrali doppi*, « Rendic. Semin. Mat. Torino », vol. 9.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il suo cordiale saluto a tutti i Colleghi e, in particolare, ai nuovi Soci presenti alla seduta.

Comunica poi che hanno ringraziato per la nomina il Socio Nazionale Oscar Chisini e i Soci Corrispondenti Luigi Brusotti, Luigi Fantappiè, Mario Ageno, Niccolò Dalla Porta e Alessandro Rossi Fanelli.

Il prof. Giordani dà quindi alla Classe il doloroso annuncio della morte, avvenuta in data 14 luglio c. a., del Socio Corrispondente prof. Egidio Feruglio, della Categoria IV – Sezione Geologia e Paleontologia – e invia alla memoria dell'illustre Collega scomparso un pensiero di reverente omaggio, assicurando che Egli sarà degnamente commemorato in una delle prossime sedute.

La Classe designa, per tale commemorazione, il Socio Gortani.

Il Presidente dà poi la parola al Collega Segre che rievoca la figura e l'opera del compianto Socio Guido Fubini.

Il Presidente ringrazia il prof. Segre per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio Fubini, presenti alla commemorazione, l'espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso scienziato.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato del sig. Riccardo Cestari, consegnato all'Accademia in data 11 settembre c. a. Detto plico contiene, come risulta da una annotazione sulla busta, una memoria dal titolo « Relazioni fra la risoluzione dell'equazione diofantea $nh + mk + phk = q$ e la ricerca dei divisori di un numero ».

Presenta poi un plico suggellato dei sigg. dott. Salvatore Onorato, Umberto Bellotta, Antonino Giardina e Giovanni Piccolo, presentato all'Accademia dal dott. Guglielmo Tanteri, Notaio in Palermo, in data 2 novembre c. a. Detto plico contiene, come risulta da annotazione sulla busta, una nota di Biologia, e potrà essere aperto a richiesta degli Autori congiuntamente o a richiesta del solo dott. Salvatore Onorato, in conformità di quanto espressamente dichiarato dagli Autori stessi con altra annotazione sulla citata busta.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i predetti plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sansone presenta il II volume delle Opere di Ulisse Dini, a cura dell'Unione Matematica Italiana con le seguenti parole:

« Il volume raccoglie un gruppo di memorie sulle funzioni di una variabile reale e sul calcolo degli integrali definiti, sugli sviluppi in serie di funzioni sferiche, trigonometriche generalizzate e Jacobiane, curato da G. Sansone e G. Scorza–Dragoni; un gruppo di lavori sulla equazione di Laplace e sul così detto problema di Dini–Neumann, curato da M. Picone; e un gruppo di memorie sulla teoria delle funzioni analitiche, curato da F. Cecioni. Ai professori G. Scorza–Dragoni, M. Picone, F. Cecioni, l'U.M.I. rivolge un vivissimo ringraziamento.

« Le introduzioni ai singoli gruppi mettono in luce gli apporti del Nostro: gli estremi oscillatori chiamati dopo numeri derivati del Dini, i teoremi classici del Dini per la rappresentazione delle funzioni con serie e con integrali, il problema misto per le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, la scoperta e lo studio sistematico di classi di funzioni più estese di quelle sferiche, testimoniano quanto l'analisi moderna deve alla geniale produzione del Dini.

« Un terzo volume in corso di stampa, curato da G. Sansone e da M. Picone, raccoglierà due gruppi fondamentali di memorie, uno sulle equazioni differenziali ordinarie e l'altro sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico–parabolico ».

Pure a nome dell'U.M.I. il Socio G. Sansone presenta il terzo volume della Bibliografia Matematica Italiana del 1952 curato, come i due precedenti, con amore e rara competenza da Alfredo Perna, e così dice:

« La Bibliografia Matematica Italiana, riprendendo l'antica tradizione del Riccardi, mira a dare agli studiosi un sicuro riferimento su quanto viene prodotto annualmente in Italia nel campo della matematica.

« È pure doveroso e grato alla Presidenza dell'U.M.I. esprimere la propria gratitudine al Consiglio Nazionale delle Ricerche, che con generosa comprensione ha permesso la ripresa in grande di una così vasta attività editoriale matematica ».

Il Socio Ugo Amaldi, a nome del Comitato accademico per la pubblicazione delle « Opere Matematiche » di Vito Volterra, presenta il 1° volume di tale pubblicazione con le seguenti parole:

« È noto che Guido Castelnuovo, chiamato a presiedere i ricostituiti Lincei, ritenne che della loro rinnovata attività fosse degno e significativo auspicio appunto la pubblicazione delle opere del Volterra, che (sono parole sue) di questa Accademia Nazionale fu uno dei Soci più illustri e uno dei Presidenti più autorevoli; e affidò la realizzazione di questa iniziativa ad un Comitato, di cui assunse, e conservò finché ebbe vita, la presidenza effettiva e che volle costituito dai soci Amoroso, Armellini, D'Ancona, Pérès, Persico, Picone, Signorini, Somigliana, Edoardo Volterra, dalla professoressa Elena Freda e da me. Il socio Gustavo Colonnetti, appena ebbe notizia dal Castelnuovo di tale iniziativa, deliberò che il Consiglio Nazionale delle Ricerche, da lui presieduto, vi si associasse anche con un munifico e cospicuo contributo finanziario (dieci milioni di lire). Credo di dovermi rendere interprete dei sentimenti della Classe rinnovando qui

pubblicamente al prof. Colonnetti l'espressione della riconoscenza dell'Accademia.

« Il Comitato, nelle sue adunanze preparatorie, stabilì che delle Opere del Volterra si pubblicassero tutte le Memorie e Note scientifiche, escludendo soltanto i trattati e taluni discorsi di carattere strettamente parlamentare od occasionale; e, come criterio di ordinamento, ritenne che, a meglio mettere in luce la naturale evoluzione del pensiero matematico del grande scienziato, convenisse adottare la semplice successione cronologica. I singoli lavori vengono via via sottoposti alla più attenta revisione, e per ciascuno, quando sia possibile, in note a piè di pagina, dichiaratamente distinte da quelle dell'Autore, si tiene conto di quelle varianti o rettifiche o postille, che lo stesso Volterra ha lasciato scritte negli esemplari conservati nella sua biblioteca personale o da lui donati a discepoli ed amici.

« Come premessa a questo volume si riproducono i discorsi, che sull'opera scientifica del Volterra furono pronunciati dal Presidente Castelnuovo e dal socio Somigliana nella solenne adunanza, con cui l'Accademia dei Lincei celebrò nel 1946 la sua ricostituzione; e a questi discorsi fanno seguito i cenni biografici redatti, in seguito a preghiera del Comitato, da Joseph Pérès.

« Il volume comprende le Memorie e Note pubblicate dal 1881 al 1892. Vi figurano perciò anzitutto i lavori giovanili, che risalgono al periodo, in cui il Volterra era alunno interno della Scuola Normale Superiore di Pisa, e che più evidentemente riecheggiano la influenza diretta dei suoi Maestri di quel tempo: il Dini e il Betti. Ma subito dopo si inizia una serie di Memorie e di Note, in cui il pensiero matematico del Volterra, con sorprendente ricchezza e varietà di iniziative, si viene affermando poderosamente in tutta la sua autonomia e in tutta la sua genialità. Ricorderò fra l'altro le indagini sull'equilibrio e sulla deformazione delle superficie flessibili e inestendibili e quelle estensioni della teoria delle funzioni di variabili complesse a varietà quali si vogliono, di cui solo recentemente, ad opera del prof. Beniamino Segre, sono state messe in luce la profondità e l'importanza anche in relazione a sviluppi fondamentali di carattere essenzialmente moderno, di cui il Volterra è così apparso inaspettatamente un lontano precursore.

« Ma su tutte le altre emergono le Note sulle funzioni dipendenti da altre funzioni, in cui si delinea nella sua forma nativa, e perciò, forse, più ricca di suggestioni, l'apporto più tipicamente caratteristico del Volterra alla Matematica contemporanea, cioè, nei suoi principî, quel Calcolo funzionale, cui resterà legato perennemente il suo nome. L'interesse di questo volume, in un certo senso, culmina in due grandi Memorie: la prima Memoria sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, rielaborata dal Volterra alla luce del suo Calcolo funzionale, e la Memoria degli « Acta Mathematica » sulle vibrazioni luminose nei mezzi birifrangenti.

« Secondo il programma sinora prospettato – ma che potrà anche subire qualche modifica – le Opere complete del Volterra richiederanno altri cinque

volumi analoghi a questo. Del secondo, che comprenderà i lavori pubblicati dal Volterra fra il 1893 e il 1901, l'originale è già pronto e se ne inizierà la composizione tipografica nei prossimi giorni.

«Verrei meno ad un preciso, quanto gradito, dovere, se non segnalassi alla Classe che il compito tutt'altro che lieve della organizzazione editoriale dell'impresa è stato assolto in modo superiore ad ogni elogio dal Direttore dell'Ufficio Pubblicazioni dell'Accademia, prof. Antonio Bruers, che vi ha recato, con la sua peritissima esperienza, uno zelo infaticabile; e, poiché presentemente una molesta indisposizione lo tiene lontano da noi, mi permetto di inviargli il più cordiale augurio, che possa quanto prima ritornare alla consueta e preziosa sua attività.

«A questa presentazione debbo farne seguire un'altra. Il mio carissimo amico prof. Sansone, Presidente dell'Unione Matematica Italiana, ha avuto la somma bontà di riservare a me l'onore e l'intimo compiacimento di presentare in omaggio all'Accademia il primo volume delle Opere scelte del mio indimenticabile Maestro Salvatore Pincherle, che si pubblicano a cura dell'Unione.

«L'anno passato ricorreva il centenario della nascita del Pincherle; e un gruppo di suoi discepoli, fra i quali in prima linea il prof. Antonio Mambriani dell'Università di Parma, pensò di celebrare tale ricorrenza, pubblicando le Memorie matematiche più significative del compianto Maestro. Il prof. Sansone, non appena venne a conoscenza di questo proposito, vi aderì col caratteristico suo entusiasmo e volle che la pubblicazione si effettuasse sotto gli auspici e a cura dell'Unione Matematica Italiana, di cui il Pincherle fu nel 1922 il fondatore e poi, fino al termine della sua vita, l'illuminato e attivissimo Presidente. L'iniziativa raccolse larghi consensi e vi aderirono, anche con generosi contributi finanziari, questa nostra Accademia, l'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, l'Università degli Studi e la Facoltà d'Ingegneria di quella città, quell'Istituto Matematico, che si fregia del nome del Pincherle, le Case editrici Zanichelli e Perrella e tutta una numerosa schiera di ex–allievi del Pincherle.

«Il compito di tradurre in atto l'iniziativa fu dalla Presidenza dell'Unione Matematica affidato ad un Comitato costituito da ex–discepoli del Pincherle, cioè dai proff. Belardinelli, Cinquini, Graffi, Mambriani, Onofri e da me; e l'ufficio più grave della cura della pubblicazione fu deferito al prof. Mambriani.

«Come ben si comprende, questo Comitato si trovò subito di fronte ad un problema estremamente delicato e difficile. Fra le circa duecentocinquanta Memorie e Note, che, insieme con una ventina di trattati e corsi di lezioni, costituiscono la produzione scientifica del Pincherle, si doveva scegliere un gruppo di lavori, che, pur nella sua ragionevole ristrettezza e malgrado le numerose esclusioni, valesse a lumeggiare nei suoi molteplici aspetti la nobilissima opera matematica del Pincherle; e, in questo arduo compito, il Comitato ha avuto un utile apporto di consigli dal prof. B. Segre, che dell'opera del Pincherle è conoscitore profondo.

« In base a reiterati scambi di idee e grazie soprattutto al meditato lavoro critico di revisione e comparazione compiuto dal prof. Mambriani, si fu condotti a scegliere trentotto lavori, di cui alcuni sono Memorie poderose, altri invece brevi Note riassuntive; e fra essi figura l'ampia " Notice ", che intorno alle sue ricerche lo stesso Pincherle redasse nel 1925 per gli " Acta Mathematica ", in seguito ad esplicita richiesta rivoltagli spontaneamente e insistentemente, durante il Congresso internazionale di Toronto, dal Mittag–Leffler, e che, come ben dice il Mambriani nella prefazione a questo volume, " fornisce un quadro limpidissimo, ma senza dubbio troppo onestamente modesto ed obiettivo, della evoluzione del suo pensiero matematico ".

« La coincidenza – pur del tutto fortuita – per cui oggi, in quest'alta sede si trovano ad essere rievocate l'una accanto all'altra l'opera matematica del Volterra e quella del Pincherle, mi sembra assumere un significato profondo, che non oserei rilevare, se non fosse in me suffragato dal lontano ma preciso ricordo di un giudizio eccezionalmente autorevole. Nel 1928, al Congresso internazionale di Bologna, da questo stesso ravvicinamento fra le opere del Volterra e del Pincherle prese le mosse Jacques Hadamard in una geniale conferenza sulle origini del Calcolo funzionale, sui suoi sviluppi, sui futuri presumibili suoi orientamenti; e al principio di quella mirabile sintesi l'Hadamard dichiarò che sentiva di doversi giustificare se di quel promettente e caratteristico indirizzo della Matematica contemporanea prendeva a parlare proprio alla presenza di quei due matematici, nei quali doveva riconoscere di quell'indirizzo " les deux fondateurs ".

« Senza dubbio i loro punti di vista furono nettamente diversi e, se non proprio antitetici, in qualche modo complementari. Mentre il Volterra, iniziatosi alla scuola del Dini, si ispirò di preferenza alle più generali vedute della teoria delle funzioni di variabili reali, il Pincherle, che nel suo periodo formativo aveva risentito fortemente l'influsso del Weierstrass, si mantenne tenacemente fedele al campo della variabile complessa; e alla sua visione operatoria e sintetica – e, in senso lato, oserei dire geometrica – del Calcolo funzionale si fece guidare da multiformi ordini di ricerca, secondo svariati indirizzi in qualche modo propedeutici – e pur sempre pertinenti alla teoria delle funzioni analitiche nel campo complesso –: indagini su sviluppi in serie secondo sistemi prestabiliti di funzioni, che allora rappresentavano una novità; problemi d'inversione di integrali nel campo complesso, e si può dire che il Pincherle fu tra i primi a ravvisare e approfondire i nessi di questi problemi con le questioni or ora accennate sugli sviluppi in serie; sistemi ricorrenti, generalizzazioni dell'algoritmo delle frazioni continue alle funzioni analitiche e, più in generale e nel medesimo campo, Calcolo alle differenze, come ramo speciale del Calcolo funzionale; infine operazioni funzionali, rappresentate da integrali curvilinei contenenti parametri e, in particolare, trasformazioni di Eulero e soprattutto del Laplace. E in ciascuno di questi indirizzi il Pincherle ottenne risultati precisi e notevolissimi; e se ne ha la riprova ricordando, ad esempio, per quel che riguarda il Calcolo alle differenze, la parte cospicua che alle ricerche del Pincherle riserva

il Nörlund nelle magistrali *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, e, per quanto concerne la trasformazione del Laplace, il rilievo che ai contributi del Pincherle dà nel suo classico trattato il Doetsch.

« Ognuno dei vari indirizzi di ricerca del Pincherle, pocanzi enumerati, è rappresentato in questo volume da una o più Memorie, o, quanto meno, da qualche Nota riassuntiva. Invece è rimandata all'inizio del secondo volume la Memoria fondamentale, in cui, nel 1897 per i " Mathematische Annalen ", il Pincherle elaborò la prima sintesi definitiva delle sue idee e dei suoi risultati generali sul Calcolo funzionale distributivo, che dovevano qualche anno più tardi trovare la loro sistemazione trattatistica nel volume del 1901 su " Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi ", cui ebbi, in quegli anni lontani, l'onore di collaborare.

« Nella grande Collezione dei nostri Classici della Matematica, che l'Unione Matematica Italiana, auspici i Presidenti Bompiani e Sansone, viene pubblicando con tanta elevatezza di criteri organizzativi e tanto decoro di realizzazione, questa selezione dell'opera del Pincherle troverà senza dubbio il *suo* posto nettamente caratteristico per la storia gloriosa del pensiero matematico italiano dal Risorgimento ai giorni nostri.

« Di questo degno omaggio reso alla memoria di una così nobile figura di scienziato e di Maestro il merito prevalente va riconosciuto al prof. Mambriani, che al Pincherle fu vicino, come Assistente, nell'ultimo periodo della sua vita operosa e che nell'organizzazione difficilissima, ma altrettanto felice, di questi " selecta " e nelle cure laboriosissime della revisione e della pubblicazione ha recato, con la conoscenza profonda dell'opera del Maestro, tutto il suo appassionato fervore di discepolo memore e devoto ».

Il Presidente Giordani ringrazia il Collega Amaldi, mettendo in particolare evidenza l'importanza del lavoro da lui svolto per la pubblicazione del 1° volume delle opere di Volterra.

Il Socio Giuseppe Levi, riferendosi alla presentazione da lui fatta nella seduta di giugno dello scorso anno accademico del I volume della 4ª edizione del suo « Trattato di Istologia » e all'illustrazione dei criteri che hanno informato tale edizione, presenta il II volume della predetta opera che riguarda il tessuto muscolare, il tessuto nervoso, le connessioni tra i costituenti elementari di detto tessuto, la nevroglia e microglia, i vasi sanguiferi e linfatici, il sangue e la linfa.

Il Socio Beccari, dopo aver ricordato che ha già offerto in omaggio, nella seduta del 13 febbraio 1954, l'intera serie degli « Atti della Società Italiana di Anatomia », comprendente 14 volumi, comunica che ne è uscito un altro, dedicato al 15° Convegno, tenuto dalla predetta Società a Milano dal 1° al 4 ottobre 1953, e lo presenta, mettendo in evidenza che il volume stesso contiene due relazioni e ben 78 comunicazioni.

Il Socio Signorini offre in omaggio il II volume della 2ª edizione della sua opera « Meccanica razionale con elementi di statica grafica », ricordando che in questa edizione numerosissime sono le modifiche dettate dalla volontà di trattare con la dovuta chiarezza anche argomenti di non facile esposizione.

Nel volume è inoltre stampata la conferenza su « Leonardo e la Meccanica », tenuta dal prof. Signorini nell'Università di Trieste il 6 dicembre 1952.

Il Socio De Blasi, a nome della « Sansoni Edizioni Scientifiche », presenta il VI volume della « Enciclopedia Medica Italiana », uscito nel mese di luglio c. a., contenente le lettere « M » e « N » ed è lieto di informare che tale importante opera sarà presto completata con la stampa degli ultimi due volumi.

Il Socio Carobbi, Presidente della Società Mineralogica Italiana, presenta il volume X dei « Rendiconti » della predetta Società, nel quale figurano le comunicazioni scientifiche presentate da studiosi italiani al Convegno Mineralogico svoltosi a Leoben (Austria) dal 10 al 19 settembre 1953 e un largo riassunto degli scopi del Convegno e delle escursioni scientifiche effettuate dai partecipanti.

Il prof. Carobbi, dopo aver messo in evidenza l'importanza e l'ottimo esito di tale manifestazione internazionale, conclude ricordando che la partecipazione italiana non sarebbe stata possibile senza una generosa sovvenzione del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il Socio D'Ancona presenta la traduzione inglese della sua opera « Lotta per l'esistenza » (« The struggle for existence »), nella quale è esposta, tra l'altro, per uso dei biologi, la teoria matematica sugli equilibri biologici del Volterra, che può considerarsi veramente un precursore nel campo della collaborazione tra matematici e biologi. Presenta anche la V edizione dei suoi « Elementi di Biologia generale » che, pur essendo stati notevolmente rinnovati e aggiornati, specialmente nelle parti riguardanti la citologia, la genetica e l'embriologia, conservano il loro carattere di opera propedeutica allo studio della biologia, destinata agli studenti di medicina, di farmacia, agraria, veterinaria, ecc.

Il Socio Bompiani presenta il volume contenente gli « Atti del Convegno Internazionale di Geometria differenziale », svoltosi, per iniziativa dell'Unione Matematica Italiana, a Venezia, Padova, Bologna e Pisa, dal 20 al 26 settembre 1953. A tale Convegno, che è il primo che si sia tenuto sotto gli auspici della « International Mathematical Union », hanno partecipato circa 100 Matematici di 16 nazioni e il relativo volume contiene, oltre ai discorsi di apertura e di chiusura, 40 comunicazioni tenute dai più illustri cultori di geometria differenziale.

Il Presidente Giordani rivolge il suo più vivo ringraziamento a tutti i Colleghi che hanno offerto in omaggio e presentato opere all'Accademia.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Majorana, Sansone, Bargellini, Chisini, Segre, Cotronei, Tonzig, Tricomi, Rolla, Armellini, Bonino, Bompiani, Gallitelli, Fantappiè e Occhialini (a mezzo del Collega Polvani).

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Bonetti A., Dilworth C., Ladu M. e Occhialini G. – Misure in lastre nucleari. Nota I (pres. dal Corrisp. G. Occhialini).

Chisini O. – Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota II.

Chisini O. – Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota III.

Arrigoni O. e Marrè E. – Azione inibente degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti di pisello (« Pisum sativum ») (pres. dal Socio S. Tonzig).

Cinquini S. – Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota II (pres. dal Socio G. Sansone.

Danusso F. – Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli e polialcoli (pres. dal Corrisp. G. Natta).

Nikodym O. M. e Nikodym S. – Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un procédé généralisé de Cantor (pres. dal Corrisp. A. Tonolo).

Ricci G. – Sul pennello di quasi–asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota II (pres. dal Socio G. Sansone).

CONGRESSI

Il Socio Pierantoni riferisce sul XXVI Convegno dell'Unione Zoologica Italiana con le seguenti parole:

« Il XXVI Convegno dell'Unione Zoologica Italiana in cui per mandato dell'Assemblea ho avuto l'onore di rappresentare la nostra Accademia insieme col Collega prof. Umberto D'Ancona, si è tenuto a Padova e Verona dal 15 al 19 settembre u. s.

« Inauguratosi il 15 settembre nell'aula magna dell'Università con un discorso del nostro Collega prof. Montalenti sul " Concetto di specie ed il valore della sistematica nella Biologia moderna ", si è svolto nelle sedute successive con quattro relazioni dei proff. Barigozzi di Milano, Vannini di Modena, Omodeo di Siena e Benazzi di Pisa su argomenti riflettenti specialmente le più recenti ricerche di citologia, la struttura e valore funzionale del nucleo e sui problemi della speciazione; e prevalentemente su questi argomenti si sono aggirate le oltre cento comunicazioni in sei sedute, una delle quali nel Museo di Storia Naturale di Verona, alla quale sede fu dedicata un'intera giornata.

« Questo Convegno, integrato da interessanti escursioni, di cui più notevole quella in Laguna, effettuatesi alla chiusura, fu senza dubbio uno dei più ben riusciti ed importanti del dopoguerra e ciò fu dovuto specialmente alla perfetta ed ospitale organizzazione del Comitato e soprattutto all'opera sagace ed efficace del prof. D'Ancona che ne fu il vero organizzatore ed animatore ».

Il Socio D'Ancona ringrazia il Collega Pierantoni per le sue cortesi parole e desidera informare l'Accademia che, in occasione del Congresso, è stata coniata un'artistica medaglia commemorativa del grande biologo Battista Grassi, di cui cade in quest'anno il centenario. È lieto, a nome del Comitato ordinatore del Convegno, di fare omaggio all'Accademia di un esemplare della medaglia stessa.

Il Presidente Giordani ringrazia vivamente il Collega D'Ancona e il Comitato ordinatore.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 novembre 1954

Akademija Nauk Latvijskoj SSR. — *Himija Boratov*. Riga, 1953. Pp. 122, in-8°.

Alimentazione. A. IV, 1954, n. 6-7. Fascicolo dedicato al primo Convegno Nazionale sui Problemi dell'Alimentazione.

Atti della Società Italiana di Anatomia. XV Convegno Sociale in Milano, 1-4 ottobre 1953. Firenze, Macrì, 1954. Pp. 557, in-8°, con figg.

Bellincioni Giovanni. — *Le basi fisiche del problema agricolo e forestale italiano*. Firenze, Centro Orientamento Studi e Propaganda Irrigua, 1954. Pp. 255, in-8°.

Belloni Luigi. — Vedi: Cogrossi Carlo Francesco.

— Vedi: Tortelli Giovanni... Bortolotti Gian Giacomo.

Bening A. L. — *Kladocera Kavkaza*. Tbilisi, Bysokolornaja Biologičeskaja Stancija Narkomprosa Gruzinskoj SSR, 1941. Pp. 384, in-8°, con figg.

Bortolotti Gian Giacomo. — Vedi: Tortelli Giovanni... Bortolotti Gian Giacomo.

Braun Sándor. — *A rosszindulatú daganatok therápiájánál alkalmazott Di- és tri-oxymethylenglykol kórbonctana, valamint experimentalis pathologiája*. Különlenyomat az orvosi hetilap címü folyóiratból. A. XCV, 1954, n. 30.

Carerj Leonardo. — *Botallo Leonardo, Astese, medico regio*. Asti, Casa ed. Arethusa, 1954. Pp. 44, in-8°.

Centenaire Junius Massau. Bruxelles, 1953. Pp. 51, in-4° (Annales de l'Association des Ingénieurs de Gand, 1953, fasc. 2).

Charles Anne. — Vedi: D'Ancona Umberto.

Cogrossi Carlo Francesco. — *Nuova idea del male contagioso dei buoi*. Riproduzione in facsimile con introduzione di Luigi Belloni e traduzione inglese di Dorothy M. Schullian. Milano, Sezione Lombarda della Società Italiana di Microbiologia, 1953. Pp. XCII-66, in-16°.

Convegno Internazionale di Geometria differenziale. Italia, 20-26 settembre 1953. Promosso dalla Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. - *Discorsi, Comunicazioni*. Roma, Edizioni Cremonese, 1954. Pp. XV-340, in-8°.

Convegno Nazionale di aggiornamento sulla Corrosione (Milano 8-10 ottobre 1953). — *Atti*. Milano, 1954. Pp. 152, in-4° (Numero speciale de « La Metallurgia Italiana »).

Convegno (II) di Studi sui problemi dell'economia del Mezzogiorno (Napoli 4-5 novembre 1953). - *Atti*. Roma, 1954, Pp. 211, in-8°.

D'Ancona Umberto. — *Elementi di biologia generale*. 5ª ed. Padova, CEDAM, 1954. Pp. XXIII-750, in-8°, con figg.

— *The struggle for existence*. Translated by Anne Charles and R. F. J. Withers. Leiden, Brill, 1954. Pp. XII-274.

De Menezes Corrêa Acciaiuoli Luiz. — *Le Portugal hydromineral*. Vol. II. Lisbonne, Direction Générale des Mines et des Services Géologiques, 1953. Pp. 574, in-8°.

D'Erasmo Geremia. — *Ramiro Fabiani*. Estr. da « Atti dell'Accademia Pontaniana », n. s., vol. V.

Dini Ulisse. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. II. Roma, Edizioni Cremonese, 1954. Pp. 508, in–8°.

Discours prononcés à la manifestation d'hommage à Victor van Straelen directeur de l'Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique. 1925-1954. Bruxelles, 1954. Pp. 39, in-8°.

Dos Reis Manuel. — *Sobre a teoria de refracção astronómica*. Estr. da « Revista de Facultade de Ciências de Universidade de Coimbra », vol. XXII (Publicações do Observatorio Astronómico da Universidade de Coimbra, n. 1).

Exell A. W. e Mendonça F. A. — *Conspectus florae Angolensis*. Vol. II, fasc. 1°: *Celastraceae-Connaraceae*. Lisboa, Minestério do Ultramar, 1954. Pp. 151, con tavv.

Faelli Carlo. — *Il diabete nella medicina sociale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1954. Pp. 111, in–8°, con tavv. (Collana di Studi sui Problemi Medico Sociali, XXVII).

Fàntoli Amilcare. — *I valori medî della temperatura in Libia*. Estr. da « Bollettino della Società Geografica Italiana », 1954, n. 1–2.

Gerundini Gherardo. — *Medicina preventiva e alimentazione del lavoratore*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1954 .Pp. 100, in–8° (Collana di Studi sui Problemi Medico Sociali, XXVI).

Gutenberg Beno. — *Low-velocity layers in the earth's mantle*. Estr. da « Bulletin of the Geological Society of America », volume LXVI, 1954.

Isaakidès K. A. — *Kata ton entomōn ta entoma*. Athenai, 1954. Pp. 105, in–8°.

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano e Istituto Veneto di Scienze Lettere e Arti. Venezia. — *Atti del 1° Convegno Nazionale delle Accademie di Scienze e Lettere*. In occasione del 150° anniversario di fondazione dei due Istituti. Milano–Venezia, 20–23 maggio 1954. Pp. 196, in–8°, con tavv.

Istituto Superiore di Sanità. — *1° Symposium internazionale sulla lotta contro gli insetti vettori di malattie trasmissibili*. Roma, Fondazione Emanuele Paternó, 1954. Pp. 396, in–8°.

Kármán (von) Thedore. — *Aerodynamics*: Selected topics in the light of their historical development. Ithaca, Cornell University Press, 1954. Pp. xii–203, in–8°, con figg.

Levi Giuseppe. — *Trattato di istologia*. Vol. II. 4ª ed. aggiornata ed ampliata. Torino, Unione Tipografico–Editrice Torinese, 1954. Pp. vii–545.

Mendonça F. A. — Vedi: Exell A. W. e Mendonça F. A.

Monterosso Bruno. — *Lodovico di Caporiacco*. Udine, Tip. P. Ciussi, 1953. Pp. 10, in–8°.

Pincherle Salvatore. — *Opere scelte*. A cura dell'Unione Matematica Italiana. Vol. I. Roma, Ed. Cremonese, 1954. Pp. vi–97, in–8°.

La Programmazione lineare nell'Industria. Scritti presentati dal prof. Arrigo Bordin. Torino, Unione Industriale, 1954. Pp. xii-227, in -8°.

Rendiconti della Società Mineraria Italiana. A. X, 1954.

Rossini Angelo. — *Il potenziale e il raggio dell'elettrone*. Vetralla, 1954. Pp. 8, in–8°.

Ruberto Felice. — *La trisezione grafica dell'angolo*. Campobasso. Tip. S. De Crosta, 1949. Pp. 5, in–8°, con figg.

Russo Achille. — *Fecondazioni strumentali nell'epoca del calore dei bovini confermano la teoria metabolica della determinazione del sesso. Analogie e richiamo a precedenti ricerche*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6ª, vol. IX, 1952–54.

— *Il potere germinale nella cellula del soma confermato da Ginkgo biloba L. conifera superstite fra le specie del periodo carbonifero. Orientamenti. La nuova via*. Estr. da « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 4ª, vol. II, fasc. 10.

Schram Stuart R. — Vedi: Slesser Charles.

Schullian Dorothy M. — *Ad litus patriae educ*. Estr. da « Castalia », 1954, n. 3.

— *An introduction to the history of medicine, 1498*. Estr. da « Bulletin of the History of Medicine », vol. XXVII, 1953, n. 5.

— *Piperno, Trilussa and dental caricature*. Estr. da « Journal of the History of Medicine and Allied Sciences », vol. IX, 1954, n. 3.

Schullian Dorothy M. — Vedi: Cogrossi Carlo Francesco.

SCHULLIAN Dorothy M. — Vedi: TORTELLI Giovanni... BORTOLOTTI Gian Giacomo.

SIGNORINI Antonio. — *Meccanica razionale con elementi di statica grafica.* Vol. II. Ed. riveduta e aumentata. Roma, Perrella, 1954. Pp. 427, in–8°, con figg.

SIMPOSIO SOBRE NOVAS TÉCNICAS DE PESQUISA EM FÍSICA. Organized by the Academia Brasileira de Ciencias and Centro de Cooperación Científica para América Latina. Rio de Janeiro and São Paulo, Juli 15–29, 1952. Rio de Janeiro, 1954. Pp. 447, in–8°, con figg.

SLESSER Charles and SCHRAM Stuart R. — *Preparation, properties, and technology of fluorine and organic fluoro compounds.* New York etc., McGraw–Hill Book Company, 1951. Pp. XXIII–868, in–8°.

TORTELLI Giovanni. — *Della medicina e dei medici.* BORTOLOTTI Gian Giacomo. — *Dell'antica medicina.* Due storie della medicina del XV secolo edite e tradotte da Luigi Belloni e Dorothy M. Schullian. Milano, Industrie Grafiche Italiane Stucchi, 1954. Pp. LXXXVIII–226, in–8°, con tavv.

UFFICIO PROVINCIALE DI STATISTICA. MANTOVA. — *Provincia di Mantova. Il prodotto netto dell'agricoltura 1948–1949–1950.* Mantova, s. d. Pp. 64, in–8° (Studi sul reddito nazionale).

UNIONE MATEMATICA ITALIANA. — *Bibliografia Matematica Italiana.* Vol. III, 1952. Roma, Ed. Cremonese, 1954. Pp. X–113, in–8°.

Volume Jubilaire. Victor van Straelen Directeur de l'Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique, 1925–1954. Bruxelles, 1954. Voll. 2, in–4°, con tavv.

WITHERS R. F. J. — Vedi: D'ANCONA Umberto.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 dicembre 1954

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Il teorema di esistenza delle trecce algebriche.* Nota II (*) del Socio OSCAR CHISINI.

CONSIDERAZIONI ALGEBRICHE.

12. *Nomenclatura.* – Si consideri una C_n^r generica: questa ha un punto r–plo (Y_∞) ed altri $r(n-1)$ punti doppi (del tutto indeterminati). Variando per continuità, la C_n^r può acquistare altri punti doppi (non ci interessa il caso di singolarità superiori), diciamo δ nodi e k cuspidi. Chiameremo originari gli $r(n-1)$ punti doppi iniziali e i loro trasformati per continuità, acquisiti i δ nodi e le k cuspidi successive.

La variazione per continuità suddetta, fatta (entro una varietà V_r di C_n^r generalmente irriducibili) la si intende operata in funzione di un parametro reale t, cui diamo il significato suggestivo di tempo, sicchè in ogni istante è univocamente definito quali siano i punti doppi originari e quali gli eventuali punti doppi acquisiti.

Indicheremo con Q_n^r una C_n^r dotata di punti doppi acquisiti.

Qualora la Q_n^r sia spezzata (come accadrà nel seguito) in r rette per Y_∞ e in una curva residua d'ordine n, indicheremo questa brevemente come Q_n e – poiché non ci interessano le suddette r rette – ancora con Q_n indicheremo la Q_n^r così spezzata.

Similmente indicheremo con C_n una C_n^r spezzata in un gruppo di r rette per Y_∞ ed in una residua curva C_n d'ordine n (la quale sola ci interessa).

13. Consideriamo uno spazio lineare S_m, ad $m = n(n-1)$ dimensioni: le coordinate (complesse) dei suoi punti le indicheremo con una delle let-

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

tere α , β , γ, affette da un indice variabile ed eventualmente da apici (complessivamente in numero di m).

Fissiamo una generica C_n^r i cui punti di diramazione saranno distinti, e indichiamo le loro ascisse con α_i , β_j , γ_l , secondo una regola che vedremo poi.

Poiché la C_n^r la faremo variare nel tempo e precisamente nell'intervallo $0 \to 1$, indichiamo con $C_n^r(t)$ la C_n^r che si ha al tempo t. Sarà dunque $C_n^r(0)$ la C_n^r inizialmente fissata e $C_n^r(1)$ quella finale.

Ora ogni C_n^r ha un certo gruppo di punti di diramazione e quindi definisce un gruppo di coordinate α , β , γ, che alla loro volta determinano un punto di S_m. Consideriamo questo punto come immagine della C_n^r e lo indichiamo con lo stesso simbolo della C_n^r.

Qui osserviamo che (pur fissati i cappi che vanno ai successivi punti di diramazione e le relative sostituzioni) ad ogni punto di S_m corrisponde tutta una varietà U (di dimensione $r + 3$) di curve C_n^r. Inoltre le C_n^r spezzate in una curva generica (d'ordine n) C_n ed in r rette per Y_∞, hanno come immagini in S_m i punti di una varietà Σ ad $\frac{n(n+3)}{2} - 3$ [1] dimensioni; la qual cosa porta che lo staccamento delle r rette impone $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ condizioni ai punti di diramazione delle C_n^r.

Ciò posto, durante l'intervallo di tempo $0 \to 1$ si dia alla $C_n^r(0)$ una variazione per continuità che le faccia acquistare δ nodi: N_1 , N_2 , $\cdots$, N_δ e k cuspidi (K_1 , K_2 , $\cdots$, K_k) avendo così al limite ($t = 1$) una Q_n^r.

Indichiamo con α_i e α_i' le ascisse (anche esse variabili con t) dei due punti di diramazione che sono venuti a coincidere dando origine al nodo acquisito N_i ; similmente indichiamo con β_j , β_j' , β_j'' le x dei tre punti di diramazione della C_n^r che vengono a confluire dando origine alla cuspide acquisita K_j . Indichiamo poi con γ_l uno degli altri $m - 2\delta - 3k$ punti di diramazione.

Al variare di t nel nostro intervallo $0 \to 1$, i valori delle α e delle β (anche quelli delle γ) cambieranno. A noi importano la differenza fra due α con lo stesso indice e le due differenze fra le tre β con uno stesso indice. Precisamente poniamo:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_i(t) = \alpha_i - \alpha_i' & i = 1, 2, \cdots, \delta \\ b_j(t) = \beta_j - \beta_j' & j = 1, 2, \cdots, k. \\ b_j'(t) = \beta_j - \beta_j'' \end{cases}$$

Il passaggio dalla $C_n^r(0)$ alla $C_n^r(1)$ è rappresentato, nello spazio S_m immagine dei gruppi di punti di diramazione delle C_n^r, da una certa traiettoria τ. La generica posizione in questo passaggio è costituita da una $C_n^r(t)$, la Q_n^r si ha per $t = 1$, cioè $Q_n^r = C_n^r(1)$.

La fig. 1 dà una immagine simbolica di questo e dei successivi passaggi; in essa lo spazio S_m è indicato dall'area rettangolare complessiva.

(1) Cosa notissima (le C_n birazionalmente identiche – nel senso indicato – ad una generica data sono omologiche con centro di omologia Y_∞).

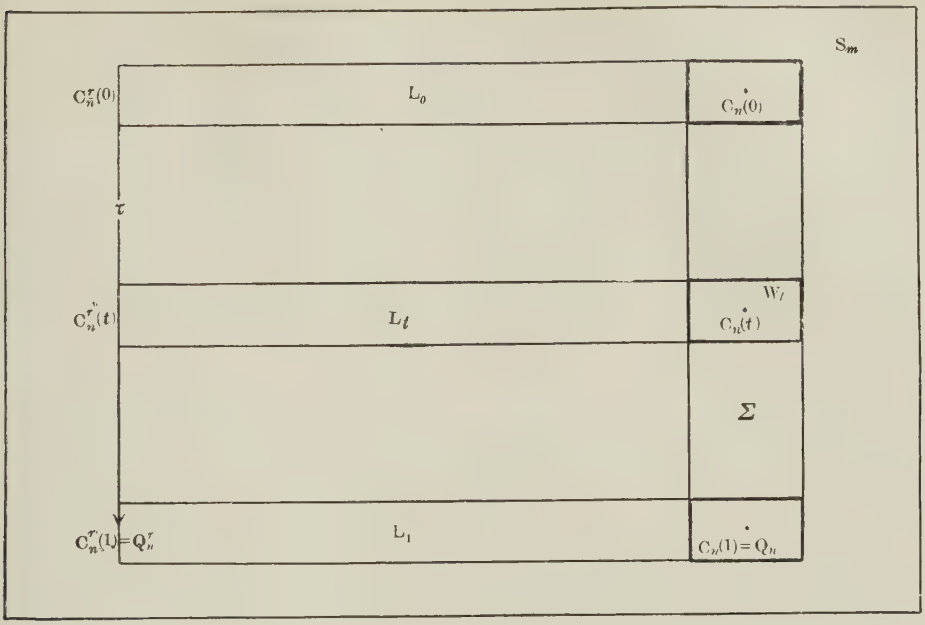


Fig. 1.

Per ogni valore di t il sistema di equazioni (1) vincola i punti di diramazione della generica C_n^r in funzione della posizione di quelli della particolare $C_n^r(t)$, che appartiene alla traiettoria τ. Poiché queste equazioni sono lineari e sono in numero di $\delta + 2k$ (ovviamente indipendenti), esse definiscono, entro lo S_m, uno spazio lineare ad $n - \delta - 2k$ dimensioni che, dipendendo da t, indicheremo con

$$L_t = L(t).$$

Date le dimensioni dello spazio L_t e quelle della varietà Σ si ha che per

$$m - (\delta + 2k) + \frac{n(n+3)}{2} - 3 \geqq m$$

cioè per

$$\delta + 2k \leqq \frac{n(n+3)}{2} - 3$$

lo spazio lineare L_t incide la varietà Σ. In particolare questo accade per $t = 0$ e si ha come intersezione una, o più C_n^r composte di r rette e di una C_n in generale [2] senza punti multipli, o – quando valga il segno $<$ nella relazione precedente – una varietà W (o) di curve analoghe.

In figura gli spazi L_t sono rappresentati mediante strisce rettangolari orizzontali, e la varietà Σ mediante un rettangolo verticale. Più marcato

(2) Precisazioni in proposito si avranno al n. 14.

è il contorno dei rettangoli minori rappresentativi delle varietà $W_t = W(t)$ intersezioni della Σ con le L_t, segnate per $t = 0$, t generico e $t = 1$.

Variando per continuità t da 0 a 1, la $C_n(0)$ – ovvero la varietà W_0 differenzialmente definita dal contenere la $C_n(0)$ – varia di conseguenza essa pure, e varia per continuità; per $t=1$ si ottiene una curva (o una varietà di curve) $Q_n(1)$ dotata di δ nodi e k cuspidi, che risulta legata alla Q_n^r per variazione continua entro L_1, così che i suoi nodi e le sue cuspidi provengono dai nodi e dalle cuspidi acquisite della Q_n^r (si ricordi che entro lo spazio L_t rimangono costanti le differenze $a_i(t)$, $b_j(t)$ e $b'_j(t)$ e quindi un nodo rimane nodo e una cuspide rimane cuspide). Vedremo al numero seguente come si possa escludere che nodi e cuspidi divengano singolarità più elevate.

14. Osserviamo che se $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$, allora la varietà di intersezione dello spazio L_1 con la Σ ha, almeno, la dimensione 1. Non può quindi accadere che per tutti i suoi elementi coincidano due punti di diramazione per i quali non sia stata imposta la coincidenza dalle equazioni (1) del numero precedente. Supponiamo infatti che ciò accada per due certi punti di diramazione x e x' non appartenenti entrambi alle coppie di valori α_i e α'_i né alle terne β_j, β'_j, β''_j; questi, per la $C_n^r(t)$ dànno una differenza

$$x - x' = c(t)$$

con $c(0) \neq 0$ e $c(1) \neq 0$.

Si consideri allora lo spazio lineare L'_t, contenuto in L_t, che soddisfa alle (1) e inoltre alla condizione ulteriore

$$x - x' = c(t).$$

Anche L'_t incide Σ, e per gli elementi di intersezione accade che i punti di diramazione x e x' sono diversi, contro l'ipotesi (assurda) ammessa.

Osserviamo anche che al punto Q_n della Σ corrisponde (almeno) una curva irriducibile, come è la Q_n^r collegata ad essa dallo spazio L_1. Infatti ad ogni elemento Q_n di Σ corrisponde tutto un sistema U di curve Q_n omologiche fra loro, di cui solo ∞^2 sono degeneri in una retta contata n volte.

Precisiamo che i cappi e i relativi scambi sulla y legati ai punti di diramazione della $C_n^r(t)$ variano per continuità nel passaggio lungo L_t dalla $C_n^r(t)$ alla $Q_n(t)$, cioè i relativi gruppi di monodromia sono strutturalmente identici.

15. Le considerazioni svolte nei numeri precedenti permettono di enunciare il

Teorema. – Data che sia una Q_n^r dotata di δ nodi e k cuspidi acquisiti, si può passare, con continuità da essa ad altra Q_n^r degenere in una Q_n ed in r rette parallele all'asse y, in modo che la Q_n possegga ancora δ nodi

e k cuspidi che sono i limiti degli analoghi elementi acquisiti della Q_n^r, e ciò sotto la condizione (sufficiente)

$$\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3 .$$

Avvertenza. – Si badi che questo enunciato non afferma l'esistenza di una curva d'ordine n dotata di δ nodi e k cuspidi quando sia $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$, ma subordina tale esistenza a quella della Q_n^r dotata dei δ nodi e delle k cuspidi acquisiti. Inoltre la Q_n è irriducibile se tale è la Q_n^r, di cui conserva il gruppo di monodromia (come già notato).

Fisica. — *Misure in lastre nucleari.* Nota I di A. Bonetti, C. Dilworth, M. Ladu e G. Occhialini, presentata (*) dal Corrisp. G. Occhialini.

Molte misure su tracce in lastre nucleari richiedono la possibilità di effettuare piccoli spostamenti relativi tra l'oggetto e il micrometro oculare. A questo scopo abbiamo adoperato un principio già frequentemente applicato in strumenti ottici (vedi per esempio il micrometro a lame di Klausen, e una recente applicazione nel microscopio misuratore Watts), che consente di spostare, senza attriti e tempi morti, l'immagine dell'oggetto nel piano del micrometro, e di misurarne lo spostamento. Esso impiega la misura della rotazione secondo assi normali all'asse ottico di una o più lamine a facce piane e parallele, introdotte lungo il canale ottico del microscopio.

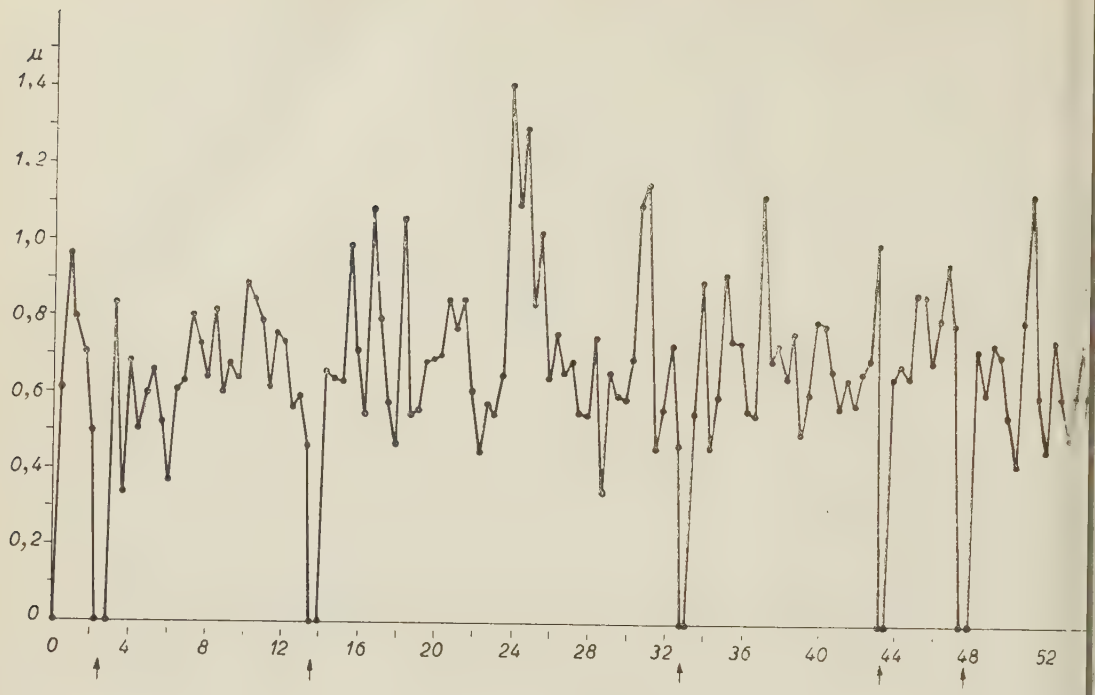
Con un dispositivo di questo genere (1) abbiamo eseguito una serie di misure preliminari sia di diametri di grani isolati, sia di distanze tra i grani. I risultati sono stati così soddisfacenti per rapidità e precisione, che siamo stati indotti a provare il metodo su una delle misure più delicate in lastre nucleari, quella della larghezza delle tracce lasciate da particelle di carica unitaria a fine percorso.

Il tipo di informazione che questa misura può dare è illustrato in fig. 1. Il fatto che nella stessa operazione vengono misurati la larghezza della traccia e la lunghezza delle lacune, permette di confrontare facilmente l'utilità relativa di questi due parametri nella determinazione della velocità della particella. Lungo il profilo si osservano (figg. 1 e 2) massimi pronunciati, una parte dei quali deve essere attribuita a raggi δ: una analisi appropriata permette di separare i raggi δ dal fondo e di misurarne la densità.

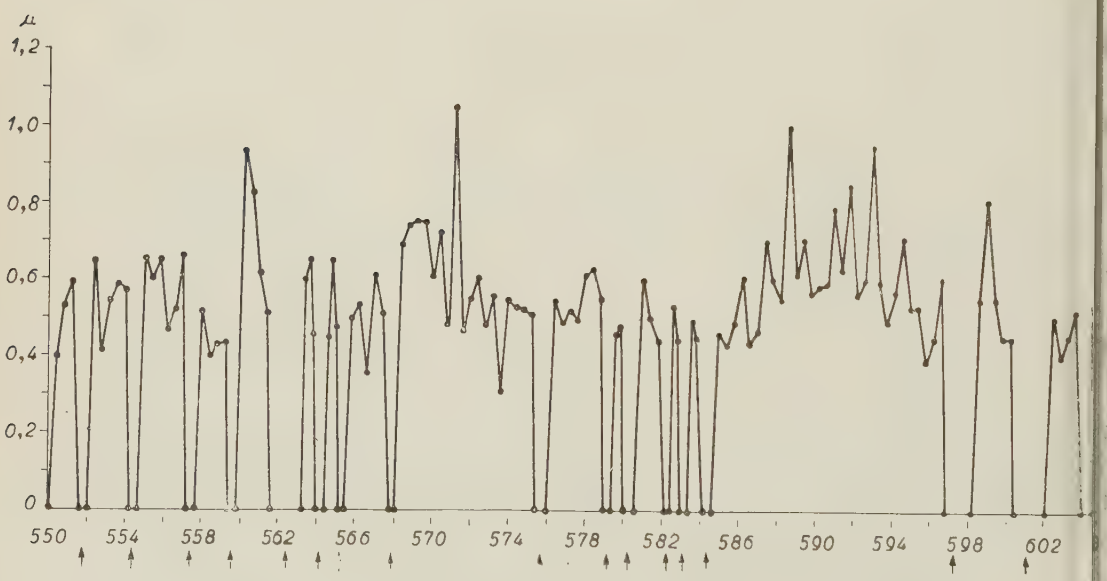
Le figg. 2 e 3 mostrano come la misura della larghezza fornisce una informazione della stessa importanza di quella data dal metodo delle lacune. Le due informazioni possono essere fuse aumentando la precisione nella misura della ionizzazione.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cogliamo l'occasione per ringraziare il dott C. Cantù della ditta F.lli. Koristka, che ha costruito l'apparecchio.



a



b

Fig. 1. – Esempio di « profilo » di traccia di mesone π: spessore della traccia in funzione del percorso res

a) tra 0 e 50 micron di percorso residuo; *b*) tra 550 e 600 micron di percorso residuo.

Le frecce indicano le lacune.

In conclusione, lo studio del profilo, dal quale si deducono i tre parametri, lunghezza delle lacune, larghezza della traccia e densità dei raggi δ, porta un contributo non insignificante alla determinazione della massa e della carica di particelle la cui ionizzazione è superiore a 3 volte il minimo. I particolari relativi al metodo e alle misure saranno descritti in una ulteriore pubblica-

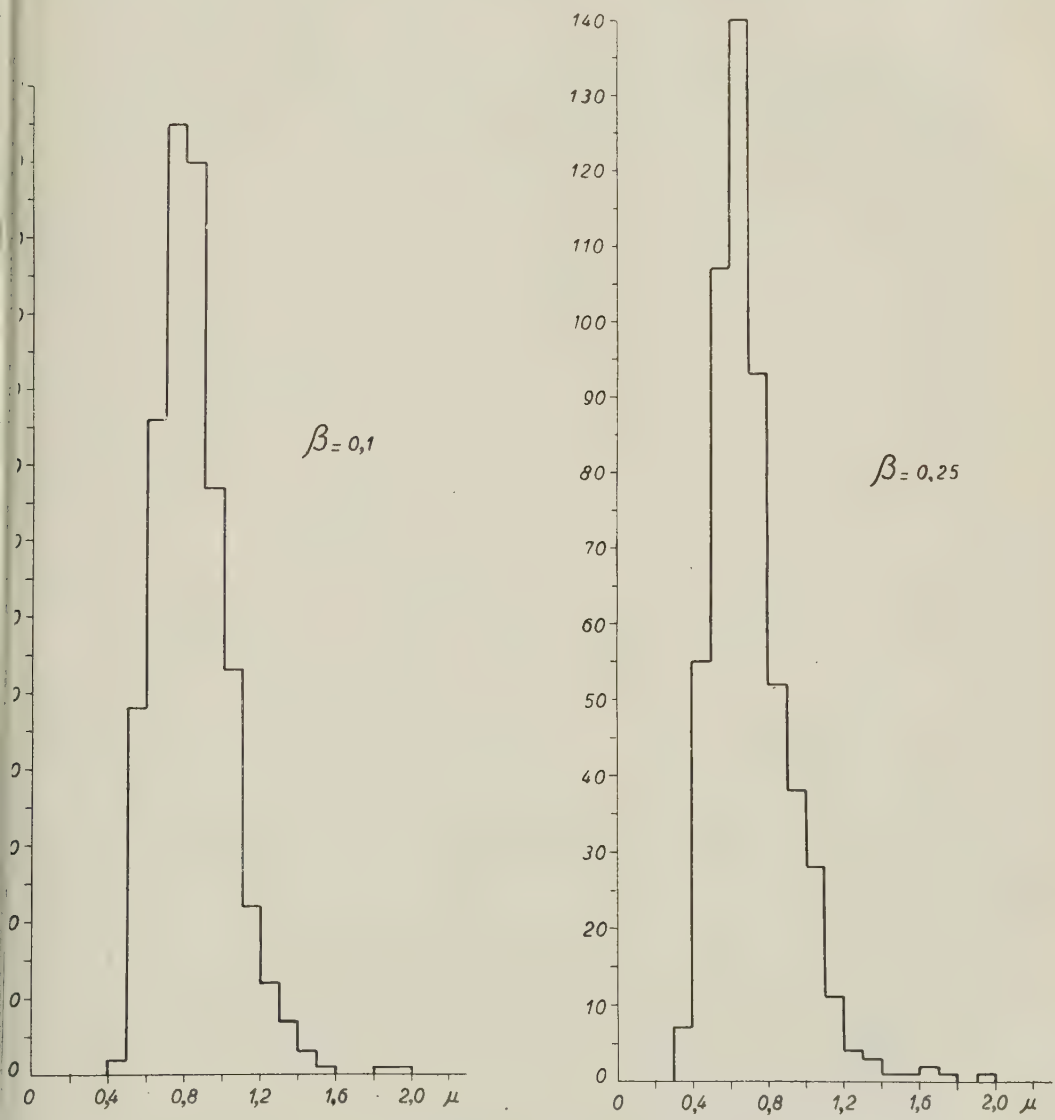


Fig. 2. – Distribuzione dei massimi di spessore in sezioni di 50 micron di 4 tracce di mesoni π e μ e di 300 micron di 1 traccia di protone, tutti osservati in una stessa lastra: numero dei massimi in funzione dell'ampiezza dei massimi.

a) al percorso corrispondente alla velocità media $\beta = 0.1$
b) al percorso corrispondente alla velocità media $\beta = 0.25$
Spessore medio in *a*) : 0.85 micron.
Spessore medio in *b*) : 0.66 micron.

zione. Non siamo ancora nella condizione di giudicare se questa tecnica potrà essere estesa alla misura di tracce di particelle monocariche più veloci. La questione è, precisamente, se un parametro basato sopra il volume dei grani singoli può essere di qualche aiuto nella misura delle velocità.

Un'altra quantità che si ottiene direttamente dal profilo della traccia è la sagitta di diffusione multipla, in quanto la misura della larghezza è fatta con riferimento ad una retta fissa, tenuta parallela o quasi alla traccia (l'asse di rotazione della lamina). Questa possibilità è particolarmente interessante quando la larghezza della traccia è grande, poiché diventa possibile determinarne il baricentro dalle coordinate di ogni singolo grano, rendendo trascu-

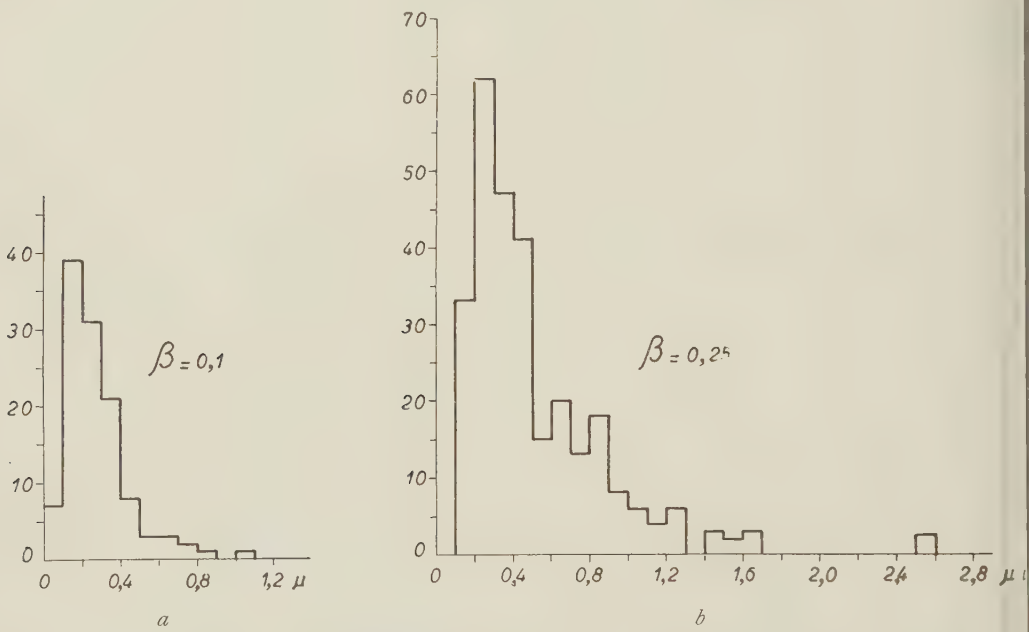


Fig. 3. – Distribuzione della lunghezza delle lacune sulle stesse sezioni di tracce considerate in Fig. 2: numero delle lacune in funzione della lunghezza delle lacune.

a) $\beta = 0.1$
b) $\beta = 0.25$
Lunghezza media delle lacune in *a*) : 0.3 micron
Lunghezza media delle lacune in *b*) : 0.48 micron.

rabile l'errore di aggiustamento proprio dei comuni micrometri a filo, e riducendo il rumore di fondo dovuto alla distribuzione irregolare dei grani.

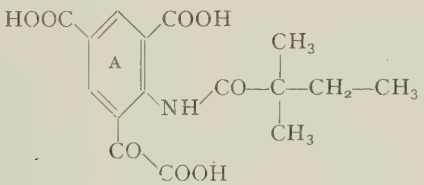
Le misure qui descritte richiedono al microscopio nitidezza di immagine, dolcezza di movimenti, e una estrema solidità di struttura del tubo oculare, qualità che abbiamo riscontrato nel microscopio da noi impiegato, un Koristka MS2.

Questo lavoro è stato possibile per l'appoggio finanziario concesso dallo Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, nel quadro della preparazione tecnica e strumentale all'impiego del sincrotrone nazionale.

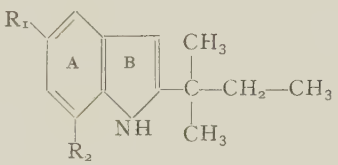
Chimica organica. — *Sulla struttura dell'echinulina*(*). Nota di Adolfo Quilico, Cesare Cardani e Franco Piozzi, presentata(**) dal Corrisp. A. Quilico.

Lo studio dei prodotti di degradazione ossidativa e pirolitica dell'*echinulina* $C_{28}H_{37}N_3O_2$ e del suo esaidroderivato dei quali abbiamo riferito in altra sede(1), ha messo in rilievo fatti che forniscono importanti informazioni sulla costituzione di questo interessante metabolita fungino e che, corredati dai risultati di nuove ricerche in via di completamento, ci permettono sin d'ora di fissare le linee essenziali della sua struttura.

Considerando l'*esaidroechinulina* $C_{28}H_{43}N_3O_2$, è stata chiarita la struttura di due importanti frammenti della sua molecola, e precisamente: *a*) quella dell'*acido criptoechinulinico* $C_{16}H_{17}NO_8$ (I) che è il più complesso dei prodotti di ossidazione permanganica di questa sostanza(2); *b*) quella della *base da idroechinulina* $C_{21}H_{29}N$ o $C_{22}H_{31}N$ (II) che si ottiene, accanto a CH_3NH_2 e $C_2H_5NH_2$ nella decomposizione pirogenica del sale di K della forma idratata dell'idroechinulina(3):



(I)



(II)

Il confronto di queste due sostanze, che presentano evidenti analogie strutturali, suggerisce l'idea che l'aggruppamento —NHCOC $(CH_3)_2C_2H_5$ e il —COOH situato in orto a questo dell'acido criptoechinulinico provengano dall'apertura ossidativa dell'anello B appartenente ad un *sistema indolico 2·5·7–trisostituito* originariamente presente nell'idroechinulina, e rimasto intatto nella pirolisi che ha condotto alla base indolica (II).

Differenti fatti appoggiano questo modo di vedere. Gli *spettri U. V.* dell'echinulina e dell'idroechinulina sono assai simili a quelli delle basi indoliche provenienti dalla pirolisi di queste sostanze e a quello del *2·5·7–tri-*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

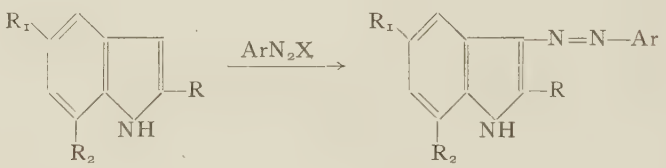
(1) A Quilico e L. Panizzi, « Ber. », *76*, 348 (1943); A. Quilico, L. Panizzi e V. Rosnati, « Gazz. Chim. It. », *78*, 111 (1948); A. Quilico e C. Cardani, « Gazz. Chim. It. », *83*, 155 (1953); A. Quilico, C. Cardani e F. Piozzi, « Gazz. Chim. It. », *83*, 179 (1953).

(2) A. Quilico, C. Cardani e F. Piozzi, loc. citato.

(3) Lavoro in corso di stampa sulla « Gazz. Chim. It. ».

metilindolo; inoltre, negli *spettri I.R.* di tutte queste sostanze appare assai evidente la banda dell'NH indolico nella regione intorno a 3500–3400 cm^{-1}, ciò che indica altresì che in esse la posizione 1 non è sostituita.

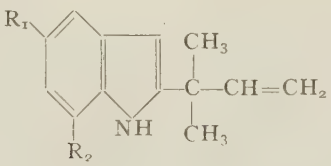
Altra conferma dell'esistenza nell'echinulina e nel suo idroderivato di un *nucleo indolico* a posizione 3 libera, è data dalla nostra recente osservazione che queste sostanze copulano facilmente in soluzione acetica glaciale o alcoolica con il diazo di p·nitro e di o·p·dinitroanilina per dare *azoderivati* rosso bruni stabili e cristallizzabili. Lo stesso fanno le *basi indoliche* da pirolisi e i modelli indolici sintetici come il *2·5–dimetil, 2·7–dimetil, 2·5·7–trimetilindolo.* Poiché tanto nell'echinulina, idroechinulina e basi indoliche da pirolisi, quanto nel 2·5·7–trimetilindolo (III) le posizioni di possibile copulazione nel nucleo benzenico sono occupate, e l'analisi degli azoderivati mostra che nel processo di copulazione non si è avuta eliminazione di catene laterali [4], si può concludere che la copulazione interessa la posizione 3 che deve pertanto essere libera:



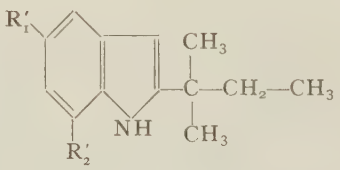
(III)

Dall'insieme di questi fatti si può dedurre che *l'echinulina e l'idroechinulina contengono un sistema indolico ad* NH *libero, 2·5·7–trisostituito.*

Riguardo alla natura dei sostituenti in 2·5 e 7, conosciamo con certezza la struttura della catena C_5 in posizione 2, come indicano gli schemi (IV) e (V) che si riferiscono rispettivamente all'echinulina e all'idroechinulina:



(IV)



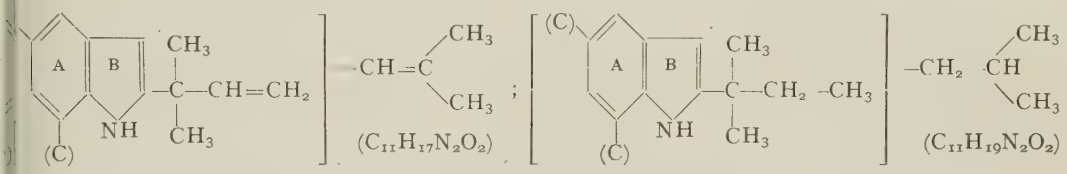
(V)

Sappiamo inoltre che in almeno uno dei sostituenti R_1 e R_2, che contengono la rimanente porzione azotata ed ossigenata dell'echinulina e due dei tre doppi legami idrogenabili in essa presenti, deve trovarsi un gruppo $(CH_3)_2C{=}CH{-}$ (ottenimento di *acetone* nell'ozonolisi e nell'ossidazione con-

(4) Come è stato osservato in qualche caso per le ammine terziarie aromatiche: vedi A. Quilico e M. Freri, « Gazz. Chim. It. », *60*, 609 (1930); *62*, 253 (1932). Il fatto che l'*N–acetilmesidina* da noi sperimentata non copula con i sali di diazonio nelle condizioni indicate, permette di escludere una copulazione nel nucleo di tipo mesitilenico. Infine, dato che l'idroechinulina fornisce azoderivati come l'echinulina, non si può pensare ad una copulazione in catene laterali insature.

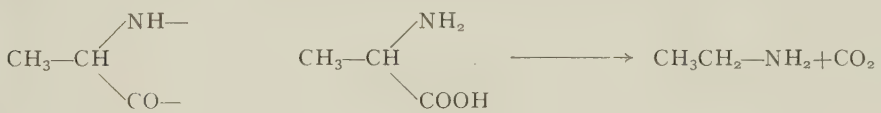
dotta in condizioni blande). Ciò è confermato anche dall'ottenimento di *acido isovalerianico* nell'ossidazione permanganica dell'idroechinulina, acido che non figura tra i prodotti dell'ossidazione condotta in condizioni analoghe dell'echinulina.

È assai probabile che tutti e tre i doppi legami idrogenabili dell'echinulina appartengano a catene laterali idrocarburiche. Ad ogni modo, sulla scorta di questi dati, possiamo formulare come segue l'*echinulina* (VI) e il suo *idroderivato* (VII):



(VI) (VII)

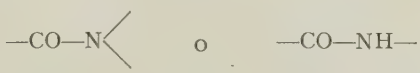
Stato dei due rimanenti atomi di azoto e dell'ossigeno. — I due rimanenti atomi di N dell'echinulina a dell'idroechinulina appartengono rispettivamente ai residui ($C_{11}H_{17}N_2O_2$) e ($C_{11}H_{19}N_2O_2$), e debbono essere sistemati in modo di non impartire proprietà basiche alla molecola. La formazione di *metilammina* nella pirolisi dei sali di K dell'echinulina e del suo idroderivato indica intanto che uno degli azoti è presente in forma di $>NCH_3$. Assai improbabile è invece che l'*etilammina*, che accompagna la prima in quantità approssimativamente equivalente, possa originarsi da un $>N—C_2H_5$, gruppo del tutto inconsueto nelle sostanze naturali. Molto più verosimile è che esso provenga da un aggruppamento del tipo (VIII); è nota infatti la facilità con cui l'*alanina* (IX) fornisce etilammina alla pirolisi:



(VIII) (IX)

Numerosi altri fatti dimostrano poi che almeno uno degli atomi di O (e probabilmente tutti e due) è presente nell'echinulina e nel suo idroderivato sotto forma di CO facente parte di un *aggruppamento ammidico ciclico*. Ci limiteremo a riportare i più significativi tra essi:

1° L'*assenza di proprietà basiche* in una sostanza che non contiene gruppi —CN, e che per la sua formula non può contenere altri anelli pirrolici oltre a quello del nucleo indolico già messo in evidenza, suggerisce che ambedue gli N siano presenti in forma di:



2° L'*apertura idrolitica* operata dalla KOH alcoolica per lunga ebollizione, che non è accompagnata da distacco di materia, e conduce a sostanze

di carattere anfotero capaci di ridare il prodotto di partenza (in forma otticamente inattiva) per disidratazione. Tale comportamento può essere attribuito alla apertura di un legame ammidico ciclico, come mostrano gli schemi:

$$\left[C_{27}H_{37}NO\right]\begin{matrix}-CO\\ |\\ -N\end{matrix} \underset{-H_2O}{\overset{+H_2O(OH^-)}{\rightleftharpoons}} \left[C_{27}H_{37}NO\right]\begin{matrix}-COOH\\ \\ -NH-\end{matrix}$$

(X)

$$\left[C_{27}H_{43}NO\right]\begin{matrix}-CO\\ |\\ -N-\end{matrix} \underset{-H_2O}{\overset{+H_2O(OH^-)}{\rightleftharpoons}} \left[C_{27}H_{43}NO\right]\begin{matrix}-COOH\\ \\ -NH-\end{matrix}$$

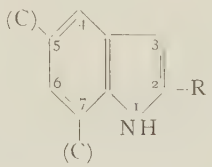
(XI)

che si riferiscono rispettivamente all'echinulina (X) e all'idroechinulina (XI).

3° Gli *spettri I. R.* dell'echinulina e dell'idroechinulina [5], che mostrano in modo evidente la presenza di CO ammidici (banda assai intensa, risolvibile in due, intorno a 6 μ), mentre non rivelano l'esistenza di gruppi OH.

4° La formula stessa dell'echinulina, $C_{28}H_{37}N_3O_2$, che è del tipo $C_nH_{2n-19}N_3O_2$. Se si tiene conto del fatto che essa contiene 3 doppi legami idrogenabili, 4 doppi legami di tipo aromatico e due anelli appartenenti al sistema indolico, si vede che un terzo anello può essere presente.

Le seguenti considerazioni portano poi ad escludere che esso sia condensato con il sistema indolico. La posizione *1* (XII) non porta sostituenti nell'echinulina, e non può quindi essere impegnata nella formazione di un anello con la posizione *7* che si presentava più favorita, ed è d'altra parte altamente improbabile che esista un collegamento diretto tra le posizioni *5* e *7* del nucleo benzenico. Si deve quindi concludere che il terzo anello dell'echinulina è semplicemente unito al nucleo benzenico (direttamente o indirettamente) attraverso una delle posizioni *5* e *7*.

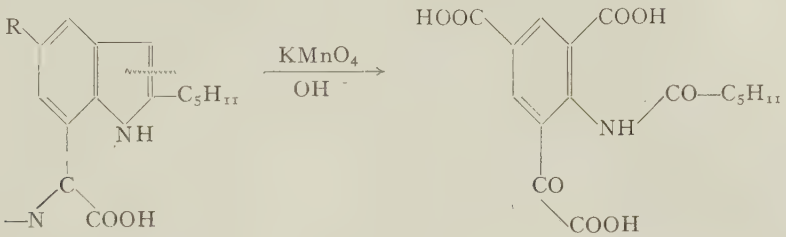


(XII)

Riguardo alla scelta tra le due posizioni possibili, alcuni indizi segnalano come più probabile la *7*. La struttura dell'*acido criptoechinulinico* (XIV), che si ottiene per ossidazione del prodotto di apertura alcalina dell'idroechinulina, indica che debbono esistere importanti differenze di struttura tra i gruppi che sono legati al nucleo benzenico in *5* e *7*. Essa suggerisce l'idea che in *5* esista un semplice residuo alchilico che viene bruciato nell'ossida-

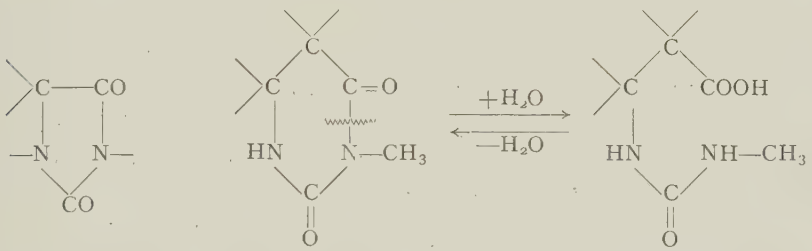
(5) Questi e gli spettri U. V. verranno quanto prima pubblicati e discussi in altra sede.

zione permanganica a gruppo —COOH, e che il gruppo —CO—COOH dell'acido criptoechinulinico provenga invece dall'ossidazione di una catena contenente preformato il —COOH, e avente una funzione azotata in α, come mostra lo schema:

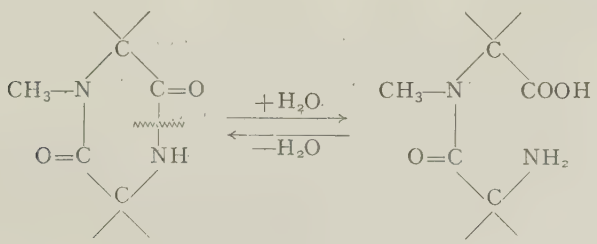


(XVIII) (XVI)

Struttura del terzo anello dell'echinulina. — Si è visto che il comportamento dell'echinulina e del suo idroderivato di fronte agli agenti idrolizzanti alcalini richiede che ambedue i gruppi ammidici facciano parte di un sistema ciclico, dato che gli alcali non provocano il distacco di NH_3 o di derivati amminici anche per azione prolungata a caldo. D'altra parte la locazione delle bande del CO negli spettri I. R. di queste sostanze permette di escludere che gli aggruppamenti ammidici appartengano ad un anello pentatomico del *tipo idantoinico* (XV). Si possono conciliare queste esigenze con l'assenza di proprietà basiche, ammettendo che in queste sostanze esista un *anello idrouracilico* (XVI) oppure *dichetopiperazinico* (XVII); uno dei due atomi di N in esso presenti sarebbe alchilato (—CH_3), l'altro sotto forma di NH. Entrambe le strutture possono giustificare l'apertura alcalina e la successiva richiusura dell'anello, con rigenerazione del prodotto di partenza, e la formazione di metilammina nella pirolisi del sale di K:



(XV) (XVI)

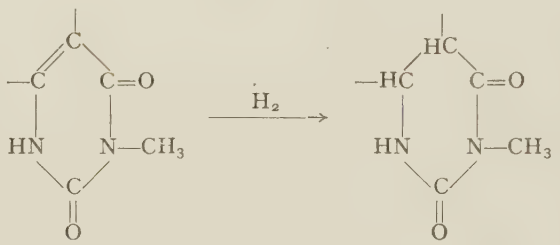


(XVII)

Altri fatti, in accordo più o meno soddisfacente con ambedue le strutture sono:

1° La formazione di *nitrosoderivati* gialli, insolubili in alcali, aventi il carattere di nitrosammine (reazione di Liebermann positiva, distacco di NOCl per azione di HCl gassoso ecc.).

2° La comparsa negli *spettri I. R.* dell'echinulina e dell'idroechinulina di due bande assai nette di media intensità nella regione 3,1–3,3 μ, assegnabili all'NH, bande che figurano negli spettri degli idrouracili e delle dichetopiperazine aventi almeno un NH libero. Inoltre l'intensa banda del CO ammidico intorno a 6 μ appare costituita da due bande vicine, come appunto si verifica per sostanze del tipo sopra indicato. Il fatto poi che non si abbia alcun spostamento di queste bande nel passaggio dall'echinulina al suo idroderivato, rende assai improbabile per l'echinulina una struttura del *tipo uracilico* (XVIII), contenente un doppio legame coniugato col CO, che verrebbe a sparire nell'idrogenazione ad idroechinulina:



(XVIII)

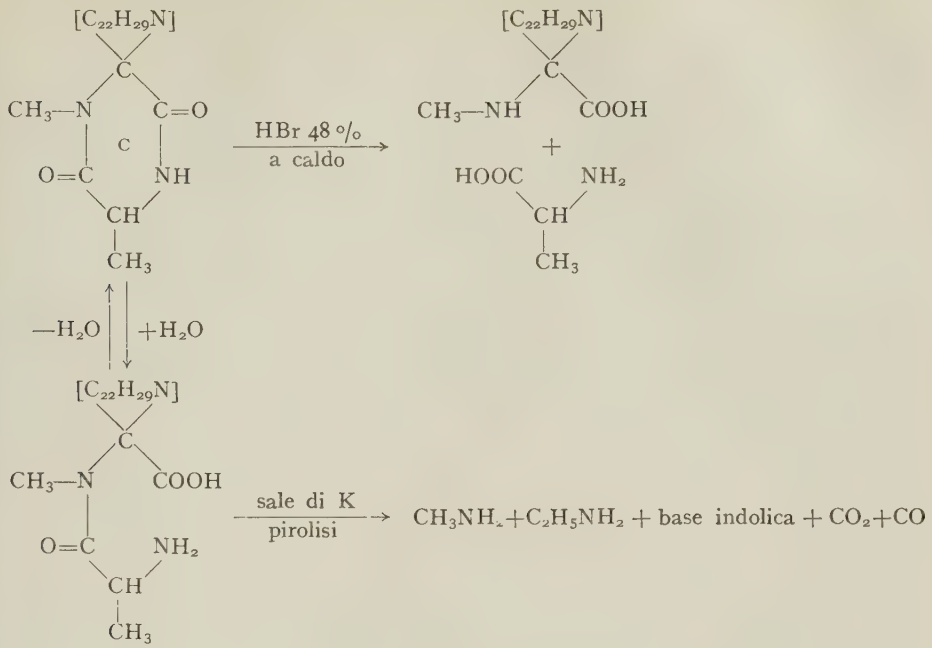
Anche il terzo doppio legame dell'echinulina deve quindi far parte di una catena laterale.

Tra le due possibili strutture dell'*anello C*, quella *dichetopiperazinica* (XVII) si presentava come più probabile in base alle seguenti considerazioni. Le dichetopiperazine hanno carattere neutro, mentre gli idrouracili contenenti un NH libero mostrano spesso carattere acido e si disciolgono negli alcali; inoltre le due bande del CO nello spettro I.R. dell'echinulina e del suo idroderivato sono molto serrate tanto da simulare quasi una banda unica, ciò che è più conforme all'aspetto a cuspide sdoppiata che questa banda ha nelle dichetopiperazine [6].

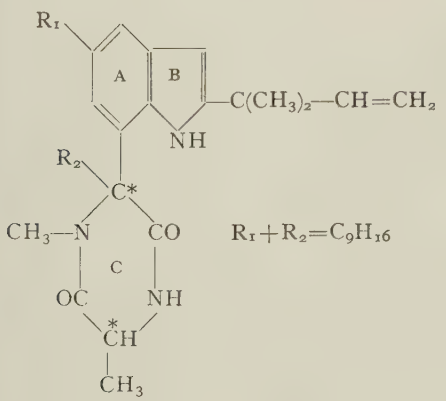
La definitiva scelta tra le due ci è stata possibile in base ai risultati dell'*idrolisi acida* dell'idroechinulina con HBr concentrato, da noi recentemente realizzata. Accanto ad un amminoacido complesso ancora in istudio, contenente la parte indolica della molecola dell'idroechinulina, si ottiene in rese elevate la *L*(+) *alanina*; quest'ultima si forma pure, accanto a prodotti resinosi, nell'idrolisi con HBr dell'echinulina.

Lo schema sotto indicato renderebbe ragione dell'idrolisi acida dell'idroechinulina, dell'apertura operata dalla KOH alcoolica, e della formazione di metilammina e di etilammina nella pirolisi del sale di K:

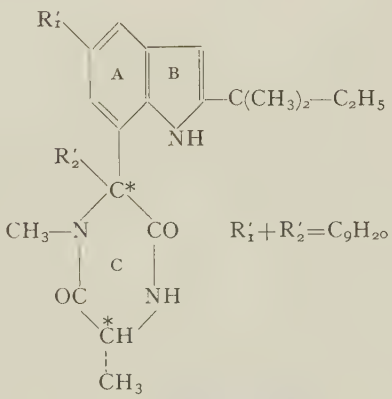
(6) J. Chouteau, « Bull. Soc. Chim. », 473, 1951.



In base a quanto è stato esposto, le formule che meglio interpretano l'insieme ormai cospicuo di fatti sperimentali dei quali siamo finora in possesso sull'echinulina e sul suo esaidroderivato sono le seguenti:



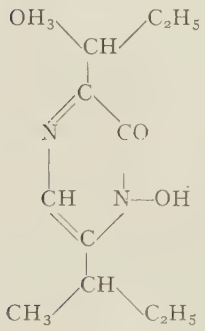
(XIX) Echinulina.



(XX) Esaidroechinulina

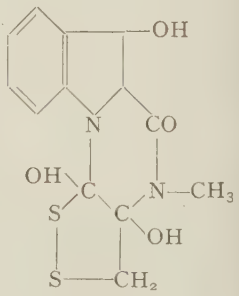
che noi proponiamo per queste sostanze come punto di partenza per le successive ricerche. Strutture come la (XIX) e la (XX) contengono solo *due centri di asimmetria* situati nel nucleo dicheto piperazinico, ciò che rende ragione della racemizzazione provocata dal riscaldamento con KOH. Incertezze sussistono ancora sulla struttura e sulla relativa lunghezza delle catene insature R_1 e R_2 dell'echinulina e delle corrispondenti sature R'_1 e R'_2 dell'idroechinulina, comprendenti complessivamente 9 atomi di carbonio. Sappiamo tuttavia che in una di esse deve essere presente l'aggruppamento $(CH_3)_2C{=}CH{-}$ ($(CH_3)_2CH{-}CH_2{-}$ nell'idroderivato).

Le strutture sopra indicate appaiono soddisfacenti anche sotto l'aspetto biogenetico, perché presentano evidenti analogie con quelle di altri metaboliti azotati prodotti dalle muffe. Così lo scheletro dell'*1·4–pirazina* è contenuto nell'*acido aspergillico* (XXI), metabolita dell'*Aspergillus flavus* che ha preso certamente origine da *α–amminoacidi* (leucina ed isoleucina) attraverso la formazione intermedia della corrispondente dichetopiperazina. Negli *alcaloidi della segale cornuta* del tipo (XXII), pure essi di origine fungina, troviamo associati come nell'echinulina ad un elemento di struttura *indolico* (acidi lisergico ed isolisergico), un sistema *dichetopiperazinico* modificato, appartenente alla parte peptidica di queste sostanze. Somiglianze strutturali ancora più accentuate collegano infine l'echinulina alla *gliotossina* (XXIII), l'antibiotico solforato del *Gliocladium fimbriatum* e di numerosi aspergilli e penicilli:



(XXI)

(XXII)



(XXIII)

Patologia comparata. – *Un errore di Weismann ed il potere germinale del soma fattore essenziale per lo sviluppo dei tumori.* – I. *Premessa.* Nota (*) del Socio Achille Russo.

Alla fine del secolo scorso un nostro grande biologo, Battista Grassi (1), asseriva che, per il progresso delle *Scienze mediche*, la via maestra sia la *Patologia comparata*, dandone prova nei suoi lavori con l'addentellato ai fenomeni osservati in diversi gruppi animali. Egli più volte ha ribadito la necessità di una maggiore *cultura naturalistica* nell'affrontare problemi riguardanti l'origine di alcuni morbi per poterli razionalmente combattere.

Nel lavoro citato, così si esprimeva «Mi sembra di avere nettamente delineato il mio intendimento, esso mira ad un'estensione della patologia molto al di là degli stretti confini, dentro i quali oggidì vuolsi contenere».

(*) Presentata nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) B. Grassi, *Intorno ad alcuni protisti endoparassiti. Memoria di parassitologia comparata.* «Atti Soc. italiana di Scienze Naturali», vol. XXIV, 1881.

Fra i vari morbi studiati è l'origine dei *tumori*, su la quale, per tale deficienza, vertono ancora incertezze relative all'*agente causale*. A tale stato di fatto ha contribuito la nota *Teoria del Weismann*, che per molti anni ha imperato in *Biologia*, secondo la quale solo il *germe* sarebbe *immortale*, essendo il *soma mortale* e transitorio [2].

Oggi, contro tale concezione, solo confortata da conoscenze poco precise su le *Idromeduse*, date da Weismann [3], i *cicli vitali* in alcuni gruppi animali e vegetali dimostrano che anche il *soma* come il *germe*, ha *potere germinale* latente, il quale, in condizioni particolari, produce nuovi individui sessuati.

La prima documentazione di tale potere si ha in un *Protozoo*, *Infusorio ciliato*, che ha il ciclo vitale analogo a quello dei *Metazoi* (« Rend. Acc. Lincei », 1954). In entrambi l'individuo adulto e l'ovo fecondato, compiono una *divisione differenziale* (« Rend. Acc. Lincei », 1951) per dare origine all'individuo somatico, il cui *potere germinale* nel *Protozoo* è chiaramente manifesto per la formazione di *falsi gameti*.

Nei *Metazoi* le cellule dei tessuti dimostrano il *potere germinale* non con il processo singolare del *Protozoo*, ma con lo sviluppo diretto di nuovi individui sessuati, come nei *Poriferi*, nelle *Idromeduse*, nei *Cestodi*, nei *Tunicati* (« Rend. Acc. Lincei », 1954). L'evidenza del *potere germinale* in tali gruppi fa contrasto con quello dei *Mammiferi*, nei quali la sua esistenza è più difficile a dimostrare.

La graduazione suddetta è avvalorata dai vegetali con l'indipendenza di fenomeni più primitivi; ma, la maggiore indipendenza del *potere germinale* è carattere delle *ova*, che, in diversi animali, generano nuovi individui senza essere fecondate. Tale fenomeno è naturale e spontaneo nella *partenogenesi*, è artificiale e sperimentale nella *Ginogenese* e nella *Fecondazione crociata etirogenea* (« Rend. Acc. Lincei », 1954).

Contro i fatti sopra riassunti, che dimostrano il *potere germinale* del *soma* sia diffuso in natura e che esso rappresenti il fattore essenziale per l'origine dei *blastomi*, ancora oggi si oppone che vera causa siano gli *agenti esterni*, molti per numero e diversi per la loro origine.

Come prodotto cellulare grande valore fu dato ai *virus*, quale causa prima dell'origine dei *tumori*, ma, anch'essi, come tutti gli altri *agenti*, non potrebbero promuovere la moltiplicazione preblastomatosa ove mancasse il *potere germinale*. Come altrove si è detto [4], gli *agenti* collaborano con il *potere germinale*, ma dei due fattori il *germinale* è il più necessario, sia perché unico, sia perché spesso, senza la collaborazione dei primi, manifesta da solo la sua proprietà essenziale.

(2) A. WEISMANN, *Ueber leben und tod. Einige biologische Untersuchung*, Yena 1884.
(3) A. WEISMANN, *Die Entstehung der Sexualzellen bei Hydromeduzen*, Yena 1883.
(4) A. RUSSO, *Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosa, identificata con il potere germinale, etc.* « Rend. Acc. Lincei », 1954.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* – XI. *Meccanismo competitivo dell'interazione acido ascorbico–acido indolacetico* (*). Nota di Sergio Tonzig e Federica Trezzi, presentata (**) dal Socio S. Tonzig.

In una serie di precedenti ricerche [1,2,3,4] abbiamo cercato di dimostrare come l'AA, usato a concentrazioni abbastanza elevate peraltro sempre contenute, nell'interno dell'organo trattato, entro limiti fisiologici, esplichi un'azione nettamente antagonista nei riguardi dell'auxina (AIA) e dei diversi fenomeni funzionali che sono da questa influenzati. Ci sembra che il reperto sia di grande rilievo sia di per sè che per l'indirizzo che può dare agli studi di fisiologia protoplasmatica; per questo motivo noi non riteniamo esaurita la serie delle ricerche a carattere – per dir così – documentario. Con questa Nota, tuttavia, noi intendiamo aprire una nuova serie di ricerche aventi valore interpretativo.

Quali fossero le nostre idee a tale proposito noi non abbiamo mancato di precisare, del resto, sin dall'inizio della succitata serie di pubblicazioni [5,6]. Esse si basavano, e si basano, su quanto la gran massa di ricerche da tanti studiosi effettuata ha dimostrato – ci sembra con maggiore attendibilità – nei riguardi del meccanismo d'azione delle auxine. Fra tante ipotesi e tante discussioni, la cosa forse più certa è che le auxine in generale, e più in particolare ed in concreto l'AIA, finchè sono presenti nella cellula in forma libera sono del tutto inattive; e diventano attive solo se possono legarsi a proteine citoplasmiche. Il fattore stimolante – o che consente l'effetto stimolante – dunque, non è l'auxina a sè stante ma piuttosto un complesso auxin–proteico. È anche probabile che il legame – o almeno uno dei legami – tra auxina e proteine venga stabilito a livello dei radicali sulfidrilici delle proteine stesse. Come poi il complesso auxin–proteico ottenga di realizzare la sua azione stimolatrice è tuttora materia di discussione. Quanto a noi, avendo rilevato che un effetto immediato – e che precede quello che si concreta con un maggior accrescimento che, del resto, può anche non aversi – consiste in un aumento della viscosità strutturale citoplasmica, abbiamo formulato l'ipotesi che, direttamente o indirettamente, l'auxina provochi (con modalità che sono da studiare) uno stato di maggior dispersione delle proteine plasmatiche e, per ciò stesso, un aumento della superficie chimica reattiva di queste proteine che ne risulterebbero, in tal maniera, attivate.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.
(1) S. Tonzig e F. Trezzi, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 515 (1950).
(2) S. Tonzig e F. Trezzi, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 535 (1950).
(3) S. Tonzig e F. Trezzi, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 549 (1950).
(4) S. Tonzig e F. Trezzi, « Questi Atti », serie VIII, vol. 16, p. 434 (1954).
(5) S. Tonzig, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sp. », vol. 26, p. 369 (1950).
(6) S. Tonzig, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 468 (1950).

Fatte tali premesse, ci sembra che la spiegazione più ovvia dell'interazione tra AA ed auxine sia quella d'un meccanismo competitivo a livello dei radicali proteici cui le auxine si legano, dunque dei gruppi —SH. Si tratta, evidentemente d'un'ipotesi che, come tale, abbisogna d'essere dimostrata; in ogni caso essa richiede una più precisa formulazione giacché è evidente che l'effetto finale dell'AA, o meglio dell'ipotetico complesso protein–ascorbico, è suscettibile di notevoli variazioni a seconda che esso sia semplicemente inattivo, abbia il comportamento d'una debole auxina o sia addirittura inibente; ed a seconda che AA ed AIA competino, per così dire, alla pari oppure uno dei due abbia maggiore affinità dell'altro per il radicale proteico cui si legano. L'interazione tra AA ed AIA si risolverà quindi in maniera diversa a seconda che varino le concentrazioni assolute e relative delle due sostanze. A semplice titolo di esempio, noi ci limitiamo a considerare solo una delle varie possibilità: nel caso che l'AA sia capace di concorrere vantaggiosamente, rispetto all'AIA, per il possesso dei gruppi sulfidrilici, ed ammesso che la concentrazione d'AIA nella cellula sia inferiore alla disponibilità di gruppi sulfidrilici stessi, è evidente che, se i complessi protein–ascorbici sono inattivi, la somministrazione di piccole quantità d'AA rimarrà senza alcun effetto sino a tanto che la somma delle concentrazioni delle due sostanze non superi la disponibilità di radicali sulfidrilici, mentre si avrà un'azione inibente solo dopo che tale soglia sarà superata; se i complessi protein–ascorbici si comportano come deboli auxine, a seconda che si rimanga al disotto o che si superi tale soglia, l'effetto sarà stimolante oppure inibente; mentre sarà in ogni caso inibente se di per sè i complessi protein–ascorbici hanno effetto inibente. Come poi vari l'azione finale se AA ed AIA competino in modo paritetico o se quest'ultimo prevalga, ognuno può facilmente intuire.

L'esistenza di queste varie possibilità ci è sembrato possa anche spiegare i risultati incerti o addirittura contradditori che sono reperibili nella letteratura. Così Kögl e Haagen–Smit [7] non hanno potuto rilevare azione alcuna dell'AA sull'accrescimento di plantule di pisello; Havas [8,9] ha trovato, su plantule di lino, un'azione stimolante oppure inibente a seconda della concentrazione (rispettivamente 1 : 10.000 e 1 : 1000); Davies, Atkins e Hudson [10] hanno parimenti trovato che l'accrescimento di plantule di varie specie è stimolato oppure ritardato a seconda che si usi AA a concentrazione debole (1 : 100.000) oppure forte (1 : 10.000); Macht e Grumbein [11] hanno trovato che, usato a concentrazioni che vanno da 1 : 10.000 sino ad 1 : 250.000, l'AA stimola l'accrescimento di radici di lupino; azioni stimolanti, peraltro non sempre del tutto chiare né sempre costanti, hanno tro-

(7) F. Kögl e A. J. Haagen–Smit, « Zt. Physiol. Chem. », vol. 243, p. 209 (1936).
(8) L. Havas, « Nature », vol. 136, p. 435 (1935).
(9) L. Havas, « Nature », vol. 138, p. 586 (1936).
(10) W. Davies, G. A. Atkins e P. C. B. Hudson, « Ann. Bt. », n. s., vol. 1, p. 329 (1937).
(11) D. I. Macht e M. L. Grumbein, « Am. J. Bt. », vol. 25, p. 15 sg. (1938).

vato anche Bonner e Axtman [12], Bonner e Bonner [13], Lustig e Wachtel [14] e Amlong e Naundorf [15]; Avery e Sargent [16] hanno invece trovato che, alle concentrazioni usate (0,08–100 mg/l) l'AA è indifferente sui coleottili d'avena. Più recentemente Raadts [17] e Raadts e Söding [18] hanno trovato che l'AA (a conc. ottimale di $1 : 10^5$, mentre la conc. di $1 : 10^4$ è già troppo forte) stimola l'accrescimento del teste cilindro di coleottile soltanto all'inizio dell'esperienza mentre la lunghezza finale del teste è eguale a quella del controllo, a differenza dell'AIA che influisce sulla lunghezza finale; secondo questi Autori, comunque, l'AA di per sè stesso non può essere considerato come una sostanza di crescita nè un inibitore, ma come un attivatore dell'auxina di cui attiverebbe il redossi – potenziale. Scheuermann [19], infine, trova che alla conc. di 1 : 10.000 l'AA stimola l'accrescimento del teste cilindro di coleottile se usato assieme ad altre vitamine (soprattutto AIA), mentre da solo è pressoché inattivo.

Va anche detto che l'ipotesi del meccanismo competitivo dell'AA sull'auxina non è la sola che possa spiegare i nostri reperti. L'AA infatti (che noi abbiamo sempre somministrato e dosato nella pianta sotto forma ridotta) potrebbe anche ostacolare la genesi dell'AIA a partire dal suo più noto precursore che è il triptofano.

I problemi da risolvere sono, come si vede, numerosi e certo noi non intendiamo esaurirli in questa Nota. Aggiungiamo anche che numerose esperienze di cui diamo ora conto sono state da noi compiute già da tempo come lo dimostrano gli espliciti cenni che ne abbiamo fatto già in precedenza [5]. Ci è sembrato tuttavia prudente rimandarne sino ad ora la pubblicazione sia per accrescere il numero degli argomenti a nostro favore sia anche nella speranza che altrui dati venissero a confermare i nostri. A tale proposito vogliamo rilevare come l'esistenza di complessi protein–ascorbici già reperita nelle piante, peraltro in modo ancora impreciso, da Reedeman e McHenry [20] nel 1938, è stata poi assai meglio e molto felicemente delineata da Drake, Smythe e King [21] i quali hanno trovato che l'ac. deidroascorbico è capace di combinarsi con alcuni composti sulfidrilici (glutatione, cisteina e ac. tioglicolico); da Marx [22]; mentre Patterson [23] e Patterson e Lazarow [24] hanno trovato che l'ac. deidroascorbico ha effetto

(12) J. Bonner e G. Axtman, « Proc. Nat. Acad. Sc. », vol. 23, p. 453 (1937).
(13) J. Bonner e D. Bonner, « Proc. Nat. Acad. Sc. », vol. 24, p. 70 (1938).
(14) B. Lustig e H. Wachtel, « Bioch. Zt. », vol. 297, p. 386 (1938).
(15) H. U. Amlong e G. Naundorf, « Ber. Bt. Ges. », vol. 59, p. 32 (1941).
(16) G. S. Avery jr. e G. B. Sargent, « Am. J. Bt. », vol. 26, p. 548 (1939).
(17) E. Raadts, « Planta », vol. 36, p. 103 (1948).
(18) E. Raadts e H. Söding, « Naturwiss. », vol. 34, p. 344 (1948).
(19) R. Scheuermann, « Planta », vol. 40, p. 265 (1952).
(20) E. J. Reedeman e A. W. McHenry, « Biochem. J. », vol. 32, p. 85 (1938).
(21) B. B. Drake, C. V. Smythe e C. G. King, « J. Biol. Chem. », vol. 143, p. 89 (1942).
(22) Th. Marx, « Z. Lebensmittelunters », vol. 95, p. 319 (1952).
(23) J. W. Patterson, « J. Biol. Chem. », vol. 183, p. 81 (1950).
(24) J. W. Patterson e A. Lazarow, «J. Biol. Chem.», vol. 186, p. 141 (1950).

diabetogenico sui ratti formando dei composti con le molecole che contengono dei gruppi sulfidrilici i quali vengono in tal maniera bloccati; e che su tale effetto patogenico agiscono come protettori i composti con gruppi sulfidrilici (cisteina, glutatione, 2,3–dimercaptopropanolo).

Le esperienze, dalle quali ci sembra che il meccanismo competitivo dell'interazione tra AA ed AIA venga dimostrato, sono le seguenti.

1ª ESPERIENZA. – È stata fatta allo scopo di chiarire se, e fino a quanto, l'AA poteva agire negativamente sulla genesi dell'AIA in vivo, possibilità che, del resto, numerose nostre esperienze già precedentemente pubblicate ci dimostravano a priori assai improbabile. L'esperienza è stata condotta nella seguente maniera. Plantule di lupino sono state recise ed immerse per 24 ore, con la base del loro ipocotile, in AA 4 : 1000. Successivamente, dalle loro due prime foglie sono stati prelevati dei dischetti di 4 mm. di diametro per complessivi 0,5 gr. e tali dischetti sono stati infiltrati per qualche minuto a debole vuoto in soluzione di triptofano (gr. 0,01 in 2 cc. di soluz. tampone ai fosfati a pH 6,5) e lasciati nella stessa soluz. per 24 ore a 30° C. Al termine di questo trattamento i dischi sono stati lavati, rapidamente congelati, triturati in mortaio gelato a — 15° ed al pesto così ottenuto sono stati aggiunti 10 cc. d'etere etilico purificato. Il tutto è stato lasciato a sè per 24 ore a 15° C. L'estratto etereo raccolto ed evaporato a piccolo volume è stato ripreso con 0,5 cc. d'acqua distillata e fatto poi assorbire da una lamina d'agar al 2 % avente lo spessore di mm. 1,5. La lamina è stata allora tagliata in 30 dadetti il cui contenuto auxinico è stato poi determinato con altrettanti testi cilindro di coleottile d'avena (v. Victory) lunghi ca. 6 mm., senza la fogliolina interna ed in precedenza esauriti per 24 ore. Oltre alla serie di saggio, naturalmente, ne sono state fatte altre che servissero da opportuni controlli.

I risultati sono compendiati nelle seguenti cifre le quali esprimono l'accrescimento percentuale dei testi tenuti verticalmente su agar in camera umida per il tempo di 18 ore:

controllo (solo agar)	106
foglie controllo (infiltrate col solo tampone)	108
foglie dopo trattamento con AA	114
foglie infiltrate con triptofano per 24 ore	126
foglie trattate con AA e infiltrate con triptofano	128

2ª ESPERIENZA. – Se l'AA blocca i radicali proteici cui, per divenire attivo, deve legarsi l'AIA, e se esso addirittura sposta l'AIA già legato rendendolo libero e pertanto mobile, si dovrebbe trovare che, se dei coleottili d'avena provvisti del loro apice che, com'è noto, è il luogo dove vien formato il precursore ed il precursore vien trasformato in AIA, vengono trattati apicalmente con AA a concentrazione sufficiente per agire in maniera competitiva con l'AIA che ivi si forma – o che già vi è presente legato alle proteine – ma nello stesso tempo abbastanza bassa per non determinare una migrazione d'AA verso la base (già in precedenza abbiamo constatato che l'AA tende a spostarsi più in senso acropeto che basipeto) di dovrebbe ottenere una più abbondante discesa d'AIA libero verso la zona di distensione e, di conseguenza, un maggiore allungamento del coleottile.

L'esperienza è stata fatta su gruppi di coleottili recisi (90 coleottili per gruppo), posti verticalmente su gel d'agar al 2 % in camera umida alla temp. di 25° C e trattati con pomata di lanolina contenente AA a varie concentrazioni. I sottoriportati risultati indicano l'allungamento, espresso in percento del controllo, dei gruppi di coleottili variamente trattati, misurato a 6 ore dall'inizio del trattamento. Lunghezza iniziale mm. 6 ca. Le misurazioni iniziale e terminale sono state fatte al microscopio.

controllo, incremento in lunghezza fatto eguale a	100
AA 5 : 10.000	116
AA 10 : 10.000	131
AA 15 : 10.000	124
AA 1 : 100	47

Il risultato è assai notevole. Esso prospetta anche la possibilità che l'effetto stimolante che taluni studiosi hanno constatato dopo somministrazione d'AA possa essere spiegato con la migrazione di più forti quantità d'AIA dalla zona trattata a quella di distensione. Ci sembra, inoltre, ch'esso indichi che nei tessuti apicali, dov'è in corso un'intensa attività enzimatica che, tra l'altro, si conclude con la genesi dell'AIA che ordinariamente migra verso il basso, abbondante AIA sia anche legato alle proteine plasmatiche e ne condizioni la forte attività. Va comunque ricordato, nell'interpretare i risultati, ch'essi rappresentano l'effetto combinato dell'afflusso, nella zona basale di distensione, di una certa quantità di AIA e di una certa quantità di AA; il risultato migliore corrisponde dunque al rapporto più favorevole col quale le due sostanze sono pervenute alla zona di distensione.

3ª ESPERIENZA. – Rappresenta la riprova dell'esperienza precedente. Se il risultato positivo di questa è veramente dovuto ad un distacco di AIA legato nei tessuti apicali, e ad un suo più abbondante trasporto verso il basso, si dovrebbe trovare che i medesimi trattamenti rifatti su cilindri di coleottile privi della zona apicale provocano i soli effetti che conseguono all'arricchimento con AA, senza interferenze del tipo di quelle che si sono verificate nel corso dell'esperienza precedente.

L'esperienza è stata fatta con gruppi di cilindri di coleottile tagliati – a circa 3 mm dall'apice – con un dispositivo costituito da due lamette da rasoio fissate parallelamente a 5 mm. l'una dall'altra, e posti verticalmente su agar al 2 % in camera umida. Ogni gruppo comprendeva 60 cilindri di coleottile privati della fogliolina interna. Il trattamento è stato fatto con pomata di lanolina contenente AA a diverse concentrazioni. La lettura dell'allungamento, fatta al microscopio al pari della lettura iniziale, è stata fatta dopo 6 ore. Temp. di 25° C.

controllo, incremento in lunghezza fatto eguale a	100
AA 5 : 10.000	68
AA 10 : 10.000	63
AA 15 : 10.000	58
AA 1 : 100	46

Uno dei due competitori, l'AIA, è in questo caso presente in assai minor proporzioni in confronto delle condizioni della precedente esperienza, ciò che si risolve in una più accentuata prevalenza dell'AA e in un'azione inibente.

4ª ESPERIENZA. – Se le conclusioni che noi abbiamo tratto dalle esperienze precedenti sono vere, si dovrebbe anche trovare che, qualora coleottili recisi posti a diffondere su agar, vengano trattati nella zona apicale con AA a concentrazione sufficiente non solo a competere con l'AIA già legato alle proteine dei tessuti apicali in modo da determinarne il distacco, ma a migrare anche fino alla zona basale in modo da competere fino a tale zona con l'AIA libero ed ostacolarne l'unione con le proteine anche nella zona di distensione, si dovrebbe trovare – diciamo – che nell'agar sottoposto ai coleottili diffondono quantità di AIA superiori a quelle che diffondono dai controlli.

L'esperienza relativa è stata eseguita nella maniera seguente. Le porzioni terminali di coleottili d'avena, lunghe ca. 5 mm. e suddivise in gruppi di 250 ciascuno, sono state poste a diffondere su agar al 2 % in camera umida. Il loro apice, nei saggi, era stato trattato con pomata di lanolina col 10 % di AA; nei controlli il trattamento era stato fatto con sola pomata di lanolina. Dopo tempi diversi (di 1, 2, 4 e 6 ore) l'agar su cui i coleottili erano stati posti a diffondere venne prelevato e suddiviso in circa 80 cubetti che furono applicati ad altrettanti testi costituiti da cilindri di coleottile esauriti in precedenza per 30 ore e privi della fogliolina. Complessivamente si fecero 10 serie di 80 testi ciascuna e cioè: una serie di controllo generale costituita da cilindri di coleottile cui vennero sovrap-

posti cubetti d'agar puro; tale serie (che indichiamo con *C*) doveva indicare la misura dell'accrescimento, per dir così autonomo, di cui erano capaci i cilindri di coleottile; poi si avevano 4 coppie di serie costituite da cilindri di coleottile cui vennero sovrapposti cubetti d'agar su cui, rispettivamente per 1, 2, 4 e 6 ore, erano stati messi a diffondere coleottili trattati con lanolina e AA (serie AA) o, come controllo, lanolina pura (serie *c*); una decima serie, infine, era costituita da cilindri di coleottili trattati con cubetti d'agar contenente, AIA (0,6 γ per cubetto; serie AIA). Obbiettivo della nostra esperienza era, evidentemente, di stabilire se l'AIA diffuso dai coleottili nell'agar era oppure no in quantità maggiore quando i coleottili erano trattati con AA; di conoscere, pertanto, l'accrescimento dei gruppi AA in confronto di quello dei gruppi *c*. Per esprimere ciò nella maniera, a parer nostro, più corretta, una volta determinato l'accrescimento unitario dei coleottili d'ogni serie abbiamo sottratto al rispettivo valore di tutte le serie di saggio (AA e *c*) il valore della serie di controllo (*C*) esprimente l'accrescimento autonomo, indipendente dall'apporto d'auxine; ed abbiamo poi espresso l'accrescimento di ogni singola serie AA in percento della rispettiva serie *c*. In altre parole, noi abbiamo considerato l'accrescimento della serie *C* come dovuto all'AIA già presente nei cilindri; l'accrescimento della serie *c* come dovuto alla somma dell'AIA proprio (*C*) + l'AIA spontaneamente diffuso nell'agar dai coleottili trattati con sola lanolina; e l'accrescimento della serie AA come dovuto alla somma dei due tipi di AIA della serie *c* + quello liberato dal trattamento con AA. I numeri contenuti nella seguente tabella indicano dunque, in ogni casella, il valore dell'accrescimento unitario effettivo, espresso in mm., dei coleottili variamente trattati, già detratto del valore dell'accrescimento autonomo (serie *C*), che fu di mm. 0,2406; nonchè l'accrescimento delle singole serie AA in percento della rispettiva serie *c*. Solo l'accrescimento della serie AIA è espresso in percento della serie *C*. I cilindri di coleottile, tagliati col dispositivo di cui già s'è detto della lunghezza di ca. 3 mm., sono stati misurati, all'inizio e dopo 24 ore, al microscopio.

serie \ tempi di diffusione	1 h		2 h		4 h		6 h	
c	0,1014	**100**	0,1234	**100**	0,1442	**100**	0,0672	**100**
AA	0,2631	**259**	0,3233	**262**	0,3895	**270**	0,3770	**561**

AIA (0,8946 in totale) = 37 % di *C* (0,2406)

I risultati sono, a nostro parere, molto significativi; ed è anche da osservare che essi sarebbero stati ancora più significativi se, nell'agar su cui sono stati posti a diffondere i coleottili trattati con AA, non fosse passato anche dell'AA in quantità, come abbiamo riscontrato, tanto maggiore quanto più veniva protratta la diffusione.

5ª ESPERIENZA. – Non è, pur con alcune varianti, che una riprova della precedente dalla quale differisce, sostanzialmente, per la determinazione dell'AIA rimasto, dopo diffusione su agar, in coleottili trattati oppure no con AA. Sebbene grossolanamente, l'AIA non diffuso può esser preso come indice di quello presente in forma di complesso auxin–proteico. Vere le nostre premesse, il risultato dovrebbe dimostrare un minor contenuto in AIA nei coleottili fatti diffondere su agar ed arricchiti con AA.

L'esperienza è stata fatta ponendo dei segmenti subapicali di coleottili d'avena (600 segmenti per ogni serie, lunghi ciascuno ca. mm. 7) su agar. I segmenti d'una serie sono stati trattati, all'estremità superiore, con lanolina col 10 % d'AA; i segmenti d'una seconda serie con lanolina pura. Dopo 5 ore di permanenza in camera umida a 25° C, i coleottili vennero

rapidamente congelati, polverizzati in mortaio gelato a —15°, e la polvere estratta delle auxine totali contenutevi mediante trattamento, per 15 minuti, con soluzione d'NaOH a pH 10 a 120°C. Dopo raffreddamento e centrifugazione il liquido venne portato a pH 6,5 con soluzione normale d'HCl e quindi usato per preparare un gel d'agar al 2 % che, suddiviso in piccoli cubi, venne saggiato su 180 cilindri di coleottili d'avena precedentemente esauriti per 24 ore. Frattanto, l'agar su cui i coleottili erano stati posti a diffondere era stato estratto con etere purificato ed umido per 24 ore; l'estratto etereo ridotto a piccolo volume e ripreso con acqua era stato usato per preparare un gel d'agar al 2 %, gele che, suddiviso in piccoli cubetti, venne parimenti saggiato su 180 cilindri di coleottile d'avena esauriti e privati della fogliolina. I testi cilindri di coleottile, tagliati col solito dispositivo a lunghezza iniziale di circa 4 mm., sono stati misurati all'inizio dell'esperienza e dopo 24 ore sempre al microscopio. Si ebbero, in definitiva, 6 serie di testi: due per gli estratti dei coleottili trattati oppure no con AA; due per gli estratti nell'agar sotto ai coleottili trattati oppure no con AA; ed altre due serie nelle quali i testi erano stati sottoposti a cubetti di agar contenenti i soli solventi usati nella preparazione degli estratti rispettivamente di coleottili o dell'agar ad essi sottoposto. Queste due serie di controllo (*C* e *C'*) esprimevano dunque l'accrescimento proprio dei testi nelle rispettive condizioni (il valore unitario trovato fu, rispettivamente, 0,3435 e 0,4748). Con lo stesso criterio esposto a proposito dell'esperienza precedente, tale valore fu sottratto agli altri due della stessa categoria (rispettivamente: testi trattati con estratti di coleottile o con estratti del sottostante agar); e l'accrescimento dei testi trattati con estratti provenienti dai saggi trattati con AA viene espresso, nella seguente tabella, in percento dell'accrescimento dei testi trattati con estratti dei controlli. I numeri di ogni casella indicano dunque, anche in questo caso, il valore dell'effettivo accrescimento unitario dei testi in mm., già detratto del valore di *C* o, rispettivamente, di *C'*; e l'accrescimento dei saggi serie AA in percento dei saggi serie di controllo.

estratto di / serie	coleottili		agar	
controlli	0,2768	**100**	0,0241	**100**
AA	0,1756	**63**	0,1152	**478**

6ª ESPERIENZA. – Questa esperienza, come pure quella che segue, sono state fatte per ottenere un'ulteriore e, se si può dire, anche più tangibile prova dell'interazione competitiva tra AA ed AIA; inoltre per chiarire eventuali dubbi sull'identità della sostanza che, diffusa nell'agar da coleottili trattati con AA (esperienze 4 e 5), stimola l'accrescimento dei testi cilindro di coleottile. Con questa nuova esperienza abbiamo cercato di stabilire se nell'estratto di internodi di pisello (v. Alaska) preparato in modo da asportare soltanto le auxine libere, sia possibile identificare cromatograficamente una maggiore quantità di AIA qualora il materiale venga preventivamente arricchito con AA.

In piantine eziolate di pisello coltivate in camera umida a temp. costante di 25° C e giunte al 15° giorno, dalle porzioni di fusto disponibile (epicotile e primi due internodi) sono stati prelevati dei segmenti di ca. 2 cm. per complessivi 180c gr. Il materiale, suddiviso in due porzioni di 900 gr. ciascuna, è stato infiltrato a vuoto moderato e per circa 30 minuti in soluzione d'AA 2 : 1000 in tampone ai fosfati a pH 6,5 o, rispettivamente, nella sola soluzione tampone allo stesso pH. Dopo esser rimasto nello stesso liquido per altre 2 ore a temp. ambiente, il materiale è stato lavato e trattato con tanto etere etilico, purificato e acidificato a pH 3 con HCl, quanto occorreva per ricoprirlo (ca. 500 cc.) ed il tutto è stato lasciato in camera fredda a + 1° C per circa 18 ore. L'estratto etereo così

ottenuto è stato evaporato a ca. 50 cc. ed estratto due volte successive mediante sbattimento con 50 cc. ogni volta di $NaHCO_3$ 1 %. La soluzione di bicarbonato, nella quale era così passato l'AIA estratto dall'etere, è stata riacidificata a pH 3 con HCl e nuovamente estratta due successive volte con etere etilico purificato. La soluzione eterea contenente l'AIA è stata evaporata a piccolo volume e ripresa con 0,1–0,2 cc. d'acqua. La soluzione acquosa è stata versata poco per volta su una striscia di carta da cromatografia Watmann N. 1 in modo da ottenere una macchia di non più di 0,5 cm. di diametro e, infine, è stata fatta la cromatografia ascendente facendo pescare la carta in soluzione d'alcool isopropilico, ammoniaca ed acqua in rapporto di 10 : 1 : 1. Dopo 18 ore a 25° C, la carta è stata fatta asciugare al buio e spruzzata con soluzione di cloruro ferrico 0,05 M ed acido perclorico 5 % nella proporzione di 1 : 50. Si è così rivelata, ad un Rf. 0,52, una macchia rosso violacea di AIA di diversa ampiezza e diversa intensità a seconda che l'estratto proveniva dall'una o dall'altra delle due porzioni di materiale, trattato o no con AA. L'apprezzamento delle macchie è stato fatto allo spettrofotometro di Beckmann esplorando metodicamente, a λ 530 ed attraverso fessura di 4 mm. × 2 cm., un campo di 5,6 cm^2, tale cioè da comprendere largamente l'intera macchia. Il totale dei valori d'estinzione letti è stato di 0,064 per la macchia ottenuta con l'estratto dei controlli, e di 0,173 per la macchia ottenuta col materiale pretrattato con AA.

7ª ESPERIENZA. – Si è cercato di ottenere in vitro, con questa esperienza, quello che riteniamo d'aver dimostrato accadere nell'organo. In estratti di foglie di lupino abbiamo aggiunto, a tale scopo, AA e AIA o, rispettivamente, solo egual quantità d'AIA; e abbiamo poi dosato quanto AIA, nei due casi, era contenuto nella frazione proteica e quanto era rimasto libero.

95 gr. di foglie verdi di lupino sono state triturate con sabbia di quarzo e con tampone ai fosfati 0,2 M pH 6. Il pestato è stato filtrato per carta in centrifuga a cestello a 4000 giri ottenendo 190 cc. d'estratto; se ne fecero due porzioni di 95 cc. all'una delle quali vennero aggiunti 5 cc. d'AA in tampone pH 6 in modo che la sua conc. nel liquido totale divenisse del 2 : 1000 e quindi 1 cc. d'AIA 10^{-4} in modo che la sua conc., nel totale, divenisse di 10^{-6}; l'altra porzione fu invece addizionata di 5 cc. di soluzione tampone e di 1 cc. della medesima soluzione d'AIA. Dopo riposo di 2 ore a + 5° C, nei due estratti furono precipitate le proteine con 20 cc. di soluzione satura di $(NH_4)_2SO_4$. Dopo centrifugazione in frigorifero a + 0,5° C a 7000 giri, il liquido supernatante è stato estratto per 2 ore con etere purificato e la soluzione eterea, evaporata e ripresa con acqua, è stata cromatografata come descritto per la precedente esperienza. Il precipitato proteico ben lavato è stato ripreso con 25 cc. di carbonato sodico 0,5 % e sottoposto a digestione triptica (10 cc. di tripsina 1 % in carbonato soddico 0,5 %) a 57° C per 19 ore. Riprecipitate le proteine con ac. metafosforico 5 %, il supernatante è stato ripreso con etere e cromatografato con la tecnica già esposta. Le macchie sono state apprezzate allo spettrofotometro di Beckman come nell'esperienza precedente ottenendo i seguenti valori d'estinzione:

estratto controllo: AIA libero 2,070 AIA nel precipitato proteico 0,271 (= all'11,7 % del totale)
estratto + AA: AIA libero 3,800 AIA nel precipitato proteico 0,051 (= all'1,3 % del totale).

Non tutte le questioni prospettate nell'introduzione sono, evidentemente, risolte dalle esperienze che abbiamo descritto. Ci pare peraltro che esse indichino che l'AIA è attivo solo quando sia in qualche maniera legato in complessi auxin-proteici; e che l'AA interagisce in maniera competitiva con l'AIA staccandolo da tali complessi, rendendolo libero e, in tal maniera, inattivandolo.

Fisiologia. — *Stimolatore a doppio impulso, alimentato con corrente continua*(*). Nota di GUIDO FOLICALDI e GIULIO CESARE PUPILLI, presentata(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Nell'ideare lo stimolatore qui descritto, ci siamo proposti innanzi tutto di ridurre al minimo possibile il numero delle valvole e l'assorbimento anodico, a fine di rendere più facile l'alimentazione in corrente continua, così da eliminare nell'uso dell'apparecchio i noti inconvenienti di un'alimentazione di rete.

Come generatori d'impulsi abbiamo scelto circuiti multivibratori di tipo monostabile, che si sono dimostrati i più adatti. Lo stimolatore (fig. 1) si compone di tre di questi generatori, dei quali il primo (G_1) e il terzo (G_3) sono destinati a produrre gl'impulsi utili, mentre il secondo (G_2) ha la funzione di determinare l'intervallo di tempo che deve intercorrere tra l'inizio del primo impulso utile e quello del secondo ovvero la fine dell'uno e l'inizio dell'altro. Variando il valore della R e della C varia la costante di tempo della carica del condensatore e quindi la durata dell'impulso (da sec 1 a msec 0,1). I valori dei componenti il circuito (R_1 e R_2) sono tali da evitare che il multivibratore diventi astabile.

La commutazione del condensatore C_1, effettuabile per mezzo del tasto di comando, fa scattare il primo generatore. Il secondo può essere comandato simultaneamente (K in posizione 1) oppure, mediante il circuito derivatore connesso con la placca del primo generatore, dal fronte discendente del primo impulso (K in posizione 2). Il terzo generatore è sempre comandato dal fronte discendente del secondo impulso.

Tanto il primo impulso quanto il terzo vengono a pilotare un amplificatore ad accoppiamento catodico come stadio di uscita, dal quale è derivata la tensione di stimolo; questa può essere regolata, con opportuni divisori (P_1 e P_2), tra V 50 e mV 1. Per durate comprese tra sec 0,2 e msec 0,1 la forma degl'impulsi rettangolari è soddisfacente; per durate comprese tra sec 1 e sec 0,2 si ha una caduta di tensione, che per la durata massima raggiunge il 10 p. 100.

Lo stimolatore consente di disporre anche di onde rettangolari persistenti: con un comando si può infatti far variare la resistenza di catodo del terzo circuito, in modo da trasformare il multivibratore da monostabile in astabile (K_1 in posizione di chiusura, R_3 inserita). Utilizzando tale disposizione, il periodo degl'impulsi può essere variato da sec 2 a msec 0,2 e la durata di ogni impulso è pari alla metà del periodo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

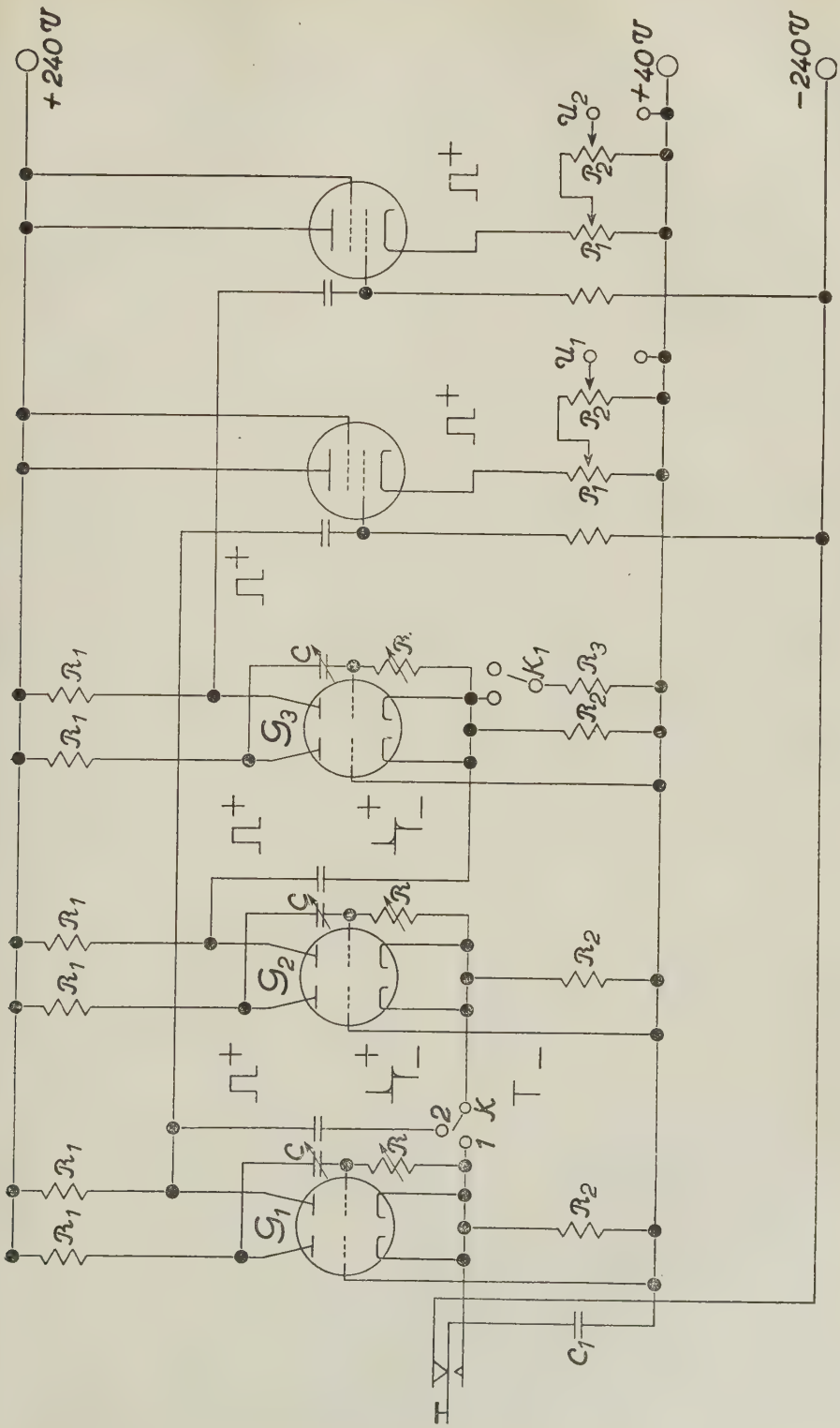


Fig. 1. – Schema dello stimolatore (si veda la spiegazione nel testo).

All'alimentazione si provvede nel modo seguente: mediante un accumulatore di 6 V, con un assorbimento di 3 A, per l'accensione dei filamenti; e mediante due batterie di pile da 120 V, con un assorbimento di 4 mA in assenza di stimoli e 40 mA durante lo stimolo, per la tensione di placca.

Quando il primo e il secondo generatore sono comandati simultaneamente, il primo impulso essendo di durata massimale e il secondo e il terzo di durate brevi, lo strumento permette di studiare gli effetti della stimolazione di un tessuto sottoposto all'azione di una corrente polarizzante.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un procédé généralisé de Cantor* (*). Nota di Otton Martin Nikodým e Stanisława Nikodým, presentata (**) dal Corrisp. A. Tonolo.

L'étude approfondie des nombres ordinaux et cardinaux en relation avec la notion de confinalité dans les ensembles abstraits ordonnés linéairement fournit des moyens pour étudier l'efficacité de l'extension des corps algébriques abstraits par des procédés généralisés de Cantor. Nous avons prouvé que les possibilités de l'extension vraie sont très limitées et, que pour une valuation donnée sur le corps il n'existe plus d'une extension vraie. Par conséquent, les « cantorisations » générales ne sont générales qu'apparemment.

1. Nombres ordinaux et cardinaux. – Nous rappelons brièvement les notions fondamentales, introduisons quelques termes et symboles et, comme cette matière est considérée par quelques mathématiciens comme controversable, nous allons la clarifier par des remarques convenables.

Par une *chaîne* (ordre linéaire) (1) nous entendons une correspondance (2) (M) telle que 1°. $\Gamma(M) = D(M) \neq 0$; 2°. si $a \in \Gamma(M)$, on a $a\,(M)\,a$; 3°. $a\,(M)\,b$, $b\,(M)\,c$ entraîne $a\,(M)\,c$; 4°. si $a, b \in \Gamma(M)$, on a ou $a\,(M)\,b$ ou bien $b\,(M)\,a$. Nous définissons $a = b$ comme $a\,(M)\,b$, $b\,(M)\,a$. Nous posons

(*) Research sponsored in part by Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA-33-019-ORD-1104.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Voir, p. ex., G. Birkhoff, *Lattice theory*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », Vol. 25, N. York (1948).

(2) « Relation » dans le sens de A. N. Whitehead et B. Russell, *Principia Mathematicae*, Cambridge (1910). Si R est une correspondance, son domaine est désigné par ΓR et son rang par DR.

$M = \Gamma(M)$ [3] et, écrivons $\leq$ au lieu de (M). Si $E \neq o$, $E \subseteq M$ [4] la correspondance (M) restreinte à E, est aussi une chaîne, appelée *sous-chaîne* de (M) ou « E ordonné » et désigné par (E). Une sous-chaîne (M_I) de (M) est dite *confinale avec* (M) si, quel que soit $a \in M$, il existe $a_I \in M_I$ tel que $a \leq a_I$. Le terme « confinal » sera aussi appliqué à l'ensemble M_I. Un *bon ordre* (*b. o.*), (ensemble bien ordonné) est une chaîne (A) dont chaque sous-chaîne possède un élément minimum. Un *idéal* de (A), (segment) est un sous-ensemble $I \neq o$ de A tel que, si $a \in I$, $b \leq a$, on a $b \in I$. Si $I \neq A$, on appelle I *idéal propre*. Par [*nombre*] *ordinal* (*n. o.*), de b. o. (A) nous entendons une classe α composée [5] de tous les b. o. (A') qui sont ordre - isomorphes avec (A). Le b. o. (A) est appelé *représentant* de α. Étant donné deux ordinaux α, β, nous écrirons $\alpha \leq \beta$ s'il existe de représentants (A), (B) de α, β respectivement, tels que (A) est ordre-isomorphe avec un idéal ordonné de (B). Nous posons $\alpha = \beta$ lorsque $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha$. Si K est une classe $\neq o$ d'ordinaux [6], l'inégalité ci-dessus organise K en un b. o. (K) appelé *naturel*. Si un représentant (A) du n. o. α ne possède pas l'élément maximum, α s'appelle *n. o. limite*.

2. Si $E \neq o$ est un ensemble d'éléments quelconques (du même type) on appelle son [*nombre*] *cardinal* (*n. c.*), une classe p de tous les ensembles E' (du même type, mais qui peut différer de celui de E) qui peuvent être mis en une correspondance bi-univoque avec E. L'ensemble E s'appelle *représentant de p*. L'inégalité $p \leq q$ pour les cardinaux se définit d'une manière usuelle par les représentants. Elle ordonne les n. c. en un b. o.

(3) D'une manière générale un ensemble N organisé en une structure sera désigné par (N).

(4) Tous les ensembles considérés dans ce qui suit seront supposés d'être invariants par rapport à l'égalité régnante dans la théorie correspondante, c'est-à-dire, si $a \in E$, $a = a'$ on a $a' \in E$. La propriété analogue sera admise pour les correspondances. L'égalité (qui peut d'ailleurs différer de l'identité) engendre la notion de *élément unique* satisfaisant à une condition donnée. Voir note (2).

(5) Conformément au *principe de l'uniformité de types logiques* (voir note (2), un n. o. α est toujours composé de b. o. qui possèdent le même type logique. Par conséquent il peut exister plusieurs n. o. correspondant à un b. o. donné. Mentionnons que la notion du « il existe » du « tout » et de « l'ensemble de *tous* les éléments satisfaisant à une condition donnée » sont des notions axiomatisées convenablement dans la logique formelle et, leur significations s'écartent de celles qui règnent dans les sciences naturelles. En effet, la structure formelle des mathématiques ne tient pas compte du tout de l'interpretation intuitive que quelqu'un voudrait attacher à leurs notions. Les notions logiques mentionnées doivent obéir strictement au principe de l'uniformité de types.

(6) Le n. o. de (K) n'est jamais du même type que les éléments de K; par conséquent l'antinomie connue de Burali-Forti n'apparaît pas. Conformément au principe de l'uniformité de types on peut parler de l'ensemble de *tous* les ordinaux ou cardinaux. Les n. o. constituant K doivent être du même type, parce que, d'une manière générale, l'introduction d'un agglomérat composé d'éléments de types différents conduit inévitablement aux contradictions (Antinomie de Russell).

3. Un n. o. d'un b. o. (A) sera désigné par Ord (A) et, le n. c. d'un ensemble E par Card E. Le symbole Card α où α est un n. o., désigne Card (A) où (A) est un représentant de α. Quelque fois il est utile de considérer l'ordinal O qui se définit comme une classe composée d'une seule correspondance vide. L'axiome de Zermelo dit qu'étant donné un n. c. p, il existe un n. o. α tel que Card $\alpha = p$.

4. Voici quelques propriétés de b. o. et n. o. L'inégalité $\alpha < \beta$ entraîne Card $\alpha \leq$ Card β. Si Card $\alpha <$ Card β, on a $\alpha < \beta$. Si (A) est un b. o. $B \neq o$, $B \subseteq A$, alors Ord (B) $\leq$ Ord (A). Si (A) est un b. o., $B \subseteq A$, Ord (B) = Ord (A) alors (B) est confinal avec (A). Si (A) est un b. o., (B) sa sous–chaîne, $f(b)$ une application de B sur A telle que $b_1 < b_2$ entraîne $f(b_1) < f(b_2)$, alors $b \leq f(b)$ pour tout $b \in B$.

5. Voici quelques propriétés des chaînes. Si (M) est une chaîne, (M_1) sa sous–chaîne confinale avec (M), $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M$, alors (M_2) est aussi confinale avec (M). Si (M) est une chaîne, (A), (B) des b. o. et sous–chaînes de (M), $C = A \cup B$ (union), alors (C) est aussi un b. o. [7]. Si (M) est une chaîne, (A) un b. o. naturel d'ordinaux, $f(\alpha)$ une application de A sur M telle que $\alpha_1 < \alpha_2$ implique $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ alors (Df) est un b. o. Les propriétés ci–dessus permettent de prouver le

I. Théor. – Si (M) est une chaîne, il exixte un bon ordre qui est une sous–chaîne de (M), confinale avec (M).

6. Bons ordres et nombres ordinaux distingués. – Un n. o. α s'appellera *distingué* (*n. o. d.*) [8], s'il est infini et, si Card $\alpha =$ Card β implique $\alpha \leq \beta$. Le plus petit n. o. d. est ω, le suivant est Ω. Les représentants d'un n. o. d. s'appellerons *b. o. distingués*. Un n. o. d. est toujours un n. o. limite. Un b. o. infini (A) est distingué si et seulement si Card I < Card A pour tout idéal propre I de (A). Etant donné un n. c. p, il existe toujuors un n. o. d. unique α tel que Card $\alpha = p$. Si (A) est un b. o. d., $B \subseteq A$, Card A = Card B, alors B est confinal avec (A), Ord (A) = Ord (B), (B) est distingué [9]. Si (A) est un b. o. d., I son idéal propre, alors Ord (A — I) = Ord (A). Si α est un n. o. d., $\beta < \alpha$, alors $\beta + \alpha = \alpha$. Si (A) est un b. o. d. naturel d'ordinaux, $n(\alpha)$ une application de A dans A telle que $\alpha_1 < \alpha_2$ entraîne $n(\alpha_1) < n(\alpha_2)$, alors Ord (D$n$) = Ord (A) (A) et, D$n$ est confinal avec (A). Si (M) est une chaîne, (A), (B) des b. o. d. et sous–chaînes de (M), confinales

(7) H. Hahn, *Ueber die Nichtarchimedischen Grössensysteme*, « Sitzber. d. Math.–Naturwiss. Klasse d. Kais. Akademie d. Wissensch. Wien. », Vol. 116. Abt. II *a* pp. 601–655 (1907).

(8) Connus sous le nom « n. o. initial ». Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*. 3 Aufl. Berlin–Leipzig (1935).

(9) Un théorème plus général pour les suites généralisées de Moore–Smith se trouve chez M. I. Norris, *Cofinally concentrated directed systems*, « the Journal of Computing Systems », Vol. I, pp. 81–85, Theor. 3 (1953).

avec (M), Ord (A) $\leqq$ Ord (B), $C = A \cup B$, alors (C) est un b. o. d. confinal avec (M) et, (A), (B) sont confinaux avec (C) et, Ord (C) = Ord (B). Les lemmes ci-dessus donnent les

II. THÉOR. – Si (A) est un b. o. ne possédant pas de maximum, alors il existe un b. o. d. et sous-chaîne de (A) qui est confinale avec (A).

III. THÉOR. – Si (M) est une chaîne sans élément maximum, alors il existe une sous-chaîne (A) de (M) qui est un bon ordre distingué et confinal avec (M).

7. DIVISEUR DES CARDINAUX INFINIS. – Il peut se faire qu'un b. o. d. (A) possède une sous-chaîne (B) qui soit un b. o. d. confinal avec (A) et tel que Ord (B) $<$ Ord (A). Dans ce cas nous dirons que Ord (B) est un *diviseur* de Ord (A). Le même terme sera employé pour les cardinaux correspondants. Si un n. o. d. α ne possède pas de diviseurs, il sera appelé *prime* [10], ainsi que Card α. Le b. o. naturel composé de tous les cardinaux [11] peut être écrit $\aleph_0 = \aleph(0), \aleph(1), \cdots, \aleph(\lambda), \cdots$, où λ est un n. o. variable. $\aleph(0), \aleph(n)$ où $n = 1, 2, \cdots$ sont primes; $\aleph(\omega)$ est divisible par $\aleph(0)$. Si p, q, r sont des cardinaux infinis, q est un diviseur de p et, r un diviseur de q, alors r est un diviseur de p. Si q, r sont des diviseurs de p et $q < r$, alors q est un diviseur de r. Le cardinal $\aleph(\alpha + 1)$ est toujours prime quelque soit le n. o. $\alpha \geqq 0$. Le cardinal p s'appelle *inaccessible* s'il est 1) un cardinal limite, et 2), si p ne peut pas être représenté comme la somme de moins de p cardinaux dont chacun soit $< p$. Si α est un n. o. limite, $\aleph(\alpha)$ est inaccessible si et seulement si Card $\alpha = \aleph(\alpha)$. Le cardinal $\aleph(0)$ est inaccessible [12].

IV. THÉOR. – Un cardinal infini est prime si et seulement s'il est inaccessible ou bien s'il possède la forme $\aleph(\alpha + 1)$ où $\alpha \geqq 0$ est un nombre ordinal.

V. THÉOR. – Si α est un ordinal limite, α est distingué et prime si et seulement si la condition suivante est satisfaite [13]; Si $\alpha' < \alpha$, $\alpha' > 1$ et, si $f(x)$ est une application de l'ensemble $\{ x \mid x \geqq 1, x < \alpha' \}$ dans l'ensemble des n. o. telle que $f(x) < \alpha$ pour tout $x \in \mathfrak{C}f$, alors $\sup_{x < \alpha'} f(x) < \alpha$.

Il y a des possibilités logiques d'existence d'un cardinal qui possède une infinité non denombrable de diviseurs.

(10) « Régulier », voir note (8), HAUSDORFF.

(11) Nous ne sommes pas interessé ici dans la démonstration de l'existence de n. c. très hauts, mais nous nous contentons de les traîter comme des possibilités logiques. Nous référons à HAUSDORFF (voir note (8)) et aux plusieurs travaux de A. TARSKI et W. SIERPIŃSKI, p. ex. « Fund. Math. », Vol. 5, 7, 15, 16, 18, et 19 et aux d'autres travaux y cités.

(12) On ne sait pas, jusqu'à présent s'il existe un cardinal inaccessible et $> \aleph(0)$. (vois note (11). Peut-être cette existence constitut un nouvel axiome de logique?

(13) L. W. COHEN et CASPER GOFFMAN, *A theory of transfinite convergence*, « Trans. Am. Math. Soc. », Vol. 66, pp. 65–74 (1949). *The topology of ordered abelian group*. Ibid., Vol. 67, pp. 310–319 (1949). *On completeness in sense of Archimedes*, « Amer. Journ. of Math. », Vol. 72, pp. 747–751 (1950). Les n. o. utilisès par ces auteurs coïncide avec les n. o. d. primes.

VI. Théor. – Si (M) est une chaîne sans élément maximum, alors il existe un n. o. d. prime unique α, telle qu'il existe une sous–chaîne (A) de (M) qui est confinale avec (M) et qui est un b. o. tel que Ord (A) = α. Nous appelons Card α *prime cardinal de confinalité de* (M).

8. Cantorisation généralisée de corps algébriques. – Soit (F) un corps algébrique[14] abstrait, (V) un corps algébrique linéairement ordonné et, (L) une chaîne. Les éléments de F, V, L, seront désigné par des majuscules, minuscules romaines et minuscules grecques et, appelés *quantités*, *valeurs* et *indices* respectivement. Soit $|A|$ une application de F dans V assujettie aux conditions suivantes: 1°. Si $A \neq 0$, on a $|A| > 0$; 2°. $|0| = 0$; $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$; $|A + B| \leq |A| + |B|$. $|A|$ sera appelé *valuation sur* (F). Par une L–*suite de quantités* nous comprendrons une fonction $A(\alpha) = \{A_\alpha\}$ qui constitue une application de L dans F. Une L–suite $\{A_\alpha\}$ s'appelle *fondamentale* si pour tout $e > 0$ il existe α_0 tel que $\alpha' \geq \alpha_0$, $\alpha'' \geq \alpha_0$ entraine $|A(\alpha') - A(\alpha'')| \leq e$. On l'appelle *suite nulle* lorsque pour tout $e > 0$ il existe α_0 tel que $\alpha \geq \alpha_0$ entraîne $|A(\alpha)| \leq e$. Nous allons considérer l'extension[15] de (F) au moyen de telles suites fondamentales qui, évidemment, généralisent les suites fondamentales ordinaires de Cauchy. La théorie est semblable à celle des suites fondamentales ordinaires. On définit la somme de deux L–suites fondamentales et, leurs produit d'une manière usuelle et, on en obtient un anneau. L'anneau quotient modulo l'idéal, composé de toutes les L–suites nulles, est un corps algébrique (F*) contenant une partie qui est opérations–isomorphe à (F)[16] (F*) sera appelé (V)–(L)–*extension de* (F).

9. Soit (A) un b. o. d. et prime qui est, en même temps, une sous–chaîne de (L) et confinale avec (L), (qui est supposé de n'avoir pas de maximum). Soit (F_1^*) la (V)–(A)–extension de (F). Nous avons prouvé que (F*) et (F_1^*) sont opérations–isomorphes. Si (L'), (L'') ont le même prime cardinal de confinalité, les extensions (V')–(L) et (V'')–(L) de (F) sont isomorphes. Dans le cas trivial où (L) possède le maximum, (F*) est isomorphe à (F). D'après ce qui précède, on voit quel'on obtient tous les exten-

(14) Voir p. ex. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 Aufl. Berlin (1937).

(15) Des extensions spéciales par un procédé de Cantor (généralisé) étaient étudiés par K. Mahler, « Acta Mathem. », Vol. 66 (1936). MM. Cohen et Goffman (voir Note (13)) ont étudié le cas où (L) est un b. o. distingué et prime.

(16) Remarquons que si nous supposons que (V) est un groupe abélien général, linéairement ordonné et, si nous considérons sur (F) les valuations (non archimédiennes) de Krull, les démonstrations de tous les lemmes nécessaires pour le procédé d'extension seront même plus simples. Nous avons aperçu qu'une modification de détails permet de traîter des cantorisations dans le cas où (F) est un anneau. Concernant des informations sur les valuations générales – qui d'ailleurs ne sont que des « valeurs absolues » généralisées–nous reférons à V. der Waerden (voir Note (14)) et a W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, « Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik », (Crelle), Vol. 167, pp. 100–169 (1932).

sions de (F) possibles, à une isomorphie près, si l'on se borne au cas où (L) est un b. o. d. et prime. Appelons une (L)–suite $\{A_\alpha\}$ *triviale* s'il existe un indice α_0 tel que pour $\alpha \geqq \alpha_0$ la quantité A_α est constante. La condition nécessaire et suffisante pour que toute L–suite fondamentale soit triviale est que toute (L)–suite nulle soit triviale.

VII. THÉOR. – Soit (V) sans élément maximum et soit Φ le prime cardinal de confinalité de (V). Si (L) est un b. o. d. et prime, Card (L) $\neq \Phi$, alors toute L–suite fondamentale de la (V)–(L)–cantorisation de (F) sont triviales.

VIII. THÉOR. – Si, dans les mêmes conditions, Card (L) $= \Phi$, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une (L)–suite fondamentale qui ne soit pas triviale, est que pour tous $e > 0$ où $e \in V$, il existe $A \in F$ tel que $0 < |A| < e$.

Analisi matematica. — *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine.* Nota II di SILVIO CINQUINI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

La dimostrazione del teorema di unicità della Nota I (**) è basata sul seguente lemma, il quale, anche indipendentemente dall'applicazione di cui forma oggetto, merita di essere esplicitamente rilevato.

5. LEMMA. – *Sia* $L(x)$ *una funzione quasi continua, integrabile e non negativa nell'intervallo* $(0, a_0)$ *(con* $a_0 > 0$*) siano* b_1, b_2 *due numeri reali con* $b_1 < b_2$ *e sia* a *il massimo valore non superiore ad* a_0*, tale che, per ogni* x *con* $0 \leqq x < a$*, sia verificata la disuguaglianza*

$$\int_0^x L(u)\,du < \frac{b_2 - b_1}{2},$$

e si consideri il campo D *definito dalle disuguaglianze*

$$D: \qquad 0 \leqq x \leqq a \quad , \quad b_1 + \int_0^x L(u)\,du \leqq y \leqq b_2 - \int_0^x L(u)\,du .$$

Siano $z_1(x, y), \cdots, z_r(x, y)$ *r funzioni ognuna delle quali nel campo* D: 1° *è continua assieme alla propria derivata parziale del primo ordine rispetto a* y; 2° *per ogni* y *fissato è funzione assolutamente continua della sola* x; *e si supponga che per tutti gli* y *dell'intervallo* (b_1, b_2) *sia*

$$z_j(0, y) = 0, \qquad (j = 1, 2, \cdots, r). \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(**) Vedi questi « Rendiconti », questo volume, pp. 188–191.

Siano $H_{j,i}(x)$, $(j, i = 1, 2, \cdots, r)$ r^2 *funzioni quasi continue, integrabili e non negative in* $(0, a)$ *in modo che, su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse* x, *siano verificate, per quasi tutti gli* x, *le disuguaglianze*

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial z_j(x,y)}{\partial x}\right| \leq \sum_{i=1}^{r} H_{j,i}(x)\,|z_i(x,y)| + L(x)\left|\frac{\partial z_j(x,y)}{\partial y}\right|, \qquad (j=1,2,\cdots,r).$$

Allora risulta

$$(6) \qquad z_j(x,y) = 0, \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

in tutti i punti (x, y) *del campo* D.

a) Per provare il lemma enunciato, fissiamo un numero positivo $a' \leq a$, in modo che siano verificate le disuguaglianze

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{r}{}' e^{\int_0^{a'} H_{j,j}(x)\,dx} \int_0^{a'} H_{j,i}(x)\,dx < 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

ove, qui e nel seguito, con la scrittura Σ' si deve intendere che nella sommatoria va omesso il termine $j = i$; e cominciamo a dimostrare che le (6) hanno luogo in tutto il campo

$$D': \qquad 0 \leq x \leq a' \quad , \quad b_1 + \int_0^x L(u)\,du \leq y \leq b_2 - \int_0^x L(u)\,du.$$

b) A tal uopo, procediamo in modo del tutto analogo al n. 7, *a*) della Memoria A. M. [6], considerando un numero $\lambda > 0$, il campo D_λ e le successioni di numeri μ_n, $(n = 1, 2, \cdots)$, λ_n, $(n = 1, 2, \cdots)$ soddisfacenti alle condizioni del luogo citato, intendendosi che, in ogni intervallo appartenente al campo D', parallelo all'asse x e avente ampiezza non superiore a λ_n, la oscillazione di ciascuna delle funzioni $z_j(x, y)$, $\frac{\partial z_j(x,y)}{\partial y}$, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ risulti non superiore a μ_n; e per $j = 1, 2, \cdots, r$ poniamo

$$z_{j,n}(x,y) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} z_j(x+t, y)\,dt, \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Ricordiamo (cfr. luogo citato) che ogni funzione $z_{j,n}(x, y)$ risulta continua, insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine, nel campo D', e che dalle (5) seguono le disuguaglianze $(j = 1, 2, \cdots, r;\ n = 1, 2, \cdots)$

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial z_{j,n}(x,y)}{\partial x}\right| \leq \sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(x)\,|z_{i,n}(x,y)| + L_n(x)\left|\frac{\partial z_{j,n}(x,y)}{\partial y}\right| +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(x) + L_n(x)\right]\mu_n.$$

(6) Vedi citazione in (1) della Nota I.

ove si è posto

$$H_{j,i,n}(x) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} H_{j,i}(x+t)\,dt \quad , \quad L_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} L(x+t)\,dt .$$

Chiamato a'_n il massimo valore di x non superiore ad a', e tale che, per $0 \leqq x < a'_n$, risulti

$$\int_0^x L_n(u)\,du < \frac{b_2 - b_1}{2} - \mu_n$$

e considerato il campo D'_n definito dalle disuguaglianze

$$D'_n: \quad 0 \leqq x \leqq a'_n \quad , \quad b_1 + \mu_n + \int_0^x L_n(u)\,du \leqq y \leqq b_2 - \mu_n - \int_0^x L_n(u)\,du,$$

ricordiamo che ogni punto di D'_n appartiene a D' e che, per $n \to +\infty$, il campo D'_n tende a D'.

c) Per $i = 1, 2, \cdots, r$; $n = 1, 2, \cdots$ chiamiamo $M_{i,n}$ il massimo del valore assoluto della funzione $z_{i,n}(x, y)$ nel campo D'_n, osservando che dalla (8) segue in modo ovvio la disuguaglianza (valida in D'_n)

$$\left|\frac{\partial z_{j,n}(x,y)}{\partial x}\right| \leqq H_{j,j,n}(x)\,|z_{j,n}(x,y)| + L_n(x)\left|\frac{\partial z_{j,n}(x,y)}{\partial y}\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} H_{j,i,n}(x) + \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(x) + L_n(x)\right]\mu_n ,$$

ove, qui e nel seguito, con la scrittura Σ^* si deve intendere che nella sommatoria va omesso il termine $i = j$.

Consideriamo per $x \geqq 0$ l'equazione differenziale ordinaria

$$v'_{j,n}(x) = H_{j,j,n}(x)\,v_{j,n}(x) + \sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} H_{j,i,n}(x) + \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(x) + L_n(x) + 1\right]\mu_n$$

nella funzione incognita $V_{j,n}(x)$, e nel suo integrale generale attribuiamo alla costante arbitraria il valore μ_n; procedendo in modo anche più rapido del n. 7, *b*) della Memoria A. M., possiamo concludere che in tutto il campo D'_n risulta.

$$|z_{j,n}(x,y)| \leqq \int_0^x \left[\sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} H_{j,i,n}(u)\right] e^{\int_u^x H_{j,j,n}(w)\,dw}\,du +$$

$$+ \left\{\int_0^x \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(u) + L_n(u) + 1\right] e^{\int_u^x H_{j,j,n}(w)\,dw}\,du + e^{\int_0^x H_{j,j,n}(w)\,dw}\right\}\mu_n ,$$

da cui, tenendo presente che, in corrispondenza a ogni coppia di numeri j, n ($j = 1, 2, \cdots, r$; $n = 1, 2, \cdots$), esiste almeno un punto $(x_{j,n}, y_{j,n})$

del campo D'_n, nel quale vale l'uguaglianza $|z_{j,n}(x_{j,n}, y_{j,n})| = M_{j,n}$, segue evidentemente

$$M_{j,n} \leq \int_0^{x_{j,n}} \left[\sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} H_{j,i,n}(u) \right] e^{\int_u^{x_{j,n}} H_{j,j,n}(w)\, dw} du +$$

$$+ \left\{ \int_0^{x_{j,n}} \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(u) + L_n(u) + 1 \right] e^{\int_u^{x_{j,n}} H_{j,j,n}(w)\, dw} du + e^{\int_0^{x_{j,n}} H_{j,j,n}(w)\, dw} \right\} \mu_n ,$$

e quindi anche, a maggior ragione,

$$M_{j,n} \leq e^{\int_0^{a'_n} H_{j,j,n}(w)\, dw} \int_0^{a'_n} \left[\sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} H_{j,i,n}(u) \right] du +$$

$$+ e^{\int_0^{a'_n} H_{j,j,n}(w)\, dw} \left\{ \int_0^{a'_n} \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i,n}(u) + L_n(u) + 1 \right] du + 1 \right\} \mu_n .$$

Infine, essendo ovviamente [7],

$$\int_0^{a'_n} H_{j,i,n}(u)\, du \leq \int_0^{a'_n} H_{j,i}(u)\, du \leq \int_0^{a'} H_{j,i}(u)\, du ,$$

$$\int_0^{a'_n} L_n(u)\, du \leq \int_0^{a'_n} L(u)\, du \leq \int_0^{a'} L(u)\, du ,$$

si ottiene per $j = 1, 2, \cdots, r$

$$M_{j,n} \leq e^{\int_0^{a'} H_{j,j}(x)\, dx} \sum_{i=1}^{r}{}^{*} M_{i,n} \int_0^{a'} H_{j,i}(x)\, dx +$$

$$+ e^{\int_0^{a'} H_{j,j}(x)\, dx} \left\{ \int_0^{a'} \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i}(x) + L(x) + 1 \right] dx + 1 \right\} \mu_n .$$

Sommando membro a membro rispetto a j da 1 a r e scambiando tra loro le due somme che figurano nel primo termine del secondo membro, risulta

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{r} M_{j,n} \leq \sum_{i=1}^{r} M_{i,n} \sum_{j=1}^{r}{}' e^{\int_0^{a'} H_{j,j}(x)\, dx} \int_0^{a'} H_{j,i}(x)\, dx + \Delta' \mu_n ,$$

(7) Cfr. le (26) e (24) della Memoria A. M.

ove si è posto

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{r} e^{\int_0^{a'} H_{j,j}(x)\,dx} \left\{ \int_0^{a'} \left[\sum_{i=1}^{r} H_{j,i}(x) + L(x) + 1 \right] dx + 1 \right\};$$

e dalla (9), indicata con ω' la maggiore delle r somme che figurano nei primi membri delle (7), segue

$$\sum_{j=1}^{r} M_{j,n} \leq \frac{\Delta'}{1-\omega'} \mu_n . \tag{10}$$

d') Usufruendo della (10) dimostriamo facilmente che in ogni punto interno a D' hanno luogo le (6).

Infatti, se esistessero almeno un punto (x_0, y_0) interno a D' e almeno un intero positivo $\nu \leq r$ con $z_\nu(x_0, y_0) \neq 0$, sia n_0 il minimo intero positivo, per il quale è verificata la disuguaglianza

$$\frac{\Delta'}{1-\omega'} \mu_{n_0} < \frac{|z_\nu(x_0, y_0)|}{2},$$

e n_0' un intero non inferiore a n_0 in modo che, per ogni $n > n_0'$, (x_0, y_0) appartenga a D_n'.

Allora, siccome (Memoria A. M., n. 7, *a*)) la successione $\mu_n, (n = 1, 2, \cdots)$ è decrescente, per ogni intero $n > n_0'$ risulta

$$|z_{\nu,n}(x_0, y_0)| \leq M_{\nu,n} \leq \sum_{j=1}^{r} M_{j,n} \leq \frac{\Delta'}{1-\omega'} \mu_n < \frac{\Delta'}{1-\omega'} \mu_{n_0} < \frac{|z_\nu(x_0, y_0)|}{2},$$

contrariamente al fatto che, per $n \to \infty$, ogni successione $z_{j,n}(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ converge rispettivamente verso $z_j(x, y)$ in ogni punto interno a D'.

Le (6) sono, così, stabilite in ogni punto interno a D' e siccome ogni punto della frontiera di D' è punto di accumulazione di punti interni a D', per la continuità delle funzioni $z_j(x, y)$, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ ne segue che le (6) sono verificate in tutto D'.

e) Se è $a' = a$, il lemma enunciato è completamente dimostrato; altrimenti teniamo presente che, per quanto abbiamo provato in *d'*), risulta

$$z_j(a', y) = 0, \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

per

$$b_1 + \int_0^{a'} L(u)\,du \leq y \leq b_2 - \int_0^{a'} L(u)\,du.$$

Allora, fissato un numero a'' con $a' < a'' \leq a$ in modo che siano verificate le disuguaglianze

$$\sum_{j=1}^{r} e^{\int_{a'}^{a''} H_{j,j}(x)\,dx} \int_{a'}^{a''} H_{j,i}(x)\,dx < 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

ripetendo il ragionamento sviluppato nei precedenti capoversi dimostriamo che le (6) sono verificate anche in tutto il campo

$$a' \leqq x \leqq a'' \quad , \quad b_1 + \int_0^x L(u)\,du \leqq y \leqq b_2 - \int_0^x L(u)\,du .$$

Se è $a'' = a$, il nostro asserto è provato in tutta la sua generalità.

Altrimenti proseguiamo in modo analogo, rilevando che per stabilire le (6) in tutto il campo D basta ripetere un numero finito di volte il procedimento sviluppato nei precedenti capoversi.

Ciò è evidente: infatti, considerata una funzione $H(x)$ quasi continua e integrabile sull'intervallo $(0, a)$ e tale che in questo intervallo siano verificate le disuguaglianze

$$H_{j,i}(x) \leqq H(x), \qquad (j, i = 1, 2, \cdots, r),$$

possiamo suddividere l'intervallo $(0, a)$ in un numero finito di parti (a_{s-1}, a_s) $(s = 1, 2, \cdots, t \; ; \; a_0 \equiv 0 \, , \, a_t \equiv a)$ in modo che sia

$$\int_{a_{s-1}}^{a_s} H(x)\,dx < \frac{1}{r-1} e^{-\int_0^a H(x)\,dx} , \qquad (s = 1, 2, \cdots, t),$$

e ne segue in modo ovvio per $s = 1, 2, \cdots, t \; ; \; i = 1, 2, \cdots, r$

$$\sum_{j=1}^{r}{}' e^{\int_0^{a_{s-1}} H_{j,j}(x)\,dx} \int_{a_{s-1}}^{a_s} H_{j,i}(x)\,dx \leqq e^{\int_0^a H(x)\,dx} \sum_{j=1}^{r}{}' \int_{a_{s-1}}^{a_s} H(x)\,dx =$$

$$= (r-1)\, e^{\int_0^a H(x)\,dx} \int_{a_{s-1}}^{a_s} H(x)\,dx < 1 ,$$

vale a dire su ogni intervallo (a_{s-1}, a_s), $(s = 1, 2, \cdots, t)$ sono verificate le anologhe delle (7).

6. Osservazione. – È da rilevare che nel caso particolare $r = 1$, le disuguaglianze (7) del n. 5, *a*) sono automaticamente soddisfatte e quindi il campo D′ coincide con D; cioè la dimostrazione del lemma del numero precedente contiene, come caso particolare, quella del n. 7 della Memoria A. M.

Analisi matematica. — *A proposito di un problema isoperimetrico* (*). Nota di CARLO PUCCI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Considerando la questione, assai complessa, della forma che deve avere la carena di una nave affinché questa si muova con il minimo attrito, il professore Picone ha proposto la seguente ricerca allo scopo di ottenere qualche risultato indicativo: fra tutte le navi di assegnata stazza e coperta, con sezioni orizzontali simili fra di loro, determinare, se esiste, quella di minima superficie.

La ricerca risulta semplificata dalla preliminare risoluzione di quest'altro problema isoperimetrico: fra tutti i domini dello spazio dotati di un piano verticale di simmetria, di sezioni orizzontali simili ad un prefissato dominio piano semplicemente connesso e con frontiera rettificabile, che hanno superficie quadrabile secondo Lebesgue e volume assegnato, determinare, se esiste, il dominio di superficie con area minima.

In una Memoria di prossima pubblicazione è provata l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di tali problemi, la loro determinazione numerica essendo ricondotta al calcolo della soluzione di un problema di Cauchy relativo ad un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Il dominio minimante D del secondo problema ha la seguente notevole proprietà: indicando con σ ed L l'area ed il perimetro della sezione orizzontale massima di D è

$$3\,\mathrm{L}\ \text{volume di}\ \mathrm{D} = 2\sigma\ \text{area di}\ \mathfrak{F}\,\mathrm{D}\ (1).$$

La dimostrazione si basa su un procedimento che sembra applicabile allo studio di altri problemi variazionali e pertanto ne diamo un breve cenno.

Sia Γ uno spazio metrico, F un funzionale semicontinuo inferiormente su Γ. Sia Γ_q, $q = 1, 2, \cdots$, un insieme compatto e chiuso su Γ, $\Gamma_q \subset \Gamma_{q+1}$; la successione $\{\Gamma_q\}$ sia inoltre completa in Γ rispetto al funzionale F, cioè fissato un elemento x di Γ e un numero positivo ε esista un indice q e un elemento y di Γ_q tale che

$$|\,\mathrm{F}[x] - \mathrm{F}[y]\,| < \varepsilon.$$

Indichiamo con X_q l'insieme degli elementi minimanti F in Γ_q; per le ipotesi fatte X_q non è vuoto. Se esiste in Γ un elemento x_0 di compattezza per la successione $\{\mathrm{X}_q\}$ (2) allora esso è minimante F in Γ.

Illustriamo il procedimento in un caso particolarmente semplice.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) A tale relazione soddisfa la sfera che è il dominio minimante nel caso che le sezioni orizzontali siano cerchi.

(2) Per la definizione di elemento di compattezza M. PICONE, *Due conferenze sui fondamenti del calcolo delle variazioni*, « Giorn. Mat. Batt. », IV, 80, p. 56 (1950).

Sia Γ l'insieme delle funzioni $x(t)$ assolutamente continue nell'intervallo $(0, 1)$, con $x(0) = x(1) = 0$. In Γ risulta definito il funzionale

$$F[x] = \int_0^1 f[t, x(t), x'(t)]\, dt$$

ove f è una assegnata funzione continua del punto (t, x, x'), uniformemente lipschitziana in x, x'. Consideriamo in Γ la metrica lagrangiana di ordine zero, cioè la distanza di due funzioni sia data dall'estremo superiore del modulo della differenza. Supponiamo F semicontinuo inferiormente. Indicato con Γ_q, $q = 1, 2, \cdots$, l'insieme delle funzioni di Γ che soddisfano alla limitazione

$$|x'(t)| \leq q \text{ quasi ovunque in } (0, 1),$$

l'insieme Γ_q è compatto e chiuso su Γ e si prova facilmente che la successione $\{\Gamma_q\}$ è completa in Γ rispetto al funzionale F. Quindi l'esistenza di una funzione $x(t)$ minimante F in Γ è assicurata se si prova l'esistenza in Γ di un elemento di compattezza per la successione $\{X_q\}$. Le funzioni $x_q(t)$ minimanti F in Γ_q possono essere determinate con le usuali considerazioni variazionali e nei tratti nei quali l'estremante $x_q(t)$ è di frontiera essa risulta funzione lineare di t; pertanto può risultare facile provare la compattezza di $\{X_q\}$.

Un altro punto della dimostrazione contenuta nella Memoria già indicata sembra estensibile a vari problemi isoperimetrici. Esso riguarda la determinazione del moltiplicatore di Lagrange.

Sia Γ una classe di domini dello spazio ordinario tale che una qualsivoglia omotetia con centro in un punto fissato trasformi un dominio di Γ in un altro dominio della stessa classe. Indicati con V ed S il volume e l'area secondo Lebesgue della superficie di un dominio di Γ, il funzionale S^3/V^2 è ovviamente invariante rispetto alle omotetie. Allora la ricerca di un dominio D_0 di Γ di volume V assegnato e superficie con area minima è equivalente alla ricerca del dominio D_1 di Γ che minimizza il funzionale S^3/V^2. Infatti se esiste D_0 esiste anche D_1 che è un qualsiasi dominio ottenuto da D_0 mediante una omotetia, e se esiste D_1 esiste anche D_0 che si ottiene da D_1 mediante una opportuna omotetia.

Se esiste il dominio minimante D_1 ed esso risulta interno ad una schiera di domini di Γ, per la sua variazione prima abbiamo

$$\delta \frac{S^3}{V^2} = 0, \quad \text{cioè} \quad 3V\delta S - 2S\delta V = 0.$$

Si ottiene così un'equazione differenziale nella quale il moltiplicatore di Lagrange è esplicitamente determinato, risultando uguale a $-2S/3V$ con V ed S volume ed area della superficie del dominio minimante.

Tali considerazioni possono essere estese a funzionali più generali della superficie e del volume e, ovviamente, per spazi a un qualsiasi numero di dimensioni.

Teoria dei numeri. — *Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi.* Nota II di GIOVANNI RICCI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

4. Per dimostrare i Teoremi I, II e III basta dimostrare la proposizione seguente della quale essi sono facile conseguenza (4).

LEMMA. – *Fissati due numeri reali* ε *e* δ *tali che*

$$(4.1) \qquad 0 < \varepsilon < 1 \quad , \quad \varepsilon < H/(2\mathcal{C}) \quad , \quad 0 < \delta < 1/2$$

è possibile determinare due altri numeri reali A *e* ρ

$$(4.2) \qquad 0 \leqq A \leqq 1 - H/\mathcal{C} \quad , \quad 0 < \rho < 1$$

e una successione $\{\xi_s\}$ *crescente e divergente a* $+\infty$ ($\xi_s < \xi_{s+1}$, $\xi_s \to +\infty$) *tali che considerando gli indici interi n' che verificano le condizioni*

$$(4.3') \qquad (1-\delta)^2 \xi_s < p_{n'} \leqq (1-\delta)\xi_s \ , \ p_{n'+1} - p_{n'} > (A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln p_{n'}$$

e gli indici interi n'' che verificano le condizioni

$$(4.3'') \qquad (1-\delta)\xi_s < p_{n''} \leqq \xi_s \quad , \quad p_{n''+1} - p_{n''} < (A + \varepsilon) \ln p_{n''} \ ,$$

tanto il numero degli indici n' quanto quello degli n'' ambedue superano, per s abbastanza grande, l'espressione

$$(4.4) \qquad \rho\delta\xi_s/\ln \xi_s \ .$$

Osservazione. – Il numero degli interi primi non superiori a ξ_s è $\pi(\xi_s) \sim \xi_s/\ln \xi_s$ e ne segue facilmente che il numero degli interi primi dell'intervallo $(1-\delta)\xi_s < p \leqq \xi_s$ è $\sim \delta\xi_s/\ln \xi_s$, e dell'intervallo $(1-\delta)^2 \xi_s < p < (1-\delta)\xi_s$ è $\sim \delta(1-\delta)\xi_s/\ln \xi_s$. L'espressione (4.4) che dà un confine inferiore della numerosità degli n' e degli n'', con $\rho = 0$ fisso, ci garantisce che la successione degli indici n' costruita accanto alla $\{\xi_s\}$ non ha densità asintotica nulla; lo stesso vale per la successione degli indici n''.

Supporremo nel seguito $\xi_s < (1-\delta)^2 \xi_{s+1}$ in guisa che gli intervalli riguadanti le (4.3) non si sovrappongano: eventualmente si diraderà ξ_s.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(4) Fissato $0 < \delta \leqq 1$, risulta $H \leqq \mathcal{C} \leqq 16\,H$; vedi G. RICCI, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, «Rivista di Matematica d. Università di Parma» (in corso di pubblicazione). Vedi in particolare il Teorema IX, da cui $H \leqq C_\delta(0,2) \leqq \mathcal{C}$.

5. Il Teorema II segue immediatamente dal Lemma enunciato; infatti se

$$p_{n+1} - p_n \sim (\alpha \log p_n \ , \ \beta \log p_n) \ (0 \leqq \alpha < \beta \leqq + \infty)$$

ricordando la definizione del pennello di quasi–asintoticità e la numerosità per lo meno (4.4) degli indici n' e n'' che soddisfano alle condizioni (4.3) (vedi *Osservazione* del numero precedente) deve essere necessariamente

$$\alpha - \varepsilon < A + \varepsilon \quad , \quad \beta + \varepsilon > A + 2\,H/\mathcal{C} - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ seguono le (3.2).

6. Veniamo a dimostrare il Teorema I e procediamo per assurdo. La relazione $p_{n+1} - p_n \sim \psi(n)$ significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, la successione (dipendente da ε) degli interi n^* pei quali vale la limitazione

$$(6.1) \qquad (1 - \varepsilon)\,\psi(n) < p_{n+1} - p_n < (1 + \varepsilon)\,\psi(n)$$

ha densità asintotica uno e la sua complementare ha densità asintotica nulla.

Assumiamo $0 < \varepsilon < H/(2\,\mathcal{C})$ in guisa da soddisfare alle condizioni del Lemma e consideriamo la successione $\{\xi_s\}$ colà costruita e, accanto ad essa, la successione degli indici n' e quella degli indici n''.

Poiché la successione degli indici n' non è a densità asintotica nulla esistono infiniti n' che sono n^*; anzi, fra gli almeno $\rho\delta\,\xi_s/\ln \xi_s$ indici di tipo n', contenuti nell'intervallo $(1 - \delta)^2\,\xi_s < p_n \leqq (1 - \delta)\,\xi_s$, ne esistono alcuni che sono n^*, quando s è abbastanza grande. L'osservazione analoga vale per gli indici del tipo n'' contenuti nell'intervallo $(1 - \delta)\,\xi_s < p_n \leqq \xi_s$.

Dunque, per $s \geqq s_0$ conveniente, esiste almeno un n' e almeno un n'' pei quali sono verificate le (6.1): per tali indici abbiamo

$$\begin{cases} (A + 2\,H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln p_{n'} < p_{n'+1} - p_{n'} < (1 + \varepsilon)\,\psi(n') \\ (1 - \varepsilon)\,\psi(n'') < p_{n''+1} - p_{n''} < (A + \varepsilon) \ln p_{n''}. \end{cases}$$

Tenendo conto degli estremi degli intervalli dove sono contenuti $p_{n'}$ e $p_{n''}$ abbiamo, a maggior ragione

$$(6.2) \qquad \begin{cases} (A + 2\,H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln ((1 - \delta)^2 \cdot \xi_s) < (1 + \varepsilon)\,\psi(n') \\ (1 - \varepsilon)\,\psi(n'') < (A + \varepsilon) \ln \xi_s. \end{cases}$$

La funzione $\psi(n)$ è monotona: la prima di queste disuguaglianze ci dice che $\psi(n)$ non si può mantenere limitata e quindi $\psi(n)$ è non decrescente e $\psi(n) \to + \infty$. Essendo $n' < n''$ è anche $\psi(n') \leqq \psi(n'')$ e pertanto

$$(6.3) \qquad (1 - \varepsilon)(A + 2\,H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln ((1 - \delta)^2 \cdot \xi_s) < (1 + \varepsilon)(A + \varepsilon) \ln \xi_s.$$

Adesso osserviamo che $\ln ((1 - \delta)^2\,\xi_s) \sim \ln \xi_s$, $2\,H/\mathcal{C} \geqq 1/8$ e inoltre $\varepsilon > 0$ può essere assunto piccolo a piacere; quando si assuma $\varepsilon < 1/8$ la disuguaglianza (6.3) è assurda per s abbastanza grande.

Il Teorema I risulta così dimostrato.

7. Veniamo a dimostrare il Teorema III, che generalizza sia il Teorema I che il Teorema II. La relazione (3.4) significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, la successione (dipendente da ε) degli interi n^* pei quali vale la limitazione

$$(7.1) \qquad (1-\varepsilon)\,\psi_1(n) < p_{n+1} - p_n < (1+\varepsilon)\,\psi_2(n)$$

ha densità asintotica 1.

Assumendo $0 < \varepsilon < H/(2\mathcal{C})$, con un'osservazione analoga a quella del n. 6, si vede che per $s \geqq s_0$ conveniente, esiste almeno un indice di tipo n' e almeno un indice di tipo n'' pei quali sono verificate le (7.1): per tali indici abbiamo

$$(7.2) \qquad \begin{cases} (A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon)\ln p_{n'} < p_{n'+1} - p_{n'} < (1+\varepsilon)\,\psi_2(n') \\ (1-\varepsilon)\,\psi_1(n'') < p_{n''+1} - p_{n''} < (A+\varepsilon)\ln p_{n''} \end{cases}$$

e, a maggior ragione, essendo $(1-\delta)^2\,\xi_s < p_{n'} < p_{n''} < \xi_s$:

$$(7.3) \qquad \begin{cases} (A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon)\ln((1-\delta)^2\,\xi_s) < (1+\varepsilon)\,\psi_2(n') \\ (1-\varepsilon)\,\psi_1(n'') < (A+\varepsilon)\ln\xi_s\,. \end{cases}$$

La seconda delle (7.2) è soddisfatta da infiniti indici n e quindi per la prima delle (4.2) è

$$\liminf_{n\to+\infty} \psi_1(n)/\ln p_n \leqq (A+\varepsilon)/(1-\varepsilon) \leqq (1 - H/\mathcal{C} + \varepsilon)/(1-\varepsilon)\,;$$

per la arbitrarietà di ε segue la (3.5).

La prima delle (7.3) ci dice che $\psi_2(n)$ non è limitata; essendo $\psi_2(n)$ monotona essa risulta non decrescente e $\psi_2(n) \to +\infty$. Tenendo conto che $\psi_2(n') \leqq \psi_2(n'')$ e inoltre che $(1-\delta)\,\xi_s < p_{n''} \leqq \xi_s$, dalle (7.3) otteniamo a maggior ragione

$$(7.4) \qquad \begin{cases} (A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon)\ln((1-\delta)^2\,p_{n'}) < (1+\varepsilon)\,\psi_2(n'') \\ (1-\varepsilon)\,\psi_1(n'') < (A+\varepsilon)\ln(p_{n'}/(1-\delta)). \end{cases}$$

Essendo $\ln((1-\delta)^2\,p_{n''}) \sim \ln p_{n''}$, $\ln(p_{n''}/(1-\delta)) \sim \ln p_{n''}$, risulta

$$\psi_2(n'') - \psi_1(n'') > (2H/\mathcal{C} - \varepsilon_1)\ln p_{n''}\,,$$

dove $\varepsilon_1 = 2\varepsilon(1 + A + H/\mathcal{C})/(1-\varepsilon^2)$, pur di assumere s abbastanza grande. Per $s \to +\infty$ è anche $n'' \to +\infty$ e quindi, per l'arbitrarietà di ε, è dimostrata la (3.6).

8. Veniamo a dimostrare il Lemma enunciato al n. 4.

Sia $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda \leqq +\infty$. Denotiamo con

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\delta\mu\lambda) \equiv \mathbf{A}(\xi\,;\,\delta\mu\lambda)$$

il campo degli interi n (dipendente da quei quattro parametri) pei quali sono verificate le seguenti proprietà

$$\mu \ln p_n < p_{n+1} - p_n < \lambda \ln p_n \quad , \quad (1-\delta)\,\xi < p_n \leqq \xi\,:$$

(si tratta degli indici n degli interi primi di un intervallo di ampiezza $\delta\xi$, i quali presentano la differenza $p_{n+1} - p_n$ compresa entro confini prefissati). Denotiamo con $D_\delta(\xi ; \mu , \lambda)$ il numero di tali interi n, cioè poniamo

$$D_\delta(\xi ; \mu , \lambda) = \sum_{A(\delta\mu\gamma)} 1 .$$

È evidente il significato per $\mu = 0$ e per $\lambda = +\infty$.

In una nostra precedente ricerca abbiamo stabilito il seguente [5]

Teorema. – Se è verificata una almeno delle due disuguaglianze

$$1 - H/\mathcal{C} < \mu \quad , \quad \lambda < \mu + 2H/\mathcal{C} \tag{8.1}$$

allora

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; \mu , \lambda) \ln \xi/(\delta\xi) < 1 . \tag{8.2}$$

In particolare: per ogni $\varepsilon > 0$ *è*

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; 0 , 2H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln \xi/(\delta\xi) < 1 , \tag{8.3}$$

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; 1 - H/\mathcal{C} + \varepsilon , +\infty) \ln \xi/(\delta\xi) < 1. \tag{8.4}$$

Poiché, in forza del « Primzahlsatz » è evidentemente,

$$D_\delta(\xi ; 0 , +\infty) = D_\delta(\xi ; 0 , \mu) + D_\delta(\xi ; \mu , +\infty) \sim \delta\xi/\ln \xi , \tag{8.5}$$

dalla (8.4) si ricava che, per ogni $\varepsilon > 0$, quando $\mathcal{C} \geqq H$

$$\liminf_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; 0 , 1 - H/\mathcal{C} + \varepsilon) \ln \xi/(\delta\xi) > 0 . \tag{8.6}$$

Denotiamo con A l'estremo inferiore dei numeri positivi μ pei quali

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; 0 , \mu) \ln \xi/(\delta\xi) > 0 ;$$

per la (8.6) risulta evidentemente

$$0 \leqq A \leqq 1 - H/\mathcal{C} \tag{8.7}$$

e poniamo

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; 0 , A + \varepsilon) \ln \xi/(\delta\xi) = 2\rho_1 > 0 ;$$

(5) Vedi G. Ricci, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, « Rivista di Matematica d. Univ. di Parma » (in corso di pubblicazione). Vedi in particolare i Teoremi X e X *bis* (n. 2.4).

questo significa che $0 < \rho_1 \leqq 1/2$ e che esiste una successione $\{\xi_s\}$, crescente e divergente a $+\infty$, tale che per s abbastanza grande risulti

$$D_\delta(\xi_s ; 0 , A + \varepsilon) > \rho_1 \delta\xi_s/\ln \xi_s , \tag{8.8}$$

mentre, se A non è nullo si ha

$$D_\delta(\xi ; 0 , A - \varepsilon/2) = o(\delta\xi/\ln \xi) \quad , \quad \text{per } \xi \to +\infty . \tag{8.9}$$

(Nel caso in cui sia $A = 0$ in luogo di (8.9) si considera $D_\delta(\xi ; 0 , 0) = 0$.

Dalle (8.1) e (8.2) otteniamo, particolarizzando i valori di μ e λ [6]

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi ; A - \varepsilon/2 , A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon) \ln \xi/(\delta\xi) < 1$$

e questo lim sup resta < 1, a maggior ragione, quando $\xi \to +\infty$ lungo la successione $\{(1 - \delta)\xi_s\}$; $(1 - \delta)\xi_s \to +\infty$.

Poniamo

$$\limsup_{s \to +\infty} D_\delta((1 - \delta)\xi_s ; A - \varepsilon/2 , A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon) \cdot$$

$$\cdot \ln((1 - \delta)\xi_s)/(\delta(1 - \delta)\xi_s) = 1 - 3\rho_2 < 1$$

dove evidentemente $0 < \rho_2 \leqq 1/3$.

Adesso ricordiamo l'addittività della D_δ espressa dalla (8.5) e che il contributo di D_δ $((1-\delta)\xi_s ; 0, A - \varepsilon/2)$ è maggiorato in (8.9): ne segue

$$D_\delta((1 - \delta)\xi_s ; A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon , + \infty) > \rho_2 \delta\xi_s/\ln \xi_s . \tag{8.10}$$

(Osserviamo che

$$2\rho_2 \delta(1 - \delta)\xi_s/\ln((1 - \delta)\xi_s) \geqq \rho_2 \delta\xi_s/\ln \xi_s$$

tutte le volte che $2\delta(1 - \delta) \geqq \delta$ cioè per $\delta \leqq 1/2$).

La proposizione ausiliaria enunciata al n. 4 risulta dimostrata, poiché il numero A verifica (8.7) che è la prima di (4.2); assumiamo $\rho = \text{Min}(\rho_1 , \rho_2)$ e per successione $\{\xi_s\}$ quella costruita all'atto di soddisfare alla (8.8). Allora assumendo ε e δ soddisfacenti alle (4.1) il numero degli n' e quello degli n'' risultano rispettivamente

$$D_\delta((1 - \delta)\xi_s ; A + 2H/\mathcal{C} - \varepsilon , + \infty) > \rho\delta\xi_s/\ln \xi_s$$

$$D_\delta(\xi_s ; 0 , A + \varepsilon) > \rho\delta\xi_s/\ln \xi_s$$

e queste valutazioni al disotto sono assicurate rispettivamente da (8.10) e (8.8).

Dalla proposizione ausiliaria seguono i Teoremi I, II e III dimostrati ai nn. 5, 6 e 7.

(6) Nel caso $A = 0$ sostituiamo 0 in luogo di $A - \varepsilon/2$.

Astronomia. — *Determinazione dell'oscuramento al bordo del Sole, eseguita a Monte Mario durante l'eclisse del 30 giugno 1954.* Nota di Maria Antonietta Giannuzzi, presentata (*) dal Socio G. Armellini.

1. Durante l'eclisse di Sole del 30 giugno 1954, visibile come parziale a Roma, pensai di eseguire misure piroeliometriche della radiazione solare, allo scopo di tentare una determinazione dell'oscuramento al bordo del Sole, secondo il metodo proposto da W. H. Julius (1) per le eclissi totali di Sole ed applicato proficuamente dal prof. Cimino anche all'eclisse – visibile parzialmente a Roma – del 9 luglio 1945 (2).

Come è noto, il metodo di Julius si basa sul seguente procedimento. Si immagini di dividere la superficie del Sole in tante corone circolari e si chiami con x_i l'incognita radiazione proveniente dall'unità di superficie della zona di posto i; allora, se ad un certo istante t, il disco della luna avrà coperto parte delle corone 1, 2, $\cdots$, n, la diminuzione $\Delta(t)$ di radiazione sarà data da

$$\Delta(t) = a_1(t)\,x_1 + a_2(t)\,x_2 + \cdots a_n(t)\,x_n, \tag{1}$$

dove le a_i non sono altro che le frazioni delle suddette corone circolari eclissate nello stesso istante. Ma le a_i si possono ricavare, momento per momento, dal calcolo delle fasi dell'eclisse e le Δ dalle misure della radiazione effettuate; è quindi possibile di determinare le intensità x_i ed il loro modo di variare, man mano che si proceda dal centro verso il lembo dell'astro.

Il metodo di Julius permette così una determinazione dell'oscuramento al bordo solare, prescindendo dalla diffusione della luce, prodotta dall'atmosfera terrestre, la quale attenua i contrasti ed altera la reale misura dell'oscuramento stesso. D'altro canto però, il metodo in questione ha un punto debole nella sua dipendenza dalle condizioni atmosferiche, poiché eventuali variazioni accidentali dello stato del cielo, potrebbero causare alterazioni nella radiazione solare e compromettere la precisione dei risultati. Ma si deve considerare che le eclissi si svolgono in un periodo abbastanza breve di tempo, che viene usata solo una parte della curva di radiazione, e che in quelle parziali – come nel presente caso – l'abbassamento della temperatura dovuto all'oscurarsi del Sole non è mai tanto forte da causare un cambiamento notevole nello stato atmosferico.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) W. H. Julius, cfr. «Astrophysical Journal», vol. XXIII, 1906 e vol. XXXVII, 1913.

(2) M. Cimino, cfr. «Acta della Pontif. Acad. Scientiarum», anno X, vol. X, n. 6.

2. L'apparecchio da me usato per la misura della radiazione è un piroeliometro a pila termoelettrica, acquistato dall'Osservatorio di Monte Mario, dalla casa Kipp e Zonen, di Delft (Olanda), con galvanometro di alta precisione, in cui una suddivisione corrisponde ad un flusso di energia pari a 0,0202 calorie–grammo per centimetro quadrato e minuto primo. Poiché si legge facilmente il decimo di divisione del galvanometro, il piroeliometro stesso può individuare una variazione di flusso di energia, corrispondente ad 1/500 cal. gr. cm^2, min^{-1}. Sistemai il piroeliometro sulla terrazza dell'Osservatorio, livellandolo accuratamente e non più toccandolo durante l'intera giornata, per i giorni 29 e 30 giugno e 1 luglio. Lo zero si mostrò stabile fin dall'inizio.

L'eclisse ebbe inizio a Roma il 30 giugno 1954, alle ore $12^h\ 50^m\ 0{,}7^s$ T.M.E.C.; alla fase massima avvenuta alle $14^h\ 07^m$ furono eclissati 0,62 del diametro solare; il fenomeno ebbe termine alle $15^h\ 17^m\ 44{,}6^s$.

TABELLA I.

Misure della radiazione totale R *effettuate il 30 giugno 1954.*

T.M.E.C.	R	T.M.E.C.	R	T.M.E.C.	R	T.M.E.C.	R	T.M.E.C.	R
12^h55^m	50,6	13^h26^m	40,5	14^h06^m	25,0	14^h46^m	40,8	15^h19^m	55,2
59	48,1	28	39,0	07	24,4	47	41,7	24	54,8
13 00	47,0	29	38,4	10	25,1	49	42,4	45	55,5
01	45,9	30	38,3	12	24,6	52	45,4	54	54,4
03	49,5	33	37,2	14	25,4	54	46,3	16 10	54,4
05	49,5	35	34,8	16	26,0	55	47,3	24	53,8
07	50,1	36	34,6	19	27,0	59	49,0	37	53,3
08	49,1	39	30,6	21	27,5	15 01	49,8	17 02	52,8
10	48,2	42	30,1	23	28,1	03	50,5	16	55,0
11	47,5	44	30,3	25	28,9	04	51,1	18	55,7
12	47,4	47	29,6	27	30,4	06	51,3	32	53,7
14	47,6	49	28,0	30	31,8	07	51,7	39	54,4
15	45,5	51	26,9	31	32,4	10	52,2	18 02	54,4
16	45,2	53	26,8	35	34,8	12	54,4	16	54,4
18	44,8	59	25,1	36	35,6	14	53,9	29	54,4
20	42,9	14 01	25,6	38	37,0	16	54,4	45	54,4
21	41,9	02	24,7	40	37,7			59	54,2
25	41,1	04	24,2	43	39,7				

Durante l'eclisse presi le misure in continuazione, leggendo ogni volta la radiazione totale e segnando l'ora con l'approssimazione del mezzo minuto; dopo l'eclisse, le presi ogni 10–15 minuti. Le intensità R della radiazione solare, date dalle letture del galvanometro ed inoltre ridotte ad una stessa altezza del Sole – come dirò subito – sono riportate nella Tabella I. Contemporaneamente, eseguii durante tutta l'eclisse rilievi metereologici a controllo delle condizioni atmosferiche; rilievi che non presentarono variazioni di entità rilevante.

3. Poiché la radiazione solare che arriva al suolo, dipende anche dall'altezza del Sole sull'orizzonte, in quanto l'assorbimento atmosferico è differente per le varie altezze, per avere delle misure confrontabili tra loro, è ovviamente necessario ridurle tutte ad una stessa altezza dell'astro. Per far ciò, misurai la radiazione solare durante le intere giornate precedente e seguente quella dell'eclisse, per ricavare dalle curve della radiazione, opportuni coefficienti, con i quali eseguire le riduzioni necessarie. Ma nei giorni 29 giugno e 1 luglio, non si ebbero condizioni atmosferiche molto buone, per presenza di cirri e veli, spesso variabili; sicché ottenni delle curve piuttosto incerte e di esse non mi sono servita. Anche la mattina del 30 giugno si presentò velata; ma poco prima dell'eclisse, i veli andarono diradandosi, finché il cielo rimase completamente libero per tutto il resto della giornata. Poiché eseguii misure piroeliometriche fin quasi al tramonto, ho cercato di servirmi di queste stesse misure per raggiungere il mio scopo.

A tal fine, ricordo che se chiamiamo con i l'intensità della radiazione solare misurata al suolo, con i_0 quella che si avrebbe al di fuori dell'atmosfera, con a il coefficiente di trasmissione atmosferico per un dato luogo, e con z la distanza zenitale del Sole, si ha la nota formula:

$$i = i_0 a^{\sec z} \tag{2}$$

in cui i e sec z sono conosciuti e che è valida per valori non troppo grandi di z. Scartate perciò le misure del tardo pomeriggio, ho preso in considerazione quelle eseguite dalle $15^h\ 19^m$ alle $18^h\ 02^m$ ed applicando la (2) a ciascuna di esse, ho determinato tredici equazioni, le quali risolte col metodo dei minimi quadrati mi hanno dato: $a = 0{,}68$; $i_0 = 81{,}4$ essendo i_0 misurato nella scala del piroeliometro. Il valore di a è perfettamente d'accordo con quello determinato a Monte Mario dalla scrivente e che, pur essendo un poco maggiore nei mesi invernali, oscilla nella stagione estiva intorno a 0,68.

Conoscendo i_0 ed a, ed applicando la (2) a ritroso, ho trovato quali valori i avrebbe avuto, in determinati istanti, la radiazione solare al suolo, il giorno 30 giugno, in mancanza di eclisse ed ho potuto costruire così la curva di radiazione che si sarebbe avuta in quel giorno in assenza di eclisse. Da questa curva ho poi ricavato i coefficienti, per ridurre tutte le

misure ad una stessa altezza del Sole, e precisamente a quella che aveva l'astro all'inizio del fenomeno. Poiché l'eclisse si svolgeva essendo il Sole in prossimità del meridiano, le correzioni apportate sono state tutte molto piccole.

La figura 1 dà l'andamento della radiazione totale solare – ridotta alla stessa altezza del Sole – durante l'eclisse del 30 giugno, essendo le ordinate misurate nella scala del piroeliometro.

Disegnati i punti sul grafico, un criterio spesso seguìto per tracciare la curva, è quello di farla passare per i punti più alti; con ciò si cerca di ovviare alle eventuali variazioni atmosferiche, le quali tenderebbero a diminuire l'intensità della radiazione. Si può obiettare però, che se altissimi ed invisibili veli fossero permanenti nell'atmosfera e di tanto in tanto si diradassero, essi darebbero origine a rialzi delle misure della radiazione del tutto accidentali. Perciò ho cercato, nel disegnare il grafico, della fig. 1 di dare maggior peso alle misure più alte, ma non di trascurare quelle più basse. Come si vede nella figura, le maggiori incertezze si trovano nel tratto discendente della curva; all'inizio, anzi, le misure sono molto basse e fluttuanti, poiché – come ho detto – lo stato del cielo migliorò quasi improvvisamente poco prima dell'eclisse stessa e presumibilmente dei veli invisibili permanevano ancora. Altra incertezza è intorno alla fase del massimo; poiché il minimo della curva di radiazione risulta alquanto allargato è più difficile valutare le piccole variazioni della radiazione stessa. Invece nella parte ascendente della curva, non esistono incertezze circa il suo andamento, i punti rappresentativi susseguendosi con grande regolarità; mi sono perciò servita di queste misure, per i calcoli seguenti. La retta tratteggiata in fig. 1 indica la radiazione che si sarebbe osservata in assenza di eclisse.

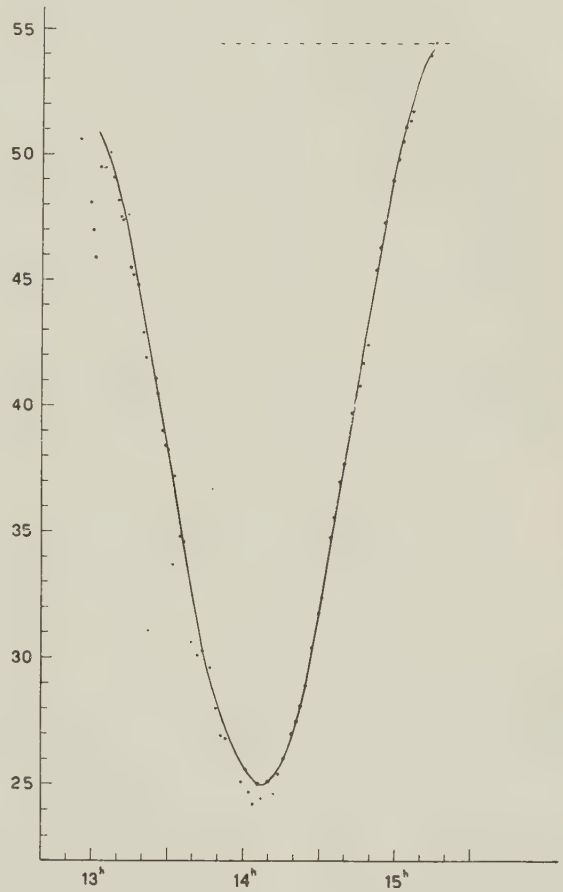


Fig. 1. – Radiazione solare durante l'eclisse.

4. Usando le effemeridi del Nautical Almanac, ho calcolato di 5 in 5 minuti le fasi dell'eclisse ed ho riportato nel seguente prospetto le frazioni g del diametro solare occultato.

T.M.E.C.	g	T.M.E.C.	g	T.M.E.C.	g	T.M.E.C.	g	T.M.E.C.	g
$12^h\,55^m$	0,053	$13^h\,25^m$	0,361	$13^h\,55^m$	0,588	$14^h\,25^m$	0,555	$14^h\,55^m$	0,274
13 00	0,106	30	0,408	14 00	0,606	30	0,520	15 00	0,216
05	0,159	35	0,452	05	0,615	35	0,479	05	0,156
10	0,211	40	0,493	10	0,614	40	0,533	10	0,095
15	0,262	45	0,532	15	0,604	45	0,383	15	0,032
20	0,312	50	0,563	20	0,584	50	0,330		

Consideriamo ora il disco solare e diamo al suo raggio il valore di 100; dividiamo idealmente la sua superficie in corone circolari aventi raggi rispettivamente uguali a 20, 40, 60, 70, 80, 90; la superficie risulterà allora

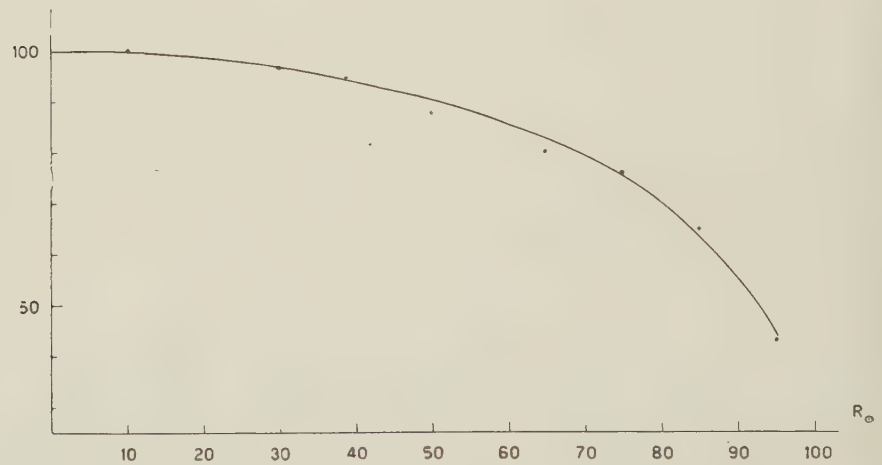


Fig. 2. – Confronto dei valori di Giannuzzi con la curva di Julius.

divisa in 7 corone. Chiamiamo con $x_1, x_2, \cdots, x_7$, la radiazione proveniente rispettivamente dall'unità di superficie della prima (centro), della seconda, ... della settima (lembo), e calcoliamo le frazioni delle diverse corone circolari, occultate ciascuna ai tempi dati nel prospetto suscritto, sapendo che il raggio lunare era 1,0218 volte il raggio del Sole; queste quantità, calcolate numericamente, saranno i coefficienti a_i dell'equazione (1). I valori delle Δ si ricavano dalla fig. 1 contando le distanze dei punti della curva

dalla retta tratteggiata e ricordando che una unità nelle ordinate corrisponde a 0,005 cal. gr. cm^2 min^{-1}. Applicando la (I), ho avuto perciò le seguenti equazioni di condizione:

T.M.E.C.		Scarti
$14^h\ 10^m$	$235{,}5\,x_7+227{,}5\,x_6+216{,}9\,x_5+203{,}1\,x_4+355{,}5\,x_3+284{,}3\,x_2+125{,}6\,x_1=117{,}2$	+0,1
15	$232{,}9\,x_7+224{,}6\,x_6+213{,}3\,x_5+199{,}3\,x_4+346{,}3\,x_3+269{,}5\,x_2+125{,}6\,x_1=114{,}4$	0,0
20	$227{,}8\,x_7+218{,}7\,x_6+206{,}3\,x_5+191{,}6\,x_4+329{,}0\,x_3+243{,}8\,x_2+120{,}7\,x_1=108{,}8$	0,0
25	$220{,}4\,x_7+209{,}9\,x_6+196{,}6\,x_5+180{,}9\,x_4+305{,}7\,x_3+215{,}5\,x_2+103{,}1\,x_1=100{,}6$	—0,1
30	$211{,}0\,x_7+199{,}7\,x_6+185{,}5\,x_5+167{,}1\,x_4+280{,}8\,x_3+186{,}2\,x_2+\ 76{,}6\,x_1=\ 90{,}4$	+0,4
35	$201{,}0\,x_7+188{,}2\,x_6+172{,}5\,x_5+154{,}8\,x_4+249{,}5\,x_3+154{,}3\,x_2+\ 44{,}2\,x_1=\ 78{,}4$	+1,3
40	$189{,}2\,x_7+174{,}7\,x_6+158{,}3\,x_5+139{,}8\,x_4+216{,}3\,x_3+118{,}0\,x_2+\ 12{,}9\,x_1=\ 67{,}0$	+0,7
45	$175{,}7\,x_7+160{,}2\,x_6+142{,}5\,x_5+123{,}0\,x_4+179{,}1\,x_3+\ 66{,}4\,x_2\ =\ 55{,}2$	+0,1
50	$161{,}1\,x_7+143{,}9\,x_6+125{,}0\,x_5+104{,}1\,x_4+134{,}4\,x_3+\ 15{,}0\,x_2\ =\ 42{,}8$	+0,3
55	$144{,}6\,x_7+125{,}8\,x_6+105{,}1\,x_5+\ 81{,}7\,x_4+\ 65{,}4\,x_3\ =\ 31{,}2$	+0,3
15 00	$125{,}5\,x_7+104{,}8\,x_6+\ 80{,}8\,x_5+\ 51{,}2\,x_4+\ \ 6{,}9\,x_3\ =\ 20{,}2$	+0,7
05	$103{,}1\,x_7+\ 78{,}5\,x_6+\ 45{,}7\,x_5+\ \ 1{,}8\,x_4\ =\ 12{,}0$	—0,1
10	$\ 74{,}7\,x_7+\ 35{,}5\,x_6\ =\ 5{,}0$	0,0
15	$\ 23{,}3\,x_7\ =\ 0{,}9$	0,0

Risolvendole col metodo dei minimi quadrati, ho avuto:

$$x_1 = 0{,}091 \quad ; \quad x_2 = 0{,}088 \quad ; \quad x_3 = 0{,}080 \quad ; \quad x_4 = 0{,}073 \quad ;$$

$$x_5 = 0{,}069 \quad ; \quad x_6 = 0{,}059 \quad ; \quad x_7 = 0{,}039.$$

Tali valori sostituiti nel sistema precedente dànno gli scarti riportati nell'ultima colonna; essi, come si vede, sono esigui, specie se si ricorda che una unità equivale a 0,005 cal. gr. cm^2 min^{-1}.

Prendendo eguale a cento l'intensità della radiazione centrale, per unità di superficie, abbiamo allora:

$$X_1 = 100{,}0 \quad ; \quad X_2 = 96{,}7 \quad ; \quad X_3 = 87{,}9 \quad ; \quad X_4 = 80{,}2 \quad ; \quad X_5 = 75{,}8 \quad ;$$

$$X_6 = 64{,}8 \quad ; \quad X_7 = 42{,}9.$$

Nella fig. 2 riportiamo la curva dell'oscuramento al bordo solare data da Julius («Astroph. Journ.», vol. XXIII e XXXVII) ed i sette punti che indicano i valori della X_i da me trovati. Come si vede, l'accordo tra i risultati di Julius e quelli delle mie osservazioni è assai soddisfacente.

Fisica matematica. - *Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde piane nei corpi in moto.* Nota di GIOVANNI CARINI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Dopo la comunicazione *Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto*, fatta dal prof. G. Lampariello al Congresso internazionale di Matematica, Amsterdam 1954, si poneva il problema di studiare la propagazione delle onde piane elettromagnetiche nei corpi in moto, nel caso in cui la direzione di propagazione dell'onda non coincidesse con la direzione della velocità del mezzo. Questo si suppone isolante, isotropo ed omogeneo, mobile di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità $\boldsymbol{v}$, rispetto ad un sistema inerziale di riferimento S ($Oxyz$).

In questa Nota, sulla base dell'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto, stabilita dal prof. Lampariello in una Nota lincea (1), calcoleremo la soluzione delle equazioni di Minkowski che caratterizza la propagazione suddetta e confermeremo la formula della velocità di propagazione dell'onda, che si ottiene applicando la regola di addizione relativistica delle velocità $\boldsymbol{c}/n$ e $\boldsymbol{v}$ nella sua forma più generale. Si vedrà inoltre che, nel caso delle onde piane le due equazioni materiali di Minkowski, che implicano ciascuna le quattro grandezze elettromagnetiche, si spezzano in due omografie, l'una elettrica fra **D** ed **E**, l'altra magnetica fra **B** ed **H**. Nel caso in cui le direzioni del moto e di propagazione coincidono, le due omografie degenerano in due proporzionalità e i fattori di proporzionalità sono i numeri che nella Nota del prof. Lampariello, *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 3-4, 1954, sono indicati con ε^* e μ^* e dati dalle formule

$$\varepsilon^* = \frac{n+\beta}{n(n\beta+1)}\varepsilon \quad , \quad \mu^* = \frac{n+\beta}{n(n\beta+1)}\mu .$$

Ed infine nel caso limite della quiete le due omografie si riducono ancora a due proporzionalità, essendo i fattori ε e μ.

Successivamente si noterà che, mentre nel caso dei mezzi in quiete, tutte e quattro le grandezze **E**, **D**, **H**, **B**, sono ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda (trasversalità dell'onda elettromagnetica), nel caso in esame tale proprietà si conserva soltanto per **B** e **D**.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) G. LAMPARIELLO, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 5, 1954.

1. Consideriamo le equazioni di Minkowski nel caso dell'assenza di cariche e di correnti

$$(I)\qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} & \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \dot{\mathbf{D}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} & \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0 \end{cases}$$

$$(II)\qquad \begin{cases} \mathbf{D} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{H} = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{B}\right) \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{E} = \mu\left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{D}\right). \end{cases}$$

Le grandezze **E**, **D**, **B**, **H**, debbono soddisfare alla suddetta equazione generale delle onde

$$(1)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi + \frac{n^2-1}{c^2-v^2}\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0 \qquad n^2 = \varepsilon\mu,$$

essendo $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$ e Φ una qualunque delle quattro grandezze.

Allo scopo di studiare una propagazione di onde piane nella generica direzione di versore $\boldsymbol{u}(\alpha', \beta', j')$, tentiamo di soddisfare alla (1) con una **E** del tipo

$$(2)\qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

dove $\boldsymbol{r} = \mathrm{P} - \mathrm{O}$ e $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u}$ è il vettore di propagazione. Esso, com'è noto, con la sua direzione dà la direzione di propagazione dell'onda e col suo modulo consente di determinare la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$.

Nella (2), $\mathbf{E}_0$ è un vettore costante, ω è prefissato, k deve essere determinato in guisa che la **E** soddisfi alla (1).

Poiché

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2\cdot\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k^2\alpha'^2\cdot, \cdots, \frac{d^2}{dt^2} = -(\omega - kc\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}))^2\cdot\,, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c},$$

se si indica con $\mathrm{V} = \omega/k$ la velocità di propagazione dell'onda, dalla (1) si ottiene

$$(3)\qquad (n^2 - \beta^2)\,\mathrm{V}^2 - 2c\,(n^2-1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{V} - c^2\,[1 - \beta^2 - (n^2-1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u})^2] = 0$$

da cui

$$(4)\qquad \mathrm{V} = c\,\frac{(n^2-1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}) \pm \sqrt{(1-\beta^2)\,[(1-n^2)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u})^2 + n^2 - \beta^2]}}{n^2 - \beta^2}.$$

Se si trascurano i termini in β^2, la velocità intensiva è

$$(5)\qquad \mathrm{V} = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}.$$

Dalla (5) si deduce che l'effetto Fizeau–Fresnel diminuisce man mano che la direzione di propagazione tende ad essere ortogonale alla velocità del mezzo.

Dalla formula generale (4) si trae che nel caso $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=0$, la velocità di propagazione nel mezzo in moto è eguale a

$$V = c\sqrt{\frac{1-\beta^2}{n^2-\beta^2}}.$$

Se di fronte all'unità si trascura β^2, si ha

$$V = \frac{c}{n}$$

e cioè la stessa velocità di propagazione che si avrebbe se il corpo fosse in quiete.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

La velocità di propagazione delle onde in una direzione trasversale a quella del moto è in prima approssimazione quella stessa che si avrebbe se il corpo fosse in quiete.

2. La prima equazione di Minkowski, in virtù della (2), diventa

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}) = c\,\mathbf{E}_0\wedge\mathrm{grad}\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

da cui

$$\mathbf{B} = \frac{c}{V}\,\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{E}. \tag{6}$$

Dalle equazioni materiali (II) si può ricavare

$$\mu(1-\beta^2)\,\mathbf{H} = (1-n^2\beta^2)\,\mathbf{B} + (n^2-1)\,[\boldsymbol{\beta}\wedge\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B})\,\boldsymbol{\beta}]$$

da cui, per le (2), (6), si ha

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{7}$$

essendo

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c(1-n^2\beta^2)\,\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{E}_0 + (n^2-1)\,[V\boldsymbol{\beta}\wedge\mathbf{E}_0 + c\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{E}_0)\,\boldsymbol{\beta}}{\mu V(1-\beta^2)}. \tag{8}$$

Dalla seconda delle (1) si deduce poi

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{V}\,\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{H}. \tag{9}$$

In conclusione, la soluzione delle equazioni di Minkowski che caratterizza la propagazione di onde piane nella generica direzione $\boldsymbol{u}$ è

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\\
&\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\\
&\mathbf{D} = -\frac{c}{V}\,\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{H}\\
&\mathbf{B} = \frac{c}{V}\,\boldsymbol{u}\wedge\mathbf{E}
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

dove $\mathbf{H}_0$ è legato alla $\mathbf{E}_0$ dalla relazione (8).

Dalle equazioni (II) si deduce

$$\begin{cases} n^2(1-\beta^2)\mathbf{B} = \mu(n^2-\beta^2)\mathbf{H} + \mu(n^2-1)[\beta\wedge\mathbf{D} + (\beta\cdot\mathbf{H})\beta] \\ n^2(1-\beta^2)\mathbf{D} = \varepsilon(n^2-\beta^2)\mathbf{E} + \varepsilon(n^2-1)[\beta\wedge\mathbf{B} - (\beta\cdot\mathbf{E})\beta], \end{cases}$$

che per le (6), (9) diventano

$$(11) \qquad \begin{cases} n^2(1-\beta^2)\mathbf{B} = \xi\mu\mathbf{H} + \mu(\beta\cdot\mathbf{H})\boldsymbol{a} \\ n^2(1-\beta^2)\mathbf{D} = \xi\varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon(\beta\cdot\mathbf{E})\boldsymbol{a} \end{cases}$$

essendo

$$\xi = n^2 - \beta^2 - c\frac{n^2-1}{V}\beta\cdot\boldsymbol{u} \quad , \quad \boldsymbol{a} = \frac{n^2-1}{V}(c\boldsymbol{u} - V\beta).$$

Dalle (11), prendendo le componenti cartesiane, si ottengono le omografie di cui abbiamo parlato nell'introduzione:

$$\begin{cases} n^2(1-\beta^2)B_x = \mu(a_x\beta_x+\xi)H_x + \mu a_x\beta_y H_y + \mu a_x\beta_z H_z \\ n^2(1-\beta^2)B_y = \mu a_y\beta_x H_x + \mu(a_y\beta_y+\xi)H_y + \mu a_y\beta_z H_z \\ n^2(1-\beta^2)B_z = \mu a_z\beta_x H_x + \mu a_z\beta_y H_y + \mu(a_z\beta_z+\xi)H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2(1-\beta^2)D_x = \varepsilon(a_x\beta_x+\xi)E_x + \varepsilon a_x\beta_y E_y + \varepsilon a_x\beta_z E_z \\ n^2(1-\beta^2)D_y = \varepsilon a_y\beta_x E_x + \varepsilon(a_y\beta_y+\xi)E_y + \varepsilon a_y\beta_z E_z \\ n^2(1-\beta^2)D_z = \varepsilon a_z\beta_x E_x + \varepsilon a_z\beta_y E_y + \varepsilon(a_z\beta_z+\xi)E_z. \end{cases}$$

Se $\boldsymbol{u}$ è parallelo a $\beta = \boldsymbol{v}/c$ e $\boldsymbol{v}$ ha la direzione ed il verso dell'asse x, si avrà [1]

$$V = c\frac{n\beta+1}{n+\beta} \quad , \quad \mathbf{D} = \frac{n+\beta}{n(n\beta+1)}\varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{n+\beta}{n(n\beta+1)}\mu\mathbf{H},$$

in conformità a quanto abbiamo ricordato nell'introduzione.

Infine dalle (10), si deduce che soltanto **B** e **D** sono ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda piana elettromagnetica.

(1) Queste formule si trovano a p. 100 della Nota del prof. Lampariello.

Fisica matematica. — *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto.* Nota di EMILIO CLAUSER, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

È ben noto che la teoria delle caratteristiche permette di determinare agevolmente la velocità V della luce in un mezzo qualsivoglia rispetto ad un osservatore inerziale O solidale con esso; V è la velocità di avanzamento dei fronti d'onda con i quali si propagano i fenomeni elettromagnetici retti dalle equazioni di Maxwell (1).

Tale determinazione risulta particolarmente semplice per i mezzi isotropi (anche non omogenei).

In questa Nota, preliminare ad un più ampio studio sulla propagazione della luce in un generico cristallo in moto, determino elementarmente la velocità della luce in un corpo isotropo, genericamente né omogeneo né neutro, in movimento rispetto ad $\overline{O}$, determino cioè la velocità $\overline{V}$ della luce relativamente ad un osservatore inerziale $\overline{O}$ in moto traslatorio, rettilineo ed uniforme, con velocità $\boldsymbol{u}$ rispetto ad O. Basta a tal fine riferire ad $\overline{O}$, avvalendosi della trasformazione di Lorentz, l'equazione delle varietà caratteristiche stabilita rispetto ad O.

Risulta allora che $\overline{V}$ dipende dalla direzione e dal verso di propagazione della luce.

Ne consegue che l'isotropia luminosa sussiste nel solo vuoto, e ciò mostra l'ufficio particolare di tale mezzo nella teoria della relatività ristretta.

La formula (5) alla quale pervengo per la velocità $\overline{V}$ della luce non coincide, a pieno rigore ed in generale con quella che si otterrebbe componendo relativisticamente la velocità $\mathbf{V}$ della luce rispetto ad O con la velocità $\boldsymbol{u}$ di $\overline{O}$. Tale coincidenza ha luogo sempre in prima approssimazione e rigorosamente soltanto quando $\mathbf{V}$ ed $\boldsymbol{u}$ hanno la medesima direzione.

Le varietà caratteristiche delle equazioni di Maxwell rispetto ad un osservatore solidale con il mezzo isotropo, sono notoriamente individuate dalla seguente equazione:

$$(1) \qquad \eta\mu\,(\tau_{/0})^2 - \sum_1^3{}_i\,(\tau_{/i})^2 = 0 \text{ (2)}.$$

Nella (1) η e μ sono i coefficienti dielettrico e di permeabilità magnetica del mezzo, c è la velocità della luce rispetto ad un osservatore inerziale

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, par. 9, Bologna, 1931.

(2) Cfr. B. FINZI, *Discontinuità dei campi elettromagnetici nello spazio-tempo*, « Bollettino U.M.I. », n. 3 (1952). L'equazione (1) delle varietà caratteristiche vale anche se il mezzo non è omogeneo ma sempre isotropo.

(che si vale di un orologio normale); $\tau(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{cost.}$ è l'equazione della generica varietà caratteristica riferita ad O: essa dà in ogni istante il fronte d'onda che si propaga nello spazio geometrico con velocità V. Infine è

$$\tau_{/i} \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Riferiamo la (1) ad $\overline{O}$ mediante la seguente trasformazione speciale di Lorentz [3]:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \bar{x}^1 = \dfrac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \bar{x}^2 = x^2 \quad , \quad \bar{x}^3 = x^3, \\ \bar{x}^0 = \dfrac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{ove} \quad \beta = \dfrac{u}{c}. \end{cases}$$

Essendo

$$\tau_{/k} = \bar{\tau}_{/i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

si ha:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \tau_{/1} = (\bar{\tau}_{/1} - \beta \bar{\tau}_{/0})(1-\beta^2)^{-1/2}, \\ \tau_{/2} = \bar{\tau}_{/2} \\ \tau_{/3} = \bar{\tau}_{/3}, \\ \tau_{/0} = (\bar{\tau}_{/0} - \beta \bar{\tau}_{/1})(1-\beta^2)^{-1/2}. \end{cases}$$

La velocità $\overline{V}$ di avanzamento dei fronti d'onda ed i loro coseni direttori valgono notoriamente:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \varepsilon \overline{V} = \bar{\tau}_{/0}\, c \left[\sum_1^3{}_r (\bar{\tau}_{/r})^2 \right]^{-1/2} & (\varepsilon = \pm 1), \\ \bar{\alpha}_i = \bar{\tau}_{/i} \left[\sum_1^3{}_r (\bar{\tau}_{/r})^2 \right]^{-1/2} & (i = 1, 2, 3)\ [4]. \end{cases}$$

La (1), per le (II) e per le (III), ricordando che

$$\sum_1^3{}_i (\bar{\alpha}_i)^2 = 1$$

diventa allora:

$$\sum_1^3{}_r (\bar{\tau}_{/r})^2 (1-\beta^2)^{-1} \left\{ \left(\varepsilon \frac{\overline{V}}{c} \right)^2 (\eta\mu - \beta^2) - \bar{\alpha}_1 \beta (\eta\mu - 1) \left[2\varepsilon \frac{V}{c} - \bar{\alpha}_1 \beta \right] - 1 + \beta^2 \right\} = 0.$$

(3) In virtù dell'isotropia del mezzo rispetto ad O basta questa sola trasformazione speciale a caratterizzare la traslazione di $\overline{O}$ rispetto ad O.

(4) Loco cit. in (1) par. 4.

Ma per un effettivo fronte d'onda, è:

$$\sum_{1}^{\varepsilon}{}_{r} (\bar{\tau}_{/r})^2 \quad . = 0$$

e quindi dalla (2) si ha:

$$(3) \qquad \varepsilon \frac{\overline{V}}{c} = (\eta\mu - \beta^2)^{-1} \left\{ \bar{\alpha}_1 \beta (\eta\mu - 1) \pm \sqrt{(1-\beta^2)\,[\eta\mu - \beta^2 - \bar{\alpha}_1^2 \beta^2 (\eta\mu - 1)]} \right\} ^{(5)}.$$

La (3) vale anche per $\bar{\alpha}_1 = 0$, come si constata immediatamente. Per $\beta = 0$ si ha poi dalla (3), come deve essere,

$$(4) \qquad V = \frac{c}{\sqrt{\eta\mu}} .$$

Dalla (3) si ha inoltre per $\beta \neq 0$:

$$(5) \quad \overline{V} = u\,(\eta\mu - \beta^2)^{-1} \left| \bar{\alpha}_1 (\eta\mu - 1) \pm \sqrt{(1-\beta^2)(\eta\mu - 1)\{(\eta\mu\beta^{-2} - 1)(\eta\mu - 1)^{-1} - \right.$$

Trascurando le potenze di β dalla seconda in poi, la (5) si riduce alla seguente

$$(6) \qquad \overline{V} = \left| V + \left(1 - \frac{1}{\eta\mu}\right) \overline{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{u} \right|$$

dove $\overline{\mathbf{N}}$ è il versore normale alla superficie d'onda rispetto ad $\overline{O}$. La (6) non è altro che la ben nota formula di Fizeau [6]. Questa circostanza permette due notevoli osservazioni:

1° il doppio segno nella (5) indica che esso va assunto positivo se $\overline{\mathbf{V}}$ ha verso concorde con $\boldsymbol{u}$, negativo nel caso opposto.

2° È noto che la (6) può dedursi dalla regola di composizione relativistica delle velocità, trascurando β^2 [6]. Potremo perciò affermare che anche la formula (5) coincide, nell'approssimazione considerata con quella ottenuta componendo relativisticamente le due velocità $\mathbf{V}$ ed $\boldsymbol{u}$.

È spontaneo ora domandarsi che cosa avviene quando non si trascurino le potenze di β dalla seconda in poi.

In tal caso, quando $\boldsymbol{u}$ e $\overline{\mathbf{V}}$ hanno la medesima direzione, quando cioè $\bar{\alpha}_1 = \pm 1$ la (5) diviene

$$\overline{V} = u\,(\eta\mu - \beta^2)^{-1} \left| \pm (1 - \eta\mu) + (1 - \beta^2)\,\beta^{-1}\,(\eta\mu)^{1/2} \right| .$$

Questo risultato coincide con quello recentemente trovato dal prof. Lampariello [7]. Come egli osserva, esso si può anche ottenere mediante la regola relativistica di composizione delle velocità.

(5) Il radicando è certo positivo, perché nel suo minimo assoluto $\bar{\alpha}_1^2 = 1$ esso vale $\eta\mu\,(1-\beta^2)^2 > 0$.

(6) R. Becker, *Théorie des électrons*, cap. E, par. 46, Paris, 1938.

(7) G. Lampariello, *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XVI, 1954.

Tuttavia tale circostanza non sussiste rigorosamente in generale, perché per $\bar{\alpha}_1 \neq \pm 1$ risulta, componendo relativisticamente le velocità [8]:

$$\bar{V} = \frac{\sqrt{u^2 \eta\mu + c^2(1-\beta^2) - 2uc\sqrt{\eta\mu}\,\bar{\alpha}_1 + \beta^2 c^2 \bar{\alpha}_1^2}}{\sqrt{\eta\mu} - \beta}. \tag{7}$$

Il confronto fra la (5) e la (7) mostra l'asserto.

Ciò è naturale, perché mutando l'osservatore non muta soltanto il vettore velocità della luce, ma, se $\bar{\alpha}_1 \neq \pm 1$, muta anche la normale $\bar{\mathbf{N}}$ al fronte d'onda a cui tale velocità si riferisce.

Noto in fine che nel caso $\bar{\alpha}_1 = 0$, nel quale $\boldsymbol{u}$ e $\bar{\mathbf{V}}$ sono ortogonali, dalla (5) si trae semplicemente

$$\bar{V} = c\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\eta\mu - \beta^2}}.$$

La (7) darebbe invece

$$\bar{V} = \frac{\sqrt{u^2 \eta\mu + c^2(1-\beta^2)}}{\sqrt{\eta\mu} - \beta}.$$

Fisica matematica. — *Sul calcolo della frequenza collisionale nella ionosfera.* Nota di LUIGI CAPRIOLI, presentata [*] dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. La presenza, nell'alta atmosfera terrestre, delle zone ionizzate (ionosfera) costituisce ormai, come è ben noto, una ipotesi essenziale nella formulazione delle teorie di gran parte dei fenomeni connessi con la propagazione delle onde elettromagnetiche attraverso l'alta atmosfera stessa. È evidente, pertanto, l'interesse, non soltanto teorico, di poter determinare, a partire dai dati che gli attuali ed affinati mezzi di indagine sperimentale forniscono, le grandezze che caratterizzano il comportamento della ionosfera in presenza di un campo elettromagnetico; e, in particolare, la distribuzione, in funzione della quota z, della densità ionica $N(z)$ e della frequenza collisionale $\nu(z)$. È noto che, ammessa trascurabile l'azione del campo magnetico terrestre, e quando siano inoltre:

a) note entrambe le funzioni $N(z)$, $\nu(z)$ in tutto un intervallo $0 < z \leq z_0$ [1];

b) ω_0 la pulsazione dell'onda per cui è z_0 l'altezza vera di riflessione ed ω_E il più piccolo valore di $\omega\ (> \omega_0)$ cui corrisponde l'altezza vera di rifles-

(8) Si ha infatti: $\bar{V} = \left[\sum_1^3 (\bar{V}_i)^2\right]^{1/2}$ con $\bar{V}_i = c\,\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{x}^0}$ fornito dalle (I) e V dalla (4).

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) Intendiamo qui la quota z misurata a partire dalla superficie terrestre, supposta piana; e, ovviamente, l'atmosfera stratificata secondo piani paralleli alla stessa superficie terrestre.

sione z_E e tale che per pulsazioni anche di poco superiori, l'altezza apparente di riflessione presenti un brusco aumento (o cessi di essere rivelabile il segnale riflesso) [2];

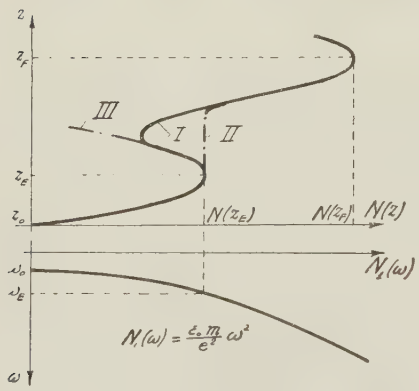
c) note le altezze apparenti di riflessione per i valori di ω dell'intervallo $\omega_o \leq \omega \leq \omega_E$;

la funzione $N(z)$, crescente nell'intervallo $z_o < z < z_E$ [3], può determinarsi in tale intervallo risolvendo una equazione integrale di Abel [4].

Oggetto di questa Nota è di mostrare che se nell'intervallo $z < z_o$ è conosciuta, oltre alla $N(z)$, anche la $\nu(z)$; e se, per tutte le pulsazioni $\omega_o < \omega \leq \omega_E$ è noto anche l'assorbimento subìto dal segnale attraverso lo strato ionizzato in esame (per incidenza normale [5]), la funzione $\nu(z)$

(2) Ricordiamo che le altezze apparenti di riflessione vengono dedotte da misure dei tempi d'eco di segnali emessi alla superficie terrestre e riflessi dalla ionosfera: operando con pulsazioni crescenti a partire dalla ω_o, può verificarsi, quando ω supera un certo valore ω_E, l'uno o l'altro dei due fatti seguenti: o l'altezza apparente di riflessione subisce un brusco aumento; o viene meno il segnale riflesso. Ciò può spiegarsi ammettendo (cfr. più avanti, la rel. (5)) che per valori di ω maggiori di ω_E la densità ionica (massima; vedi nota (3)) raggiunta nello strato in esame alla quota z_E non sia più sufficiente a determinare la riflessione dell'onda, la quale attraversa quindi lo strato stesso. Essa potrà riflettersi in un (eventuale) strato superiore, nel quale la densità ionica raggiunga valori maggiori di quello relativo alla quota z_E; o non riflettersi affatto, in assenza di tale strato.

(3) Cfr., ad esempio, J. M. Kelso, *The determination of the electron density distribution in the presence of an external magnetic field*, «J. of Atmosph. and Terrestr. Phys.», London, 1954, vol. 5. Che la $N(z)$ sia crescente con z in tale intervallo può vedersi, del resto, immediatamente: infatti (cfr. anche nota (2)), se da una certa quota $z' < z_E$ la $N(z)$ non fosse crescente (e non lo fosse in tutto un intervallo (z', z'') anche molto piccolo: come, ad esempio, si verificherebbe in $z > z_E$ per curve dei tipi I, II, III di figura), dovrebbe ivi verificarsi, o il brusco aumento dell'altezza di riflessione, o l'assenza del segnale riflesso, a seconda che la $N(z)$ raggiunge (come nelle curve I, II), o non (come nella III), valori maggiori di $N(z')$ per quote superiori alla z'. Ma allora, per definizione, sarebbe da assumersi $z_E = z'$.



(4) Cfr. I. Ranzi, *Sulla densità ionica nella ionosfera*, «N. C.», A. X., 1933. R. Jouaust, *L'Ionosphère*, «Rév. d'Optique Théor. et Instr.», Paris, 1946. *Ionospheric Radio Propagation*. «U. S. Dep. of Comm., Nat. Bur. of Standards», circ. n. 462, 1948. A dire il vero, in questi lavori, si suppone la densità ionica nulla in tutto l'intervallo (o, z_o) e si ammette nota, per tutte le frequenze, l'altezza apparente di riflessione; il che può ottenersi soltanto per extrapolazione. Poiché, inoltre, per valori molto piccoli della frequenza non risulterebbero più lecite certe approssimazioni (delle quali diremo in seguito e che conducono appunto alla equazione di Abel), preferiamo l'ipotesi del testo, più precisa ed a partire dalla quale si potrebbero ritrovare, con procedimento analogo a quello illustrato nel testo, gli stessi risultati.

(5) Noto l'assorbimento per incidenza obliqua è possibile risalire a quello relativo ad incidenza normale: si veda, sull'argomento: D. Graffi, *Meccanica, Ottica Geometrica e propagazione ionosferica*, «N. C.», vol. VIII, ser. IX, 1951.

può essere determinata nell'intervallo $z_0 < z \leq z_E$ risolvendo una equazione integrale di Abel.

Sussiste, cioè, sotto le ipotesi or ora enunciate e sempre supposta trascurabile l'azione del campo magnetico terrestre, la seguente proposizione che si ritiene essere non priva di un certo interesse:

Ammessi noti in funzione della pulsazione i tempi d'eco (altezze apparenti) e gli assorbimenti subìti dai segnali elettromagnetici le cui altezze reali di riflessione superano una certa quota z_0; e, nell'intervallo $z < z_0$, note anche le funzioni $N(z)$, $\nu(z)$; allora, queste funzioni possono determinarsi risolvendo equazioni del tipo di Abel, anche per $z_0 < z \leq z_E$, essendo z_E la minima quota $> z_0$ in corrispondenza della quale la funzione $N(z)$, crescente in tutto l'intervallo $z_0 < z < z_E$ [3], cessa di essere tale.

2. Sia $\mathbf{E}(z, t) = \overline{E}(z) \exp[j\omega t]\, \boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$, versore orizzontale) il vettore elettrico di un'onda elettromagnetica piana, armonica, di pulsazione ω, che si propaga attraverso la ionosfera nella direzione verticale z. Dette rispettivamente μ_0, ε_0, e, m, la permeabilità e la costante dielettrica del vuoto, la carica e la massa di un elettrone [6], è noto che il mezzo ionizzato si comporta, in presenza del campo or ora definito, come un mezzo ordinario (cioè non ionizzato), la cui permeabilità è ancora μ_0, mentre ne sono

$$(1) \qquad \varepsilon(z) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{e^2 N(z)}{\varepsilon_0 m(\omega^2 + \nu^2)}\right] \quad , \quad \gamma(z) = \frac{e^2 N(z) \cdot \nu(z)}{m(\omega^2 + \nu^2)} \quad [7],$$

la costante dielettrica e la conducibilità, rispettivamente. Ed è noto altresì che, se poniamo

$$(2) \qquad \beta(z) = \sqrt{\varepsilon\mu_0 - j\frac{\gamma\mu_0}{\omega}}$$

è opportuno osservare qui, in vista di quanto sarà detto fra breve, che supposte trascurabili rispetto alla prima le potenze superiori del rapporto ν/ω (il che può ritenersi lecito nella regione $z > z_0$ [8]), si può scrivere, in prima approssimazione e posto $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$:

$$(2') \qquad \beta(z) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{e^2 N(z)}{m\omega^2}\right)^{1/2} - j\frac{1}{2c}\frac{e^2 N(z)\cdot\nu(z)}{m\varepsilon_0\omega^3}\left(1 - \frac{e^2 N(z)}{m\varepsilon_0\omega^2}\right)^{-1/2},$$

dalle equazioni di Maxwell segue l'equazione

$$(3) \qquad \frac{d^2 E}{dz^2} = -\beta^2 \omega^2 E(z);$$

(6) Trascuriamo qui l'effetto dovuto alla presenza degli ioni.

(7) Cfr. JOUAUST, op. cit., p. 29.

(8) Infatti, se la zona $z > z_0$ appartiene alla ionosfera, il rapporto è, in media, dell'ordine di 10^{-3} (cfr. K. BIBL et K. RAWER, *Les contributions des régions* D *et* E *dans les mésures de l'absorption ionosphérique*, « Serv. de Prév. Milit. », France, 1951).

e che, nell'ipotesi che il modulo di $(d\beta/dz)^2$ e quello di $d^2\beta/dz^2$ siano sufficientemente piccoli [9] un noto procedimento (di Liouville [10]) fornisce per l'integrale della (3) l'espressione approssimata:

$$(4) \qquad E(z) = (\beta\omega)^{-1/2} \left\{ c_1 \exp\left[-j \int_0^z \beta\omega \, dz \right] + c_2 \exp\left[j \int_0^z \beta\omega \, dz \right] \right\}.$$

3. Indichiamo ora con $h(\omega)$ l'altezza reale di riflessione dello strato in esame per l'onda di pulsazione ω, cioè la quota in corrispondenza della quale è, per ogni valore di ω dell'intervallo (ω_0, ω_E), cioè sempre nell'ipotesi che sia $\omega^2 \gg \nu^2$ (cfr. nota [8]):

$$(5) \qquad N[h(\omega)] = \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{e^2} = N_1(\omega) \text{ [11]}.$$

Dalla (4) segue che nello strato ionizzato $0 \leq z \leq h(\omega)$ [12] (e nei limiti della approssimazione introdotta dal procedimento) si hanno: un'onda incidente $E_1 = (\beta\omega)^{-1/2} c_1 \exp\left[-j \int_0^z \beta\omega \, dz \right]$ ed un'onda riflessa $E_2 = (\beta\omega)^{-1/2} c_2 \exp\left[j \int_0^z \beta\omega \, dz \right]$: risulta quindi sussistere, fra il coefficiente di riflessione $\rho = \frac{|E_2(h)|}{|E_1(h)|}$ e quello di assorbimento $r = \frac{|E_2(0)|}{|E_1(0)|}$ dello strato, la relazione

$$(6) \qquad \log r = \log \rho - \Re\left[2j \int_0^{h(\omega)} \beta\omega \, dz \right],$$

che può scriversi anche, detta A_0 la quantità $-\Re\left[2j \int_0^{h(\omega)} \beta\omega \, dz \right]$ (nota in quanto tali sono, per ipotesi, in tutto l'intervallo $(0, h(\omega))$, le funzioni $N(z)$, $\nu(z)$

(9) Deve osservarsi qui che, per $z \to h$ entrambe le quantità $d\beta/dz$, $d^2\beta/dz^2$, tendono all'infinito; ma la nostra ipotesi può, molto presumibilmente (cfr. R. GANS, *Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium*, « Ann. der Phys. », B. 47, 1915), ritenersi valida per ogni pulsazione ω dell'intervallo (ω_0, ω_E) fino ad una quota $h_1(\omega)$ di poco inferiore alla $h(\omega)$.

(10) Cfr. GANS, op. cit.; S. A. SCHELKUNOFF, *Appl. Math. for Engrs. and Scient.*, D. Van Nostrand, New York, 1948.

(11) Si osservi che la quota h assume il valore massimo z_E in corrispondenza di quel valore ω_E della pulsazione pel quale si verificano (cfr. note (2), (5)) o la discontinuità nel valore dell'altezza apparente o la scomparsa del segnale riflesso. Ciò premesso, dalla prima delle (1) segue che l'indice di rifrazione $n(z)$ relativo ad un'onda di pulsazione ω compresa nell'intervallo (ω_0, ω_E) vale, nell'ipotesi che sia $\omega^2 \gg \nu^2$:

$$(a) \qquad n(z) = \left(1 - \frac{e^2 N(z)}{m\varepsilon_0 \omega^2} \right)^{1/2};$$

d'altra parte, per nota legge dell'ottica geometrica deve essere, se θ è l'angolo di incidenza del raggio d'onda in z_0, $n(h) = \operatorname{sen} \theta$; supposta normale l'incidenza, segue subito dalla (a) l'equazione del testo.

(12) A rigore (cfr. nota (9)) dovrebbe porsi qui $h_1(\omega)$ e non $h(\omega)$; ma, data la convergenza per $z \to h$ dell'integrale $\int_0^z \beta\omega \, dz$ e per essere molto piccolo l'intervallo (h_1, h), riterremo lecito sostituire, qui e nel seguito, h ad h_1.

e, quindi, la $\beta(z)$: cfr. (1), (2)) e tenuta presente la (2') valida, come si è detto, in $z_0 < z$, nella forma:

$$\log \rho + A_0 - \log r = \frac{1}{c} \int_{z_0 = h(\omega_0)}^{h(\omega)} \frac{e^2 N \nu}{m \varepsilon_0 \omega^2} \left(1 - \frac{e^2 N}{m \varepsilon_0 \omega^2}\right)^{-1/2} dz . \tag{7}$$

Ora, ammesso noto il coefficiente ρ [13], mediante il rilievo sperimentale di r, effettuato per le pulsazioni dell'intervallo (ω_0 , ω_E) [14] è possibile determinare, per ogni valore di ω di tale intervallo la espressione al primo membro della (7). Essa è pertanto da considerarsi funzione *nota* di ω nel detto intervallo e quindi (cfr. rel. (5)) una funzione nota di N_1 nell'intervallo $(N_1(\omega_0) = N_{10} , N_1(\omega_E))$ [15].

Indicando con $\Phi(N_1)$ tale funzione e tenuto conto della (5), oltre che della monotonia di $N(z)$ (cfr. nota (3)), la (7) assume la forma

$$\Phi(N_1) = \frac{1}{c} \int_{N_{10}}^{N} N \cdot \nu \cdot N_1^{-1/2} (N_1 - N)^{-1/2} \frac{dz}{dN} dN ;$$

od anche, posto:

$$\frac{1}{c} N \cdot \nu \frac{dz}{dN} = u(N) , \tag{8}$$

l'altra

$$N_1^{1/2} \Phi(N_1) = \int_{N_{10}}^{N_1} u(N) \cdot (N_1 - N)^{-1/2} dN ,$$

evidentemente del tipo di Abel.

Poiché la soluzione di quest'ultima è

$$u(N) = \pi \frac{d}{dN} \int_{N_{10}}^{N} N_1^{1/2} (N - N_1)^{-1/2} \Phi(N_1) dN_1 \text{ [16]},$$

segue, tenendo conto della (8), la relazione

$$\nu(z) = c \frac{\pi}{N} \frac{dN}{dz} \frac{d}{dN} \int_{N_{10}}^{N} N_1^{1/2} (N - N_1)^{-1/2} \Phi(N_1) dN_1 \tag{9}$$

(13) Questa ipotesi appare invero alquanto restrittiva, poiché non sono attualmente possibili, almeno a quanto risulta dalla bibliografia consultata, né il rilievo diretto, né il calcolo della ρ; ma, d'altra parte, la ρ stessa è unitaria nel caso di frequenza collisionale nulla (cfr. GANS, op. cit., p. 728): e può quindi essere lecito ammettere che sia, anche nel caso qui in esame, e nei limiti delle approssimazioni adottate, $\rho = 1$.

(14) Cfr. ad esempio, K. RAWER, *Comparaison des résultats de mésures de l'absorption ionosphérique effectuées par deux stations européennes*, « Serv. de Prev. Milit., France », 1951.

(15) Le quantità $N_{10} , N_1(\omega_E)$ esprimono quindi i valori delle densità ioniche in corrispondeza delle quote vere z_0 , z_E alle quali si verificano le riflessioni delle onde di pulsazioni ω_0 , ω_E, rispettivamente.

(16) Cfr. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales*, Gauthier-Villars, Paris 1913.

che ci eravamo proposti di determinare e che può prestarsi, nei limiti delle ipotesi qui ammesse e delle approssimazioni adottate, ad un non difficile controllo sperimentale [17].

Non è inutile osservare, infine, che nell'ipotesi che la $N(z)$ assuma in $z_F > z_E$ comportamento analogo a quello assunto in z_E, raggiungendo (cfr. figura) un valore $N(z_F)$ maggiore di quello $N(z_E)$ dianzi considerato; e che siano note per $z \leq z_E$ entrambe le funzioni $N(z)$, $\nu(z)$ il procedimento or ora illustrato permette di determinare la $\nu(z)$ anche nell'intervallo (z_E, z_F). Può apparire alquanto restrittiva, dal punto di vista sperimentale, la condizione che entrambe le $N(z)$, $\nu(z)$ debbano essere note per $z < z_E$; ma ciò è strettamente legato alle possibilità di indagine sperimentale di cui si dispone [18]. Comunque, tale ipotesi potrebbe essere rimossa ammettendo nota, o attraverso rilievi sperimentali [18], o per altra ipotesi, la espressione

$$\Re\left[2j\int_0^{z_E}\beta\omega\,dz\right].$$

Chimica fisica. — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli e polialcoli* [*]. Nota di FERDINANDO DANUSSO, presentata [**] dal Corrisp. G. NATTA.

Lo studio di miscele liquide ad alta concentrazione di funzioni alcoliche, in base a misure dirette di densità e di velocità ultrasonora, è risultato, in un precedente lavoro [1], particolarmente interessante per la rivelazione di alcuni aspetti di interazione strutturale tra i componenti.

Nel precedente citato lavoro, che rappresentava la continuazione di una serie di indagini su miscele liquide [2], si erano in particolare studiate miscele binarie contenenti vari alcoli alifatici o aliciclici e glicol etilenico come secondo componente comune.

In questa Nota saranno trattati i risultati sperimentali ottenuti da analoghe miscele aventi come secondo componente glicerina anziché glicol.

(17) È manifesto che, per essere $\omega(N_{10}) = \omega_0$, $\omega(N) < \omega_E$, il calcolo della $\nu(z)$ mediante la (9) richiede che, come è stato detto nel n. 1, la funzione $\Phi(N_1)$ sia nota soltanto per le pulsazioni $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_E$.

(18) Non è improbabile che la esplorazione stratosferica possa farsi fino alla quota z_E in modo diretto per mezzo di aeromobili guidate e con propulsione a razzo (cfr., ad esempio, su tale argomento, J. C. SEDDON, *Propagation measurements in the ionosphere with the aid of Rockets*, « J. of Geophysical Res. », vol. 58, n. 3, Washington, 1953.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVII, fasc. 5, pp. 234-239 (1954).

(2) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei »: *a*) *10*, 235 (1951); *b*) *13*, 131 (1952); *c*) *17*, 109 (1954); *d*) *17*, 114 (1954); *e*) *17*, 234 (1954).

TABELLA I.

Densità ρ, *volume molecolare* V, *velocità ultrasonora u e compressibilità adiabatica molecolare* B *di miscele di vari alcoli con glicerina, in funzione della azione molecolare x di glicerina a* 30° C.

n° d'ordine	Componenti	x moli %	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
12	Metilico	0,00	0,7832	40,91	1092	4,30
		2,34	0,8067	41,46	1120	4,02
		2,95	0,8125	41,61	1129	3,94
		5,31	0,8364	42,12	1160	3,67
		12,05	0,8943	43,91	1237	3,15
		29,24	1,0057	49,31	1405	2,44
		31,26	1,0167	49,98	1422	2,38
		37,03	1,0464	51,87	1478	2,23
		50,65	1,1080	56,37	1586	1,98
		66,07	1,1631	61,66	1703	1,83
		75,17	1,1902	64,85	1759	1,73
		85,88	1,2204	68,51	1825	1,65
	Glicerina	100,00	1,2510	73,61	1908	1,58
13	*n*–Propilico	0,00	0,7966	75,43	1193	6,53
		13,74	0,8616	74,84	1252	5,43
		31,71	0,9457	74,27	1347	4,25
		45,42	1,0095	73,92	1423	3,55
		64,54	1,0979	73,54	1572	2,66
		78,53	1,1618	73,35	1677	2,20
	Glicerina	100,00	1,2510	73,61	1908	1,58
14	iso–Propilico	0,00	0,7772	77,32	1125	7,71
		23,61	0,8929	75,76	1245	5,37
		42,06	0,9836	74,78	1367	3,99
		60,19	1,0729	73,96	1518	2,93
		74,90	1,1431	73,54	1682	2,23
		91,57	1,2193	73,31	1835	1,75
	Glicerina	100,00	1,2544	73,41	1911	1,57
15	*n*–Butilico	0,00	0,8026	92,35	1227	7,50
		23,37	0,8937	87,64	1294	5,74
		36,07	0,9465	85,16	1354	4,81
		44,20	0,9814	83,62	1392	4,31
		60,74	1,0560	80,53	1495	3,35
		79,62	1,1470	77,10	1661	2,39
		88,83	1,1935	75,48	1779	1,96
	Glicerina	100,00	1,2510	73,61	1908	1,58

Segue: TABELLA I.

n° d'ordine	Componenti	x moli %	ρ g/cm³	V cm³/mole	u m/s	B $\frac{cm^3 \cdot 10^{-3}}{mole\ at}$
16	iso-Butilico	0,00	0,7949	93,24	1178	8,29
		25,05	0,8952	87,82	1264	6,02
		46,34	0,9879	83,46	1363	4,46
		68,00	1,0920	79,06	1532	3,03
		81,23	1,1603	76,46	1690	2,26
		87,11	1,1877	75,58	1719	2,11
	Glicerina	100,00	1,2544	73,41	1911	1,57
17	Cicloesanolo	0,00	0,9409	106,45	1448	5,29
		26,75	1,0016	97,84	1478	4,39
		52,82	1,0763	89,10	1529	3,47
		73,44	1,1491	82,00	1613	2,69
		86,76	1,2004	77,61	1769	2,03
	Glicerina	100,00	1,2544	73,41	1911	1,57
18	Glicol	0,00	1,1047	56,19	1643	1,85
		17,26	1,1309	59,05	1697	1,77
		36,92	1,1731	62,36	1769	1,67
		57,33	1,2027	65,92	1808	1,64
		58,95	1,2049	66,20	1815	1,64
		74,74	1,2253	68,97	1854	1,60
	Glicerina	100,00	1,2544	73,41	1911	1,57
19	Acqua	0,00	0,9957	18,10	1512	0,78
		8,31	1,0726	22,53	1632	0,77
		14,40	1,1108	25,82	1722	0,77
		28,69	1,1678	33,63	1823	0,85
		55,44	1,2192	48,46	1895	1,09
	Glicerina	100,00	1,2544	73,41	1911	1,57

Nella tabella I sono raccolti tutti i dati direttamente ottenuti dalla esperienza, con le medesime modalità e tecniche sperimentali utilizzate e descritte nei precedenti lavori. Oltre a miscele di vari alcoli e di glicol con glicerina, si è anche esaminata, a scopo di confronto, la miscela acqua–glicerina.

Nella fig. 1 sono invece riportati diagrammi che rappresentano, in funzione della composizione, le deviazioni percentuali che i valori sperimentali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare presentano rispetto a corrispondenti valori calcolati nell'ipotesi che tutte le miscele esaminate fossero ideali.

La prima constatazione che può esser fatta è che restano sostanzialmente confermate tutte le conclusioni tratte nel precedente lavoro su miscele contenenti glicol. È tuttavia interessante aggiungere alcune ulteriori considerazioni.

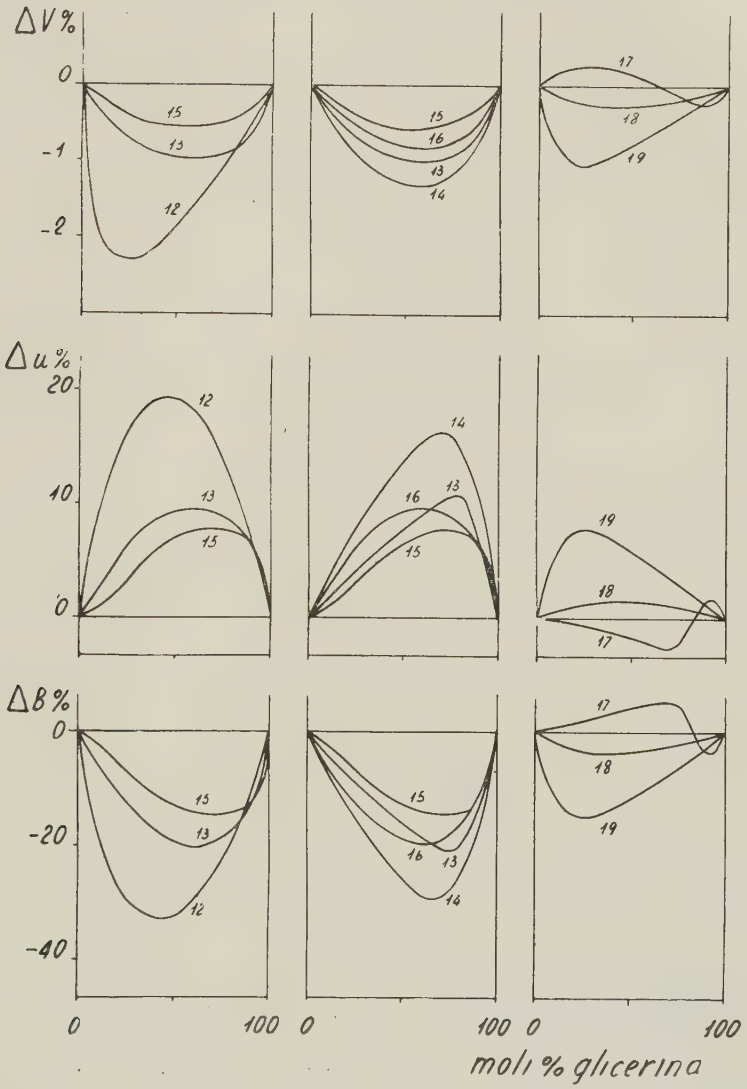


Fig. 1. – Deviazioni percentuali dai valori ideali del volume molecolare V, della velocità ultrasonora u e della compressibilità adiabatica molecolare B in miscele di vari alcoli, di acqua e di glicol etilenico con glicerina (i numeri che contrassegnano le curve corrispondono al numero d'ordine delle miscele nella tabella I).

a) In generale le deviazioni percentuali appaiono più elevate nei sistemi contenenti glicerina rispetto ai corrispondenti sistemi contenenti glicol. Ciò vale per tutte le miscele contenenti alcoli come primi componenti, ma non vale per il sistema acqua–glicerina, che manifesta deviazioni

percentuali dello stesso tipo e della stessa entità di quelle del sistema acqua–glicol.

b) Le deviazioni si manifestano forti nelle miscele di alcoli a basso peso molecolare o di acqua con glicol o glicerina, ma sono di entità relativamente modesta nel sistema glicol–glicerina. Ciò significa che le variazioni di interazioni molecolari responsabili di deviazioni dall'idealità devono essere notevoli nel primo caso, mentre nel secondo esse evidentemente risentono della similitudine strutturale dei componenti. Un fatto analogo è riscontrabile nelle miscele, esaminate in precedenza [3], contenenti esclusivamente alcoli, le cui deviazioni dall'idealità sono relativamente piccole rispetto a quelle successivamente riscontrate in miscele di alcoli e polialcoli.

c) Nel precedente lavoro si erano in particolare confrontati i sistemi acqua–glicol e metanolo–glicol [4]. Mentre in ambedue i sistemi il massimo delle deviazioni di volume si verificava ad una proporzione molecolare acqua/glicol o metanolo/glicol di 2/1, le massime deviazioni di velocità e di compressibilità si presentavano nel primo sistema ancora ad una proporzione 2/1, ma nel secondo ad un rapporto molecolare 1/1. In questo lavoro troviamo una perfetta corrispondenza nei sistemi acqua–glicerina e metanolo–glicerina. Nel primo i massimi delle deviazioni percentuali delle tre grandezze considerate si verificano ad un rapporto molecolare acqua/glicerina di 3/1, mentre nel secondo sistema la massima deviazione di volume è ancora ad un rapporto metanolo/glicerina di 3/1, ma le massime deviazioni di velocità e di compressibilità sono situate ad una proporzione molecolare di 1/1.

Si deve quindi concludere che i sistemi acqua–polialcol vanno trattati diversamente dai sistemi alcol–polialcol. Nei primi, sia le deviazioni del volume molecolare, che quelle della velocità di propagazione ultrasonora, presentano la massima sensibilità ad una proporzione equifunzionale dei due componenti. Nei secondi, per i casi da noi esaminati, mentre le deviazioni di volume presentano ancora la massima sensibilità ad una proporzione equifunzionale, la velocità ultrasonora e, di riflesso, la compressibilità adiabatica manifestano le massime deviazioni ad una proporzione equimolecolare dei due componenti.

Questo fatto può risultare di notevole importanza nel campo di studio delle associazioni molecolari con prevalenza di legami idrogeno e dovrebbe essere largamente rilevabile anche con altri metodi più sensibili di indagini strutturistica.

Conclusioni. – Lo studio di miscele ad alta concentrazione di funzioni alcoliche, già iniziato in un precedente lavoro su miscele di alcoli con glicol etilenico, è stato proseguito su analoghe miscele contenenti glicerina in luogo di glicol.

(3) Loc cit. (2) *d*).
(4) Loc. cit. (2) *e*), Conclusioni, capov. *e*).

Dall'andamento delle deviazioni percentuali dei valori sperimentali del volume molecolare, della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica molecolare da corrispondenti valori calcolati nell'ipotesi che tutte le miscele esaminate fossero ideali, è possibile osservare che valgono in generale le stesse conclusioni messe in evidenza per le corrispondenti miscele contenenti glicol. In particolare si può rilevare quanto segue: *a*) le deviazioni appaiono in generale maggiori nei sistemi contenenti glicerina anziché glicol; *b*) le deviazioni sono molto elevate nei sistemi ad alta concentrazione di funzioni alcoliche, ma risultano notevolmente inferiori nel caso in cui tali sistemi abbiano componenti della stessa funzionalità (sistemi unicamente di alcoli o di polialcoli); *c*) confronti tra miscele di acqua o metanolo con glicol o glicerina portano alla conclusione che le miscele acqua–polialcol vanno riguardate assai diversamente da miscele alcol–polialcol. Nelle prime le deviazioni di volume e di velocità ultrasonora sono ugualmente sensibili a proporzioni equifunzionali dei componenti, mentre nelle seconde le deviazioni di velocità risultano più sensibili a proporzioni equimolecolari dei componenti.

Chimica fisica. — *Influenza del nitrogruppo sulla mobilità degli alogeni nei composti alifatici* [*]. Nota I di Massimo Simonetta, Giorgio Favini e Sergio Carrà, presentata [**] dal Socio L. Cambi.

Nella presente Nota sono esposti alcuni risultati ottenuti nel corso delle nostre ricerche riguardanti la mobilità del cloro e del bromo in nitroderivati alchilici.

I composti sinora esaminati sono: 1–cloro, 2–nitroetano; cloruro e bromuro di propile; 2–nitro, 2–cloro–propano; 2–nitro, 2–bromopropano; cloruro e bromuro di isobutile terziario; cloruro e bromuro di isobutile primario, 2,2–dimetil, 1–cloropropano; 2,2–dimetil, 1–bromopropano, 1–cloro, 2–nitropropano e 2–metil, 2–nitro, 1–cloropropano.

Sono state eseguite sperimentalmente misure di velocità di reazione intese a determinare la cinetica e il meccanismo della reazione di sostituzione del cloro e del bromo nelle diverse condizioni.

Precisamente la reattività dell'alogeno è stata saggiata nelle seguenti condizioni: solvolisi in miscele acqua–alcool, reazione con nitrato di argento idroalcolico, azione di idrato potassico in acqua–diossano, idrolisi in acqua–diossano, sostituzione con iodio mediante ioduro potassico in soluzione acetonica. È stata studiata anche l'influenza della temperatura e delle variazioni di composizione dei solventi. Poiché per alcuni dei composti era logico attendersi, almeno nelle reazioni con meccanismo S_{N_2}, un notevole aumento

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

dell'energia di attivazione dovuto ad effetti sterici, le nostre ricerche sperimentali sono state completate con un calcolo teorico di questi incrementi di energia di attivazione.

Preparazione dei composti. – L'1–cloro, 2–nitroetano è stato preparato per la via descritta in un precedente lavoro [1] ed aveva praticamente le stesse caratteristiche del prodotto allora ottenuto; il cloruro di propile è stato ottenuto da alcol propilico e HCl in presenza di $ZnCl_2$ anidro [2]: il prodotto distillava a 44–45 °C.: Cl °/₀ cal. 45,2; trov. 44,1. Il 2–cloro, 2–nitropropano è stato preparato secondo il metodo di Cherkasana e Mel'inkov [3], facendo gorgogliare cloro in una soluzione basica di acetonossima; p. eb. 35 °C a 15 mm; Cl °/₀ calc. 28,7; trov. 28,7.

Il 2–nitro, 2–bromopropano è stato ottenuto per azione del bromo sul 2–nitropropano in soluzione alcalina [4]; p. eb. 48 °C a 15 mm; Br °/₀ calc. 47,6; trov. 47,6.

Il cloruro di isobutile terziario è stato preparato secondo Morris e Ohmsted [5] da alcol butilico terziario e HCl; p. eb. 50–52 a 760 mm.; Cl °/₀ calc. 38,3; trov. 38,2.

Il corrispondente bromuro è stato preparato dall'alcol per azione di PBr_3 [6]; il prodotto ottenuto corrispondeva ai dati della letteratura.

Il cloruro di isobutile primario è stato ottenuto per azione di cloruro di tionile sul corrispondente alcol [7]; p. eb. 68–69° a 760 mm.; Cl °/₀ trov. 38,2.

Il bromuro corrispondente è stato ottenuto dal prodotto commerciale, purificandolo per accurata rettifica: p. e b. 86–87° a 760 mm.

L'1–cloro, 2–nitropropano è stato preparato clorurando il nitro–alcol corrispondente con PCl_5 [8]; p. eb. 68–69 a 18 mm.; Cl °/₀ trov. 28,6.

L'1–cloro, 2–nitro, 2–metilpropano è stato pure ottenuto per clorurazione del corrispondente alcol (p. eb. 100° a 15 mm), preparato a sua volta da nitropropano e formaldeide [9]. Questa clorurazione ha presentato notevoli difficoltà e alla fine si sono trovate convenienti le seguenti condizioni: in un pallone munito di refrigerante a ricadere si introducono 5 gr. di alcol e 4 gr. di piridina anidra; si aggiungono lentamente 5 cc. di cloruro di tionile e poi si scalda per due ore. Il residuo si tratta con etere; l'estratto etereo si disidrata con solfato sodico anidro e si distilla nel vuoto; p. eb. 74–75° a 18 mm.; Cl °/₀ trov. 25,2 calc. 25,8; N °/₀ trov. 9,8; calc. 10,1.

(1) M. Simonetta e G. Favini, questi « Rend. », XIV, fasc. 1, pp. 119 127 (1953).
(2) J. E. Copenhaver e A. M. Whaley, *Org. Syntheses*, 1° vol., coll., p. 142.
(3) E. M. Cherkasana e N. N. Mel'inkov, « Zhur. Obschei Kim. », *19*, 321 (1949).
(4) R. W. Crowe e C. P. Smyth, « J.A.C.S. », *72*, 4009 (1950).
(5) J. F. Morris e A. W. Ohmsted, *Org. Syntheses*, 1° vol., coll., p. 144.
(6) C. R. Noller e R. Dinsmore, *Org. Syntheses*, 2° vol., coll., p. 358.
(7) A. I. Vogel, « J.C.S. », 636 (1943).
(8) W. Theilacker e G. Wendstand, « Ann. », *570*, 33–53 (1950).
(9) B. M. Vanderbilt e H. B. Haas, « Ind. Eng. Chem. », *32*, 34 (1940).

Misure cinetiche. – Le modalità operative e i metodi di analisi (purificazione dei solventi, preparazione delle soluzioni, controllo della temperatura, inizio e fine della reazione) adottati sono quelli già descritti in letteratura per le reazioni di idrolisi o con KOH in miscele acqua–diossano [1], con KJ in soluzione acetonica [10], con $AgNO_3$ in soluzione idroalcolica [11] e di solvolisi in miscele acqua–alcol [12].

Una lieve variante è stata introdotta per la reazione di solvolisi del cloruro di isobutile terziario, poiché la reazione decorre a velocità considerevole anche a temperatura ambiente; l'inizio della reazione era ottenuto mediante aggiunta dell'opportuna quantità di acqua alla soluzione della sostanza in alcol assoluto; ai tempi voluti un'opportuna porzione (10 cc.) della soluzione veniva prelevata e versata in 20 cc. di cloroformio. Lo strato acquoso veniva trattato una seconda volta con 10 cc. di cloroformio: i due estratti cloroformici riuniti venivano lavati con 10 cc. di acqua e il lavaggio aggiunto allo strato acquoso.

Questo era successivamente acidificato e sottoposto ad analisi. In Tabella I sono raccolti i risultati ottenuti nella presente ricerca ed anche alcuni dedotti dalla letteratura. Le successive colonne contengono rispettivamente: formula del composto, sua molarità, tipo della reazione studiata, concentrazione del reattivo, temperatura in gradi centigradi, ordine della reazione, valore della costante di velocità (calcolata coi metodi usuali) espresso in sec^{-1} per le reazioni del primo ordine, e in sec^{-1} (moli/litro)$^{-1}$ per quelle del secondo ordine. L'ultima colonna contiene osservazioni varie, come la referenza bibliografica per le costanti prese da precedenti lavori, il valore dell'energia di attivazione di Arrhenius Q_A (in cal/mole) nei casi in cui è stato valutato, ecc. Le composizioni dei solventi sono date come percentuale in volume del componente organico.

Sull'1–cloro, 2–nitro, 2–metilpropano abbiamo eseguito anche delle prove isolate tendenti a dimostrare la scarsa reattività del cloro in questo composto, almeno nel caso di reazioni a meccanismo S_{N_2}. Ad esempio una miscela di 0,33 gr. di sostanza, 6 gr. di KOH e 30 cc. di alcol etilico e poca acqua è stata tenuta per 5 ore all'ebollizione; alla fine il cloroione in soluzione era appena il 5 % del cloro totale.

Energia di attivazione di impedimento sterico. – Per il calcolo della differenza delle energie di compressione tra complesso attivato e molecola iniziale, dovute al fatto che alcuni atomi vengono a trovarsi a distanze inferiori alle distanze di tocco, abbiamo seguito il metodo di Dostrovsky, Hughes e Ingold [15]. In Tabella II riportiamo, oltre ai nostri, alcuni dei

(10) M. Simonetta e G. Favini, « Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. Cl. Sci. », LXXXVII, 279 (1954).

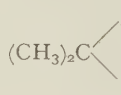
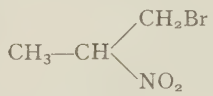
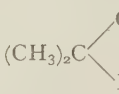
(11) I. Dostrovski e E. D. Hughes, « J.C.S. », 169 (1946).

(12) I. Dostrovski e E. D. Hughes, « J.C.S. », 157–164 (1946).

(15) I. Dostrovsky, E. D. Hughes e C. K. Ingold, « J.C.S. », 173 (1946), ved. anche ref. [10].

dati ottenuti da codesti autori per molecole che differiscono da quelle da noi considerate per avere un gruppo metile invece del nitrogruppo. I calcoli sono stati eseguiti per i bromuri, ma i risultati sarebbero approssimativamente gli stessi anche per i corrispondenti cloruri.

TABELLA II.

Composto	Q (Kcal/mole)	Composto	Q (Kcal/mole)
$(CH_3)_3{\equiv}C{-}Br$	2,7 (15)		2,08
$(CH_3)_2CH{-}CH_2Br$	2,3 (15)		2,12
$(CH_3)_3C{-}CH_2Br$	12,6 (15)		10,12
$CH_3{-}CH_2{-}CH_2Br$	0,9 (15)	$NO_2{-}CH_2CH_2Br$	1,28

L'esame di questa tabella ci dice che i due gruppi paragonati hanno approssimativamente lo stesso effetto dal punto di vista dell'impedimento sterico.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – È noto che il nitrogruppo ha un forte potere di attrazione per gli elettroni e quindi la sua presenza ostacola fortemente le reazioni a meccanismo S_{N_1}, mentre può favorire il meccanismo S_{N_2}.

Questo fatto si manifesta a volte con un cambiamento del meccanismo: così l'1–cloro, 2-nitroetano viene idrolizzato in miscele acqua–diossano di varie composizioni con velocità notevolmente superiore a quelle riscontrate per il cloruro di etile o di propile.

Lo stesso succede per la reazione in acqua–alcol e con $AgNO_3$ idroalcolico.

Quando, probabilmente per ragioni steriche, il cambiamento di meccanismo non è possibile, si ha l'effetto opposto; così confrontando il 2–nitro, 2–bromopropano con il bromuro di isobutile terziario vediamo che le reazioni a meccanismo S_{N_1} (solvolisi e reazione con $AgNO_3$ in ambiente idroalcolico) sono molto rallentate dalla presenza del nitrogruppo. Lo stesso fenomeno si riscontra nei corrispondenti cloruri.

Nel caso del cloruro di isobutile primario e dell'1–cloro, 2–nitropropano l'azione rallentante si verifica per la reazione solvolitica mentre la complessa reazione con $AgNO_3$ non sembra essere sensibilmente influenzata.

Invece nel caso del cloruro di neopentile e del corrispondente nitroderivato poiché per effetto sterico il meccanismo S_{N_2} è praticamente proibito per qualunque reazione, il nitrogruppo rallenta la reazione con $AgNO_3$ che è l'unica sinora esaminata per questo composto. Nell'1-cloro, 2-metil, 2-nitro propano abbiamo riscontrato una estrema difficoltà a liberare il cloro, dovuta al fatto che le reazioni a meccanismo S_{N_2} sono rallentate da impedimento sterico e quelle a meccanismo S_{N_1} dal forte richiamo di elettroni da parte del nitrogruppo.

Per quanto l'insieme dei dati sperimentali sinora raccolti direttamente o dalla letteratura possa sembrare notevole, essi sono ancora insufficienti, anche per l'inevitabile carattere di frammentarietà, per l'elaborazione di una teoria quantitativa per i nitrocloroderivati alifatici. È pertanto confortevole che tutti i dati a disposizione siano interpretabili, almeno qualitativamente, in base alla teoria elettronica delle reazioni organiche.

Chimica fisica. — *Una teoria della reattività chimica applicata alla reazione di apertura dell'anello di cumarine-metilate* (*). Nota di GIOVANNI GIACOMETTI, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

È stato ampiamente studiato dal punto di vista sperimentale sia spettrografico [1] che polarografico [2], un gruppo di cumarine sostituite e si hanno buoni dati a disposizione anche sulla velocità di apertura dell'anello cumarinico in ambiente alcalino e sull'andamento di questa con la metilazione di varie posizioni.

Longuet-Higgins ha mostrato [3] che la teoria degli orbitali molecolari nell'approssimazione LCAO, combinata con la teoria delle perturbazioni del primo ordine, offre un mezzo molto semplice per calcolare in che modo effetti elettronici modificano le energie degli stati di transizione nel caso di molecole coniugate alternanti. Egli si è limitato a trattare reazioni di sostituzione ma nulla impedisce che la teoria sia applicata anche ad altri casi.

Il caso dell'apertura dell'anello lattonico per cumarine variamente metilate offre, come vedremo, un tipico esempio di applicabilità della teoria.

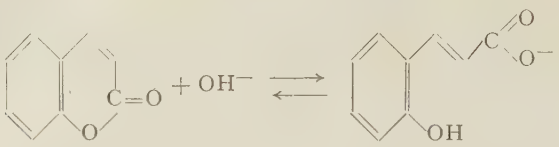
LA TEORIA. – Il metodo è basato sul concetto che differenze in velocità di reazioni in sistemi coniugati sono determinate principalmente dalle variazioni nell'energia degli elettroni π.

Illustreremo il procedimento specificamente per il caso che abbiamo preso in esame.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Padova e Centro di Polarografia del C.N.R.

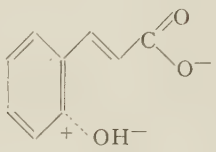
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

La reazione di apertura dell'anello cumarinico è



(I) (II)

Possiamo pensare che il complesso di transizione sia del tipo:



(III)

Il valore del ΔH di attivazione sarà dato essenzialmente dalla differenza nelle energie π dei due sistemi (I) e (III).

Consideriamo ora la stessa reazione con un sostituente, per esempio CH_3 [1].

In prima approssimazione l'effetto di questo metile è di aumentare l'elettronegatività dell'atomo di carbonio al quale è unito.

Se indichiamo con E_o^j l'energia di un elettrone π nell'orbitale molecolare ψ_j del composto non sostituito, la sostituzione di un metile cambierà questa energia dal valore E_o^j a E^j e per la teoria delle perturbazioni del primo ordine si avrà:

$$E^j = E_o^j + \int \psi_j^* H' \psi_j \, d\tau$$

dove H′ denota la differenza tra i due hamiltoniani. Ora, in approssimazione LCAO:

$$\psi_j = \sum_r c_r^j \Phi_r$$

cosicché:

$$E^j = E_o^j + \sum_r \sum_s c_r^j c_s^j \int \Phi_r^* H' \Phi_s \, d\tau.$$

Il termine più importante degli integrali sotto la doppia sommatoria è il termine coulombiano del carbonio sostituito o dei carboni sostituiti, se ve n'è più di uno:

$$\alpha_r = \int \Phi_r^* H' \Phi_r \, d\tau .$$

(1) Secondo la definizione di LONGUET-HIGGINS [3] la reazione è iso-aromatica con la precedente, qualunque sia la posizione del metile.

Per cui, con una discreta approssimazione:

$$E^j = E^j_o + \sum_r c^{j2}_r \alpha_r$$

e sommando su tutti gli elettroni π:

$$E = E_o + \sum_r q_r \alpha_r \qquad (1)$$

dove q_r è la densità elettronica all'atomo r del composto non sostituito. Rimarchiamo ancora che α_r rappresenta la differenza nell'integrale coulombiano tra l'atomo di carbonio sostituito e quello non sostituito. Per un sostituente come il metile è $\alpha_r > 0$.

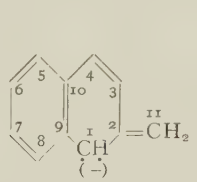
L'equazione (1) implica che l'alterazione di un integrale coulombiano di un atomo r in un dato substrato cambia l'energia π di $q_r \alpha_r$ approssimativamente. Per una data reazione di questo substrato la perturbazione α_r diminuirà perciò l'energia di attivazione di:

$$\alpha_r (q_r - q'_r)$$

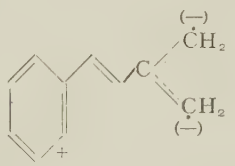
dove q'_r è la densità elettronica alla posizione r nel complesso di transizione non sostituito.

RISULTATI DEI CALCOLI. – Il calcolo delle q_r negli idrocarburi alternanti dispari [2] è di una estrema semplicità e può essere fatto senza risolvere alcuna equazione secolare.

Siccome gli idrocarburi isoaromatici con (I) e (III):



(I')

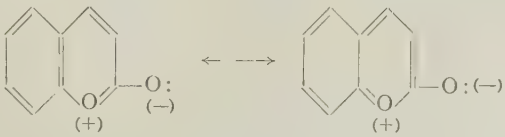


(III')

sono ambedue alternanti dispari [3] calcoleremo le q_r e q'_r per essi e terremo conto della sostituzione dell'ossigeno al carbonio, in posizione 1 e 11, nello

(2) Per le definizioni di idrocarburo alternante dispari e di idrocarburo isoaromatico, ved. [4].

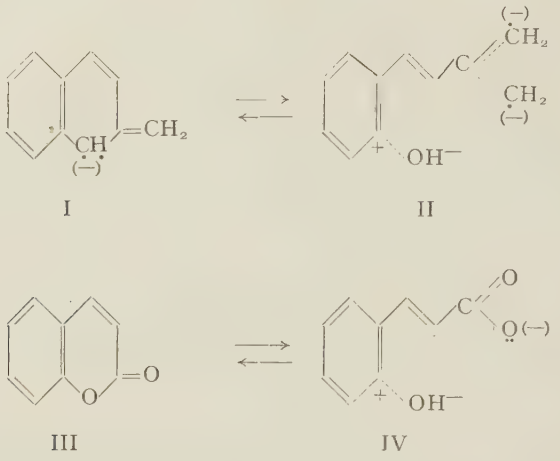
(3) Il doppietto elettronico non legante dell'ossigeno lattonico è considerato come prendente parte alla coniugazione. Vi è infatti evidenza spettroscopica [1] che formule mesomere del tipo:



abbiano un « peso » molto notevole già nello stato fondamentale.

stesso identico modo fatto per la sostituzione metilica. L'α in questo caso sarà diverso da quello dovuto alla sostituzione metilica.

Lo schema seguente illustra il criterio usato:



$$E_{III} - E_I = \sum_{I}^{II} \alpha_r q_r \qquad E_{IV} - E_{II} = \sum_{I}^{II} \alpha_r q'_r$$

$$E_{IV} - E_{III} = (E_{II} - E_I) - \sum_{I}^{II} \alpha_r (q_r - q'_r) .$$

Il contributo $E_{II} - E_I$, come pure il contributo nella sommatoria dovuto alla sostituzione degli ossigeni in I e II, è costante. Perciò:

$$E_{IV} - E_{III} = K - \alpha \sum_{2}^{10} (q_r - q'_r) = \Delta H^*$$

dove α è dovuto solo alla sostituzione metilica.

Il calcolo delle q_r e q'_r è stato fatto secondo il metodo di Dewar [4]. I risultati sono rappresentati nella fig. 1.

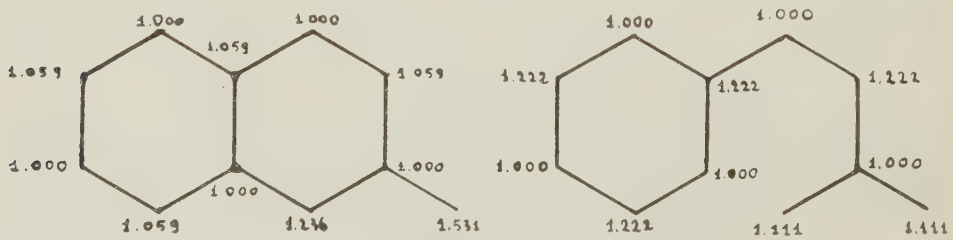


Fig. 1.

Le energie di attivazione, calcolate da questi schemi, sono confrontate in tabella I con quelle sperimentali.

TABELLA I.

Composti	ΔH sper. Kcal/mole	ΔH sper. medio	ΔH calc.
Cumarina	13,63		
5–CH_3 cumarina	14,45	13,86 ± 0,59	K
7–CH_3 cumarina	13,49		
3–CH_3 cumarina	18,42		
6–CH_3 cumarina	18,43	18,22 ± 0,40	K + 0,163 α
8–CH_3 cumarina	17,82		
4–CH_4 cumarina	17,52		K
3–4–CH_3 cumarina	21,89		K + 0,163 α

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – Se esaminiamo i dati sperimentali possiamo dire che vi sono due distinti gruppi di composti per cui l'energia di attivazione è con buona approssimazione costante (deviazioni del 3–4 % sulla media).

Precisamente la cumarina non sostituita, la 5–CH_3– e la 7–CH_3–cumarina, con ΔH medio di 13,86 ± 0,59 e dall'altra parte la 3–CH_3, la 6–CH_3 e la 8–CH_3–cumarina con ΔH medio di 18,22 ± 0,40.

I risultati della teoria rendono conto in modo soddisfacente di questi due gruppi mentre il composto sostituito in 4 resta anomalmente fuori.

Il rapporto tra i valori di ΔH sperimentali e di quello calcolato ci dà per α un valore di 26,7 Kcal. che è di un ordine di grandezza assolutamente ragionevole [5].

Per quanto riguarda il composto 4–sostituito, la teoria predice una energia di attivazione di ca. 13,86 mentre il valore sperimentale di 17,52 si avvicina di più a quelli del secondo gruppo di composti.

Questa differenza di 3,66 Kcal resta inspiegata dalla presente teoria. È da notare che la stessa identica differenza esiste per il composto 3–4–sostituito, per cui i calcoli predirebbero un valore di 18,22 Kcal circa, mentre il valore sperimentale è 21,89 (differenza 3,67 Kcal).

D'altra parte il comportamento delle cumarine sostituite in 4– è anomalo per molte altre proprietà: odore, ossidabilità, comportamento spettrale (ved. ref. 1).

Si potrebbe pensare che la causa di tale anomalia si trovi al di fuori degli effetti elettronici trattati nella presente Nota, ma, data l'approssimazione molto cruda, non è possibile affermarlo con rigore prima di aver con-

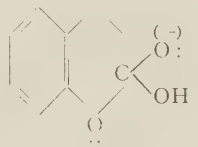
dotto a termine i calcoli per migliori approssimazioni. In particolare occorrerà tener conto preventivamente degli eteroatomi mediante l'introduzione degli opportuni parametri empirici ed eventualmente anche degli effetti iperconiugativi del metile il cui andamento colla posizione dello stesso è difficile da prevedere senza l'attuale sviluppo dei calcoli.

È ad ogni modo interessante il risultato del presente trattamento che rivela come la posizione 4– sia anomala nel senso che, o risente più delle altre posizioni degli effetti perturbativi di ordine inferiore oppure è perturbata in modo singolare da effetti non elettronici.

Si spera che le ulteriori approssimazioni in programma possano dare una risposta al quesito e contribuiscano pure ad illuminare la interpretazione delle citate anomalie nelle altre proprietà di questi interessanti composti.

Ringrazio vivamente il prof. G. Semerano e il prof. A. Mangini per le interessanti discussioni sull'argomento, come pure i dottori Bernard e M.me Alberte Pullman per utili critiche e suggerimenti.

Nota aggiunta alle bozze. – Nel proseguire lo studio per le migliori approssimazioni mi sono accorto che un forse più attendibile schema per il complesso attivato (molto simile a quelli che si postulano nelle sostituzioni aromatiche) è il seguente:



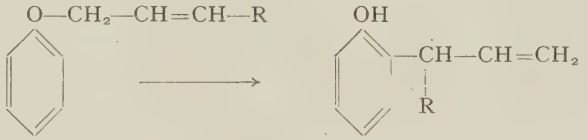
I risultati della presente Nota non cambiano però se si postula questa forma piuttosto che la III. In ogni modo la questione sarà discussa ampiamente nella Nota successiva.

Bibliografia.

[1] A. Foffani, A. Mangini, R. Passerini e G. Semerano, in corso di stampa. Comunicazioni private.
[2] A. Foffani, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Classe sc. fisic. mat. e nat. [VIII], *14*, 418 (1953).
[3] Longuet-Higgins, « J. Chem. Phys. », *18*, 265 (1950).
[4] Dewar, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 3341 (1952).
[5] Matsen, « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 5244 (1950).

Chimica organica. – *La trasposizione di Claisen degli esteri γ–fenossicrotonici* (*). Nota di LUIGI CANONICA e ALBERTO FIECCHI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

La trasposizione di Claisen, la quale trasforma gli esteri allilici dei fenoli negli isomeri o–allifenoli, venne ampiamente studiata, oltre che su eteri sostituiti in vario modo nel nucleo aromatico, su numerosi altri, sostituiti da radicali alchilici od arilici nella catena allilica (1). La natura degli o–allifenoli che provengono da questi ultimi dimostra che nella trasposizione si determina l'inversione dell'allile, secondo lo schema (I):

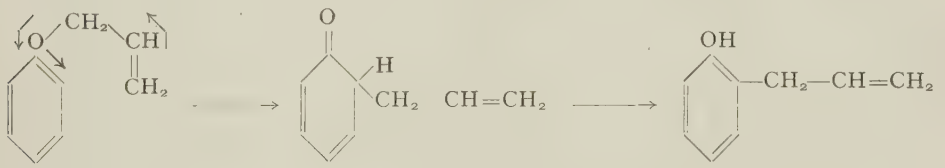


(I)

Alla medesima conclusione pervengono le recenti ricerche condotte mediante la tecnica degli elementi marcati (2).

Il decorso della trasposizione, che cineticamente risulta del primo ordine (3), si deve ritenere intramolecolare. L'aspetto cinetico del processo e la riscontrata inversione dell'allile vengono bene interpretati dallo schema di reazione supposto da Claisen e Tietze (4) e ripresentato in forma più moderna da Hurd e Pollack (5).

Immaginano questi Autori che la trasposizione muova dallo stabilirsi di una lacuna elettronica all'estremo della catena allilica, seguìto dalla saldatura alla posizione o– del nucleo (II):



(II)

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) Vedi il lavoro riassuntivo di TARBELL in *Organic Reactions*, vol. II, Wiley e Sons. Ed. New York 1944 e quello dello stesso Autore in «Chem. Reviews», *27*, 495 (1940).

(2) RYAN e O' CONNOR, «J. Am. Chem. Soc.», *74*, 5866 (1952); H. e K. SCHMID, «Helvetica Chim. Acta», *35*, 1879 (1952).

(3) KINCAID e TARBELL, «J. Am. Chem. Soc.», *61*, 3085 (1939).

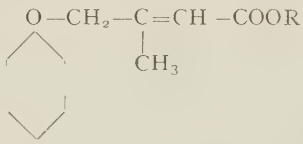
(4) «Ber.», *58*, 275 (1925).

(5) «J. Org. Chem.», *3*, 550 (1939); sostanzialmente identica è l'interpretazione di MUMM, HORNHARDT e DIEDERICKSEN, «Ber.», *72*, 100 (1939).

Anche se apparentemente taluni dati sperimentali male vi si accordano [1] questa interpretazione pare più soddisfacente di altre proposte [6]. Per valutare la sua validità, interessava lo studio del comportamento degli eteri recanti, all'estremo della catena allilica sostituenti atti, per la loro elettroaffinità, a contrastare il prodursi della lacuna elettronica al carbonio stesso, quali il carbonile e le funzioni da esso derivate ecc.: ma di tali prodotti era noto un unico termine, il γ–fenossicrotonato di etile (III), ottenuto con scarse rese attraverso un procedimento relativamente laborioso [7].

(III)

Nel corso di recenti ricerche [8] noi avevamo individuato un semplice metodo per la preparazione degli esteri γ–fenossicrotonici (III) e γ–fenossi –β–metilcrotonici (IV) e (V):



R=CH_3 : (IV)

R=C_2H_5: (V)

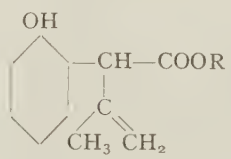
riferiamo ora sul comportamento di tali composti nelle condizioni atte a promuovere la trasposizione di Claisen.

A meno di una modesta frazione, la quale resinifica, il γ–fenossicrotonato di etile (III) si recupera inalterato dopo riscaldamento a 230°, in atmosfera inerte, per la durata di quindici ore: a temperatura più elevata (270°) la formazione di resine diviene cospicua, ma non è dato di isolare alcun prodotto di trasposizione.

Il comportamento dell'estere fenossicrotonico appare rimarchevole, ove si consideri che tutti gli allileteri della serie benzenica aventi una posizione o–libera fino ad ora studiati (oltre cento) subiscono la trasposizione, già a temperature inferiori (180–220°), in un tempo di 2–3 ore o, più spesso, di meno di un'ora.

Il riscaldamento a 220° trasforma invece, se pur molto lentamente, gli esteri metilico (IV) ed etilico (V) dell'acido γ–fenossi –β–metilcrotonico.

Il consueto decorso della reazione fornirebbe i corrispondenti esteri α-(o–ossifenil)–isopropenilacetici (VI):



(VI)

(6) Niederl e Storch, « J. Am. Chem. Soc. », *55*, 284 (1933).

(7) Dey, « J. Chem. Soc. », 1060 (1937).

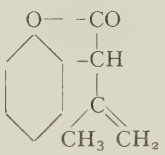
(8) « Rendic. Ist. Lombardo Scienze e Lettere », *87*, 257 (1954).

Il prodotto ottenuto risulta invece, nei due casi, il medesimo: trattasi di un solido cristallino bianco, p. f. 97° per il quale l'analisi elementare indica una formula bruta che deriva da quella degli esteri di partenza per eliminazione di una molecola di alcool metilico o, rispettivamente, etilico; la formazione dei due alcooli è d'altro canto dimostrabile, nel corso delle reazioni.

Le sue caratteristiche sono quelle di un lattone fenolico: esso non fornisce la reazione con il cloruro ferrico, ma si discioglie lentamente negli alcali caustici, a dare soluzioni intensamente colorate in giallo, le quali copulano prontamente con i diazoderivati.

Nella molecola del prodotto p. f. 97° è ancora presente il legame etilenico, che facilmente si idrogena su carbone palladiato, a temperatura e pressione ambiente; il lattone saturo ottenuto reagisce con idrazina, a dare l'idrazide di un acido fenolico.

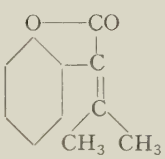
Una struttura lattonica, quale la (VII), poteva derivare dalla (VI) per eliminazione di



(VII)

alcool tra il carbossile esterificato e l'ossidrile fenolico.

Ma l'effetto batocromo che si manifesta per dissoluzione negli alcali, analogo a quello già noto per le cumarine [9] favoriva l'ipotesi di una struttura di lattone α–β– non saturo, quale la (VIII), di un 3–isopropilidencumaranone–2 derivata dalla (VII) per migrazione del doppio legame.



(VIII)

Si deve escludere che tale migrazione sia determinata dall'alcali, poiché anche dopo più ore il lattone riprecipita inalterato dalle soluzioni alcaline per acidificazione.

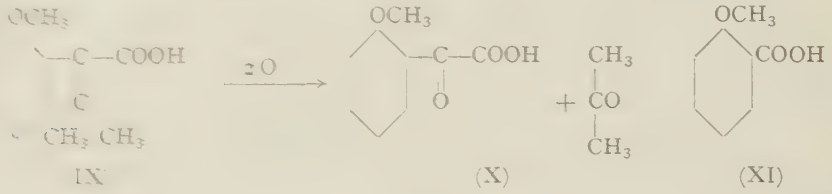
È anche noto che trasposizioni del doppio legame analoghe a quella in questione possono facilmente aver luogo per semplice azione del calore: così nella isomerizzazione degli acidi α–fenilvinilacetici ad α–fenilcrotonici [10].

A conferma della struttura (VIII) abbiamo sottoposto il lattone alla azione di un eccesso di solfato dimetilico in soda alcoolica: ne risulta, per apertura del ponte lattonico e metilazione dell'ossidrile fenolico liberatosi, l'acido (IX). Per ossidazione permanganica, questo fornisce, in modo assai

(9) Bleibtreu, « Ann. », *59*, 177 (1848).
(10) Gilman e Harris, « J. Am. Chem. Soc. », *51*, 3543 (1931).

netto, acetone ed un chetoacido sciropposo, molto solubile in acqua oltre che nei solventi organici, caratterizzabile attraverso il suo 2–4–dinitrofenilidrazone: trattasi evidentemente dell'acido o–metossifenilgliossilico (X), fino ad ora non conosciuto.

Insistendo nell'azione ossidante, esso viene ulteriormente demolito, a dare l'acido o–metossibenzoico (XI) identico al prodotto noto.



Dal punto di vista cinetico, interessa rilevare che la trasposizione del γ–fenossi–β– metilcrotonato di etile decorre più velocemente di quella del corrispondente estere metilico, del quale si recuperano forti quantità pur dopo un riscaldamento di dieci ore. Nell'estere recuperato non è dato di dimostrare la presenza né dell'estere fenolico (VI), né del lattone (VII): tali composti che è logico supporre quali termini intermedi del processo, vengono evidentemente trasformati, nelle condizioni di esperienza, con velocità elevata.

Nel loro insieme, i fatti sopra riferiti bene si accordano con lo schema di Hurd e Pollack [5]: nel caso del γ–fenossicrotonato di etile la presenza al carbonio terminale della catena allilica del carbossile esterificato inibisce completamente la trasposizione.

Per gli esteri γ–fenossi –β–metilcrotonici, che, per quanto in modo insolitamente lento, subiscono la trasposizione, la presenza di un alchile al carbonio β–controbilancia in parte tale influenza negativa: il che può interpretarsi con la elettroaffinità del radicale alchilico, contrastante quella del carbossile esterificato.

Parte sperimentale.

Azione del calore sugli esteri γ–fenossi– e γ–fenossi–β–metilcrotonici. – Grammi 6 di γ–fenossi– β–metilcrotonato di etile [8] vengono riscaldati, in bagno a lega a 220°, in un palloncino munito di un corto refrigerante a ricadere, raffreddato ad aria. Nel palloncino si invia una lenta corrente di anidride carbonica bene essicata: questa trascina vapori di alcool etilico, che cede all'acqua di un contabolle installato all'uscita del recipiente di reazione: ben presto il contenuto del contabolle fornisce evidente la reazione dello iodoformio.

Dopo 5 ore di riscaldamento la massa di reazione per raffreddamento rapprende in una massa cristallina, la quale si purifica per distillazione, raccogliendo la frazione bollente [illegible] alla pressione di 1,2 mm. Questa solidifica in lunghi cristalli prismatici che [illegible]izzati da benzolo–etere di petrolio (1 : 3); p. f. 97°, costante dopo altra cri-[illegible].

	trov. % :	C	75,49;	75,74	H 5,69;	5,75
per $C_{11}H_{12}O_2$	calc.		75,84		5,79.	

La resa in prodotto puro è di gr 2,3. In soluzione alcoolica esso non assume colorazione alcuna per aggiunta di cloruro ferrico; insolubile nelle soluzioni dei bicarbonati alcalini, si discioglie lentamente negli alcali caustici acquosi, immediatamente in soda alcoolica con colorazione giallo oro del tutto simile a quella che fornisce nelle medesime condizioni la 4–metilcumarina.

Le soluzioni in alcali copulano prontamente con il diazo dell'acido solfanilico, a dare un azoico solubile nei carbonati alcalini con colorazione arancione, negli alcali caustici con colorazione rosso carico.

Dalle soluzioni in alcali il lattone riprecipita inalterato per acidificazione, p. f. 97° anche in miscela con il prodotto non trattato, in modo praticamente quantitativo.

Analogo è il comportamento al riscaldamento del γ–fenossi–β–metilcrotonato di metile per il quale la trasposizione pare però procedere più lentamente. Dopo 10 ore di riscaldamento la massa si fraziona per distillazione: le teste, dopo rettifica, presentano le medesime caratteristiche dell'estere di partenza (n_D^{14} 1,5286 contro n_D^{20} 1,5280 del prodotto di partenza) e non forniscono reazione alcuna con il cloruro ferrico.

La frazione successiva dà, dopo purificazione, gr 1,6 di 3–isopropilidencumaranone–2, identico per ogni riguardo ed al saggio di fusione in miscela al prodotto ottenuto dal γ–fenossi–β–metilcrotonato di etile.

I tentativi di trasposizione del γ–fenossicrotonato di etile venivano condotti, con le modalità prima indicate, ma operando a 230° per un tempo di 15 ore. Per distillazione si recuperava il prodotto di partenza inalterato nel punto di ebollizione e nell'indice di rifrazione, residuando dalla distillazione solo un piccolo residuo resinoso.

Idrogenazione catalitica del 3–isopropilidencumaranone–2. Idrazide dell'acido α–(o–ossifenil)–isovalerianico. – Milligrammi 111 di 3–isopropilidencumaranone–2 disciolti in cm³ 5 di metanolo vengono idrogenati a temperatura e pressione ambiente su mg 10 di biossido di platino. Dopo 15′ l'assorbimento di idrogeno si arresta essendosene consumati cm³ 18,4 (a c. n.; teorico per un doppio legame cm³ 16,9). La soluzione, filtrata dal catalizzatore viene addizionata di cm³ 0,2 di idrato di idrazina bollendo poi a ricadere per 2 ore; si allontana da ultimo il solvente nel vuoto ed il residuo si cristallizza per due volte da acqua. L'idrazide si presenta in fogliette bianche, p. f. 99–101°. All'analisi:

	trov. °/₀:	N	13,47
per $C_{11}H_{14}O_2N_2$	calc.		13,58

Acido α–(orto metossifenil)–β–β–dimetilacrilico. – Grammi 1,57 di 3–isopropilidencumaranone–2 vengono disciolti in cm³ 10 di idrato sodico al 20 °/₀ e cm³ 8 di metanolo, aggiungendo poi gr 2,26 di solfato dimetilico.

Dopo una notte di riposo a temperatura ambiente si riscalda per due ore su bagnomaria, con refrigerante a ricadere, si evapora la maggior parte del metanolo e la soluzione residua diluita con cm³ 10 di acqua, si precipita con acido cloridrico. Il precipitato di acido α–(o–metossifenil)–β–β–dimetilacrilico già praticamente puro (gr. 1,34) si filtra e si cristallizza da benzolo–etere di petrolio; p. f. 145°,5 costante dopo altra cristallizzazione. All'analisi:

	trov. °/₀:	C 69,93	H 6.89
per $C_{12}H_{14}O_3$	calc.	69,88	6,84

L'acido α–(o–metossifenil)–β–β–dimetilacrilico è relativamente stabile all'azione del calore; dopo due ore di riscaldamento a 170° si recupera quasi inalterato, senza che si possa mettere in evidenza un'eliminazione di alcool metilico con formazione del lattone di partenza.

Demolizione ossidativa dell'acido α–(o–metossifenil) β–β–dimetilacrilico – Milligrammi 507 di acido α–(o–metossifenil) –β–β–dimetilacrilico vengono disciolti in cm³ 5 di soluzione al 7 °/₀ di bicarbonato sodico. Operando a temperatura ambiente, si introducono a gocce ed agitando nel tempo di un'ora, grammi 1,29 di permanganato potassico disciolti in cm³ 20

di acqua. Soprattutto all'inizio, l'ossidante viene ridotto molto rapidamente: un eccesso minore di quello indicato lascia sussistere quantità considerevoli del prodotto di partenza. Si filtra dal biossido di manganese lavandolo con acqua e la soluzione si distilla fino ad 1/3 circa del suo volume; le ultime frazioni del distillato non dànno più precipitato con 2–4–dinitrofenilidrazina. Il distillato fornisce intensa la reazione dello iodoformio; trattandolo con un eccesso di 2–4–dinitrofenidrazina, nel modo consueto, si ottengono mg. 271 (il 49 % del teorico) di 2–4–dinitrofenilidrazone dell'acetone, identico al prodotto preparato per confronto.

La soluzione residua dalla distillazione non dà, per aggiunta di acido cloridrico, precipitato alcuno: per ripetuta estrazione con etere, ed evaporazione del solvente dagli estratti, abbandona un residuo vischioso, molto solubile in acqua e nei solventi organici.

Dalla quinta parte di essa, precipitando con soluzione solforica di 2–4–dinitrofenilidrazina vengono ottenuti mg 97 (il 54 % del teorico) di un 2–4–dinitrofenilidrazone solubile in carbonato potassico. Dopo cristallizzazione dall'alcool metilico questo si presenta in scagliette lucenti di colore giallo carico p. f. 199°. All'analisi:

	trov. % :	N	15,10
per $C_{15}H_{12}O_7N_4$	calc.		15,55

Il rimanente della soluzione, proveniente dalla prima ossidazione, viene riscaldato su bagnomaria dopo aggiunta di mg. 340 di permanganato potassico solido. Dopo cinque ore l'ossidante è scomparso: la soluzione, filtrata dal biossido di manganese, e concentrata a piccolo volume separa per acidificazione un acido oleoso che ben presto rapprende in massa solida. Dopo cristallizzazione da acqua, l'acido risulta identico all'o–metossibenzoico ottenuto dall'acido salicilico.

Fisiologia vegetale. — *Azione inibente degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti di pisello* (« *Pisum sativum* ») (*). Nota di ORESTE ARRIGONI e ERASMO MARRÈ, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

Precedenti ricerche hanno dimostrato come la presenza di auxina nel mezzo esterno mantenga o, in determinate circostanze, innalzi il tenore in acido ascorbico ridotto in sezione di coleoptili d'avena e in segmenti di internodi di pisello [1]. Altri dati ottenuti in questo laboratorio suggeriscono per la forma ossidata dell'ascorbico (acido deidroascorbico) un'effetto inibente su determinati sistemi respiratori [2]. Infine, da una terza serie di ricerche, emerge per le auxine un'azione di stimolo sull'attività deidrogenasica in preparati enzimatici ottenuti da tessuti in fase di rapida crescita [3,4].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta del 13 novembre 1954.
(1) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *16*, 758 (1954).
(2) S. TONZIG, E. MARRÈ, F. TREZZI e G. LAUDI, in corso di stampa.
(3) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *15*, 433 (1953).
(4) E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *16* (1954).

I risultati di questi tre ordini di ricerche ci hanno suggerito la possibilità di un effetto diretto, o quanto meno rilevabile in estratti, delle auxine sul sistema enzimatico che catalizza l'ossidazione dell'acido ascorbico: ipotesi leggittimata anche dall'esistenza, nella così scarsa letteratura sugli effetti « in vitro » dell'auxina, di un dato secondo cui l'acido indolacetico apparentemente inibirebbe l'ossidazione dell'acido ascorbico, misurata manometricamente [5].

Materiali e metodi. – Il materiale usato per la preparazione degli estratti è stato fornito, come in una ricerca precedente [4] dalla parte estrema (5 mm.) del fusticino, con le relative foglioline, di piantine eziolate di *Pisum sativum*, var. Alaska, coltivate per 8–10 giorni su vermiculite in stanza oscura, termoregolata a 25 gradi C. Gli estratti sono stati ottenuti tritando i tessuti in mortaio, in presenza di sabbia di quarzo e tampone ai fosfati, ed eliminando il residuo insolubile (cellule o loro brandelli, amido, plastidi, mitocondri) mediante centrifugazione a circa 7000 × g.

La demolizione dell'acido ascorbico negli estratti incubati a temperatura ambiente, e agitati con un ritmo di 60 oscillazioni al minuto primo, è stata seguìta determinando con il metodo al 2–6 diclorofenolindofenolo la quantità di acido ascorbico ancora presente in aliquote prelevate a intervalli successivi, e stabilizzate mediante aggiunta di un volume di acido metafosforico 7 %.

Esperienze e risultati. – L'azione inibente delle due auxine, a concentrazioni del tutto fisiologiche, sulla ossidazione dell'acido ascorbico nei nostri estratti risulta dai dati della tabella I, mentre la natura strettamente enzimatica del fenomeno è dimostrata dai dati della tabella II, che indicano come la lenta ossidazione dell'acido ascorbico in estratti portati per due primi in bagnomaria bollente non sia per nulla influenzata dagli acidi indolacetico e naftalenacetico.

L'azione delle due auxine sulla ossidazione dell'acido ascorbico non sembra potersi imputare ad una attivazione ad opera delle auxine di sistemi deidrogenasici agenti su substrati endogeni, capaci di ridurre l'acido deidroascorbico tramite il glutatione [6]: infatti, come risulta dalla tabella III, l'effetto inibente delle auxine compare ancora ben chiaro anche a pH relativamente bassi (5,5), praticamente incompatibili con un'attività deidrogenasica di misura apprezzabile, specie tenendo conto dei brevi periodi di incubazione considerati.

Dalla tabella IV si rileva come la dialisi degli estratti, protratta per 24 ore, a temperatura di 2–3 gradi C., contro tampone ai fosfati, annulli completamente la capacità del sistema di reagire all'auxina: dato che induce a ritenere che il meccanismo d'azione di queste sostanze sull'ossidazione

(5) I. H. Miller and R. H. Burris, « Amer. Journ. Bot. », *38*, 547 (1951).
(6) E. Marrè e G. Laudi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *16*, 649 (1954).

dell'acido ascorbico sia mediata da un qualche sistema suscettibile di inattivazione o eliminazione durante la dialisi. L'idea dell'esistenza di un sistema intermedio, direttamente influenzato dall'auxina, e a sua volta capace di agire sulla ascorbico ossidasi, sembra del resto trovare conferma anche nella mancanza di una definita proporzionalità tra concentrazione in auxina e effetto inibente, e nella notevole dipendenza dell'intensità dell'effetto in questione dalle condizioni del materiale impiegato (età delle piantine, temperatura a cui è avvenuta la crescita, eccetera).

TABELLA I.

Azione degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione dell'acido ascorbico in estratti di tessuti di pisello. Composizione delle prove: tessuto 20 %, *tampone ai fosfati* 0.05 M, pH 6, *acido ascorbico* 250 gamma/cc. *Determinazioni su aliquote di* 1 cc. *Dati come medie di prove in doppio. I valori tra parentesi rappresentano le divergenze in per cento tra attività ascorbico ossidasica in presenza di auxina e attività dei controlli.*

Aggiunte	γ Acido ascorbico mancante dopo minuti primi:	
	5	10
Nessuna	122	224
Ac. indolacetico 10^{-5}	98 (— 19 %)	191 (— 14 %)
Ac. indolacetico $5 \cdot 10^{-6}$	92 (— 24 %)	188 (— 16 %)
Ac. indolacetico $2 \cdot 10^{-6}$	89 (— 27 %)	184 (— 18 %)
Ac. naftalenacetico 10^{-5}	88 (— 28 %)	166 (— 26 %)
Ac. naftalenacetico $5 \cdot 10^{-6}$	91 (— 25 %)	174 (— 22 %)
Ac. naftalenacetico 10^{-6}	79 (— 35 %)	162 (— 27 %)

TABELLA II.

Inattività delle auxine in estratti inattivati in seguito a permanenza per 2 primi in bagnomaria bollente. Altre condizioni come alla Tabella I.

Aggiunte	γ Acido ascorbico mancante dopo minuti primi:	
	20	60
Nessuna	2	8
Indolacetico 10^{-5}	3	9
Naftalenacetico 10^{-6}	2	8

Tabella III.

Effetto del pH *sull'azione inibente delle auxine sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico. Condizioni sperimentali come alla Tabella I, eccetto per quanto riguarda i valori del* pH.

Aggiunte	pH	γ Acido ascorbico mancante dopo minuti primi:	
		5	10
Nessuna	5,5	104	204
Naftalenacetico 10^{-5}	5,5	84 (— 19 %)	166 (— 18 %)
Naftalenacetico $5 \cdot 10^{-6}$	5,5	76 (— 27 %)	164 (— 19 %)
Nessuna	6,5	82	162
Naftalenacetico 10^{-5}	6,5	63 (— 23 %)	122 (— 24 %)
Naftalenacetico $5 \cdot 10^{-6}$	6,5	62 (— 24 %)	124 (— 23 %)

Tabella IV.

Inattività delle auxine sull'ossidazione dell'acido ascorbico in estratti dializzati. Condizioni sperimentali come alla Tabella I, ma estratti dializzati 24 ore contro tampone ai fosfati 0,03 M, *in camera refrigerata.*

Aggiunte	γ Acido ascorbico mancante dopo minuti primi:	
	5	10
Nessuna	98	184
Naftalenacetico 10^{-5}	100 (+ 2 %)	188 (+ 2 %)
Naftalenacetico $3 \cdot 10^{-6}$	98 (0)	182 (— 1 %)

Conclusioni. – I nostri risultati dimostrano come le auxine, a concentrazioni d'ordine fisiologico, e attraverso un meccanismo apparentemente distinto da quello per cui stimolano l'attività deidrogenasica, possano esercitare una spiccata azione inibente sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico « in vitro ». Reperto che appare pienamente concorde con quello dell'azione protettiva dell'auxina sul tenore in acido ascorbico ridotto nei tessuti vivi [1].

D'altra parte, controllo dell'ossidazione dell'acido ascorbico significa controllo dell'equilibrio tra ascorbico ridotto e deidroascorbico, nonché della concentrazione di quest'ultimo nella cellula: fatto le cui conseguenze

fisiologiche rivestono un indubbio interesse, quando dell'acido ascorbico si considerino sia l'attività generale, così spesso antagonista a quella dell'auxina [7,8,9,10] sia la capacità, diversa per le due forme ridotta e ossidata, di influenzare profondamente l'attività di determinati fermenti respiratori [2].

Si prospetta così la possibilità che l'azione inibente delle auxine sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico possa costituire una interessante componente del complesso meccanismo per cui queste sostanze regolano, nella cellula viva, l'attività dei sistemi respiratori, con tutte le conseguenze che ne derivano.

Genetica. — *Vitalità di eterozigoti per letali dominanti in «Drosophila melanogaster»* [*]. Nota di GIORGIO MORPURGO, presentata [**] dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Nel presente lavoro si espongono i risultati sulla vitalità relativa, in competizione con l'allele normale degli eterozigoti per i letali dominanti Pm, Gl, Sb in *Drosophila melanogaster*.

I dati sul comportamento di letali dominanti sono singolarmente scarsi in letteratura: lo studio più approfondito è dovuto a Teissier (1942 [1]) che ha studiato la vitalità di Cy e D in diverse condizioni di selezione ed in competizione oltre che col gene normale con altri geni recessivi. Sui letali recessivi il più ampio studio del problema è dovuto a Stern e Novitski (1948 [2]) e Stern et al. (1952 [3]). Questi autori hanno saggiato la vitalità di 75 letali recessivi trovandone la maggior parte sfavoriti anche allo stato eterozigote. Alcuni ne aumentavano lievemente la vitalità. Al contrario Masing (1941 [4]) ha trovato aumentata vitalità per 37 inversioni portanti letali, in confronto con le stesse inversioni libere da letali.

In tutte le ricerche su citate il metodo per misurare la vitalità degli eterozigoti per i letali è consistito nel confrontare le frequenze attese alla prima generazione con le frequenze osservate.

Scopo della presente ricerca è di saggiare la vitalità di eterozigoti per letali semidominanti, per vedere se anche in Drosofila similmente a quanto avviene nella specie umana per la Falcemia e la Microcitemia (Montalenti

(7) S. TONZIG, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., *47*, 468 (1950).

(8) S. TONZIG e F. TREZZI, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., *57*, 515 (1950).

(9) S. TONZIG e L. BRACCI, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., *57*, 535 (1950).

(10) S. TONZIG e F. TREZZI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *16*, 695 (1954).

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Genetica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) G. TEISSIER, «C. R. Acad. Sci.», (Paris) *214*, 241–244 (1942).

(2) C. STERN and E. NOVITSKI, «Science», 538–539 (1948).

(3) C. STERN et al., «Genetics», *37*, 413–449 (1952).

(4) R. A. MASING, «C. R. (Dokl) Acad Sci.», *20*, 173–176 (1938); *23*, 835–838 (1939).

1953 [5]) e nei Topi per il letale T (Dunn 1953 [6]) si possa avere nella popolazione il persistere di mutazioni letali e fenotipicamente svantaggiate. A questo scopo ho costruito la curva di selezione dei geni presi in esame e nel caso di Pm e Sb, ho con alcuni tests di vitalità ricercato le cause del loro comportamento.

MATERIALE E METODO. – Le mutazioni prese in esame sono Pm del II° cromosoma proveniente dal ceppo di letali bilanciati Cy/Pm, Sb del III° proveniente dal ceppo Sb Me/H, e Gl del III° proveniente dal ceppo Gl Sb/LVM. Il cromosoma normale è stato in ogni caso fornito dal ceppo Oregon–K, non isogenico con i precedenti. Le popolazioni sono state sempre tenute in doppio.

La popolazione iniziale era formata, in ogni caso, da 5 ♂♂ e 5 ♀♀ L/+, e la competizione è avvenuta fra gli individui L/+ e +/+ segreganti. Ho successivamente seguito l'andamento del gene in tali popolazioni, costruendone la curva di selezione.

Il metodo di allevamento è stato descritto in Morpurgo e Russi (1954 [7]). Le popolazioni sono state allevate in barattoli da mezzo litro con comune pappa al lievito, agar, mais e zucchero. Ad ogni generazione veniva fornito un barattolo fresco, aggiungendo due gr. di lievito e il vecchio barattolo era scartato.

Limitatamente al caso di Pm ho voluto anche indagare le cause del comportamento di tale mutazione saggiando per le due classi la natalità differenziale per diversi gradi di selezione, la velocità dello sviluppo larvale e confrontando la deposizione media di uova nei due gruppi.

RISULTATI. – Le tre mutazioni prese in esame saranno considerate separatamente.

Pm. – La mutazione Pm (Plum) del 2° cromosoma è indissolubilmente associata con l'inversione In (2LR) che inibisce il crossing–over in larga parte del 2° cromosoma. Fenotipicamente le Drosofile Pm/+ presentano un colore dell'occhio più scuro del normale dovuto a una diminuzione del pigmento rosso (Nolte 1954 [8]).

In figg. 1 e 2 (linea tratteggiata) si ha la percentuale per un periodo di 19 generazioni degli individui Pm/+ sul totale della popolazione, nelle due popolazioni gemelle. A punto e linea nelle stesse figure è rappresentato l'andamento teorico della selezione totale per un gene letale.

Alla 1ª generazione in cui, data la piccolezza della popolazione iniziale vi è una quasi totale mancanza di selezione, la percentuale degli individui Pm/+ scende fino a quasi il livello teorico.

(5) G. MONTALENTI, « Atti del IX Congresso Intern. di Gen. » (in corso di stampa).

(6) L. C. DUNN, « Acta Genet. », *4*, 139–151 (1953).

(7) G. MORPURGO e M. RUSSI, I° Convegno di Genetica dell'Associazione Genetica Italiana (in corso di stampa come Suppl. a « La Ricerca Scientifica »).

(8) D. J. NOLTE, « J. of Genetics », *52*, 1, 127–139 (1954).

Nella 2ª generazione risale parallelamente nei due barattoli, mantenendosi in un primo tratto della curva sull'80 per cento della popolazione totale, e diminuendo successivamente fino al 57 per cento.

Alla 15ª generazione la percentuale di mosche Pm/+ precipita fino a circa il 20 e il 42 per cento rispettivamente nel primo e nel secondo barattolo.

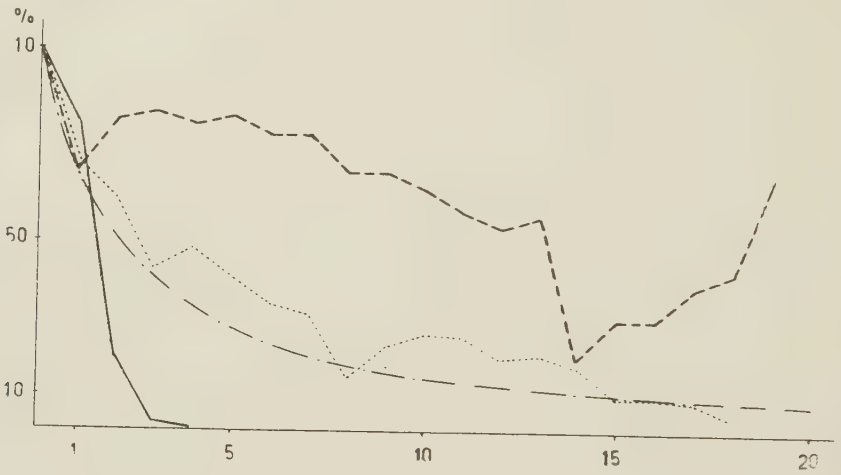


Fig. 1.

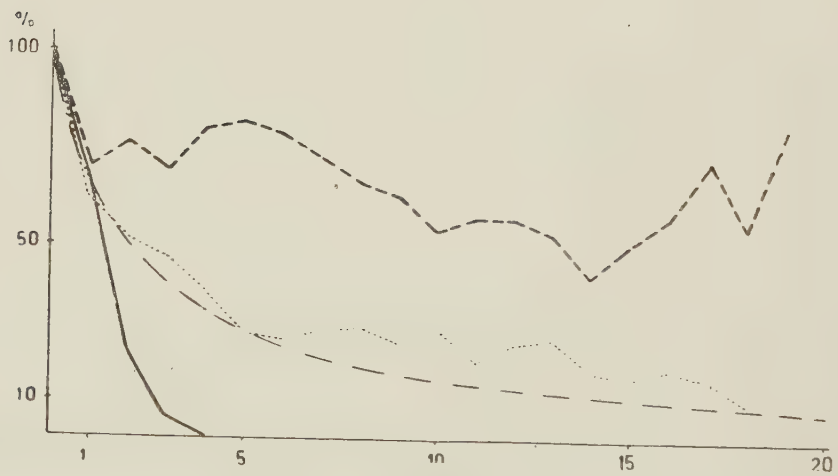


Fig. 2.

Figg. 1 e 2. – Curve di selezione dei letali Pm (linea tratteggiata). Sb (linea punteggiata) Gl (linea intera). A tratto e punto l'andamento della curva teorica. Sulle ascisse il numero di generazioni, sulle ordinate la percentuale degli individui L/+

La diminuzione è probabilmente dovuta a cause accidentali. In sole 4 generazioni, e cioè alla 19ª generazione la percentuale delle mosche Plum risale a circa il 70 per cento in tutte e due le popolazioni. Questa rapida, oscillazione ci dimostra che fra il 70 e il 55 per cento si trova realmente la posizione di equilibrio.

La curva teorica è a questa stessa generazione (19ª) a circa il 9 %. Non vi è dubbio quindi su di un forte vantaggio selettivo dell'eterozigote Pm/+.

Il fatto che alla prima generazione in cui la selezione era scarsa la percentuale degli individui Pm/+ sia discesa fino al livello teorico può far pensare che una delle cause di tale eterosi sia da ricercare in un vantaggio nella competizione allo stato larvale. Ho eseguito quindi un esperimento per provare questa ipotesi, ponendo un numero crescente di uova in barattoli con tre cm di diametro interno e controllando poi se vi fosse uno spupamento differenziale rispetto all'atteso di 2 : 1.

La tabella I dà i risultati di tale esperimento.

TABELLA I.

	N. uova	% di schiusa	Nati Pm/+	Nati +/+	χ^2
50 uova da Pm/+ Pm/+	2400	60,83	525	294	2,4
100 uova da Pm/+ Pm/+	5400	68,79	1140	499	6,82
200 uova da Pm/+ Pm/+	3200	74,3	648	255	11,26
50 uova da +/+ +/+	3800	84,62		2919	

In fig. 3 il grafico mostra come cresce la percentuale di individui Pm/+ spupati con l'aumentare del numero di uova per barattolo e quindi con l'aumentare della selezione.

I dati presentati mostrano chiaramente come il vantaggio selettivo dei Pm/+ che è nullo o negativo in condizioni di scarso affollamento (χ^2 non significativo) divenga sempre più forte con l'aumentare dell'affollamento della cultura. La raccolta di uova dai segreganti normali non ha rivelato nulla di anormale e la percentuale di nati è stata circa uguale a quella del ceppo Oregon nelle stesse condizioni.

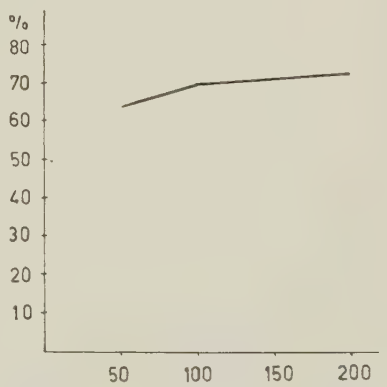


Fig. 3. – Aumento della percentuale di Pm/+ spupate con l'aumentare della selezione.

Sulle ascisse il numero di uova per vasetto, sulle ordinate la percentuale di Pm/+

Tale vantaggio selettivo dell'eterozigote nella vita larvale è probabilmente dovuto a una maggiore velocità di sviluppo, velocità che aumenterebbe con l'aumentare della selezione.

Ricerche di Maynard Smith and Maynard Smith (1954 [9]) su *Drosophila subobscura* mettono in evidenza che almeno per questa specie una maggiore velocità di sviluppo è la regola per le inversioni eterozigoti.

(9) J. MAYNARD SMITH and S. MAYNARD SMITH, «J. of Genetics», *52*, 1, 152–165 (1954).

Stern et al. (lavoro citato) hanno notato un identico fenomeno fra eterozigoti per letali recessivi e normali in *D. melanogaster*. Ricerche in corso nel nostro istituto ci fanno pensare che le ricerche di Maynard Smith possano essere confermate anche per *D. melanogaster*.

In Pm facendo schedature successive ho ottenuto i seguenti risultati:

I	schedatura	437	Pm/+	e	102 +/+	$\chi^2 = 49,5$
II	»	258	»	e	117 »	$\chi^2 = 0,3$
III	»	1030	»	e	512 »	$\chi^2 = 0,009$.

La durata dello sviluppo è quindi certamente più breve per i Pm/+ che per i +/+.

Ho confrontato anche la deposizione media di uova nelle due classi di individui, per vedere se l'eterozigote fosse avvantaggiato anche in questo

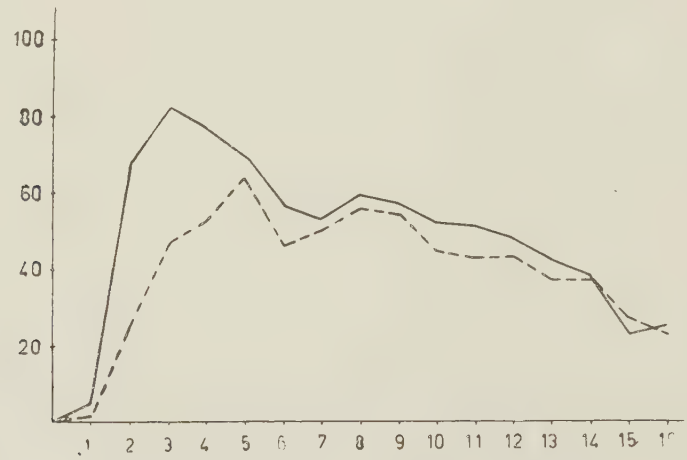


Fig. 4. – Deposizione media di uova delle ♀♀ Pm + (linea intera) e +/+ (linea tratteggiata).

Sulle ascisse il giorno di deposizione, sulle ordinate il numero di uova.

senso. La raccolta è avvenuta con i metodi consueti su tondo di carta nera, contando ogni giorno alla stessa ora le uova deposte da ogni ♀ e trasferendola poi in un barattolo fresco. Ho utilizzato a questo scopo 18 ♀♀ Pm/+ e 12 ♀♀ +/+ della stessa età. In fig. 4 è rappresentato l'andamento della deposizione delle uova; la linea intera rappresenta la deposizione media delle ♀♀ Pm/ +, la tratteggiata quella delle +/+. La bassa deposizione del primo giorno è dovuta all'eterizzazione che come è noto la inibisce. Il massimo di deposizione per le ♀♀ Pm/+ è raggiunto al terzo giorno con una media di 82 uova per ♀; lo stesso giorno la deposizione media delle ♀ +/+ è stata di 46 uova. Le normali raggiungono invece il massimo al quarto giorno con una media di 62 uova per ♀. La deposizione media delle Pm/+ resta comunque, sia pur di poco, sempre superiore e le due linee decrescono parallelamente intersecandosi solo dopo 15 giorni. Nell'andamento della deposizione ho inoltre notato fra i due gruppi differenze che possono avere grande

importanza nell'evoluzione delle popolazioni artificiali: Le ♀♀ Pm/+ depongono le uova in grossi grappoli sui bordi dei barattoli, mentre le ♀♀ +/+ le depongono più sparse e su tutto il disco di carta nera. Le cause della diminuzione della deposizione media sono diverse per i due gruppi di individui: nelle normali la deposizione di uova decresce regolarmente in tutte le ♀♀ con variabilità scarsa; le ♀♀ Plum presentano invece variabilità molto più ampia e la diminuzione nella deposizione media è dovuta almeno in parte al fatto che alcune ♀♀ divengono sterili o semisterili. Per dare una misura di tale variabilità non potendo per ragioni di spazio presentare i dati originali in tabella II le medie con l'errore e la deviazione standard per ogni giorno di deposizione.

TABELLA II.

Giorno	Deposizione media ♀♀ Pm/+	Deviaz. Stand.	Err. stand.	Deposizione media ♀♀ +/+	Deviaz. Stand.	Err. stand.
1	4,38	12,3	2,9	1,1	2,8	0,8
2	67,4	13,6	3,2	25,1	16,2	4,6
3	82,2	24,6	6,1	46,1	24,7	7,1
4	76,3	22,4	5,6	51,9	21,5	6,2
5	69,2	22,1	5,7	64,5	24,5	7,1
6	41,1	13,5	3,3	34,2	12,1	3,4
7	65,9	17,5	4,3	61,7	16,2	4,6
8	59,4	29,3	7,3	54,5	11,1	3,1
9	57,1	27,2	6,8	56,2	15,2	4,3
10	52,1	30,8	7,7	44,7	11,2	3,1
11	50,9	30,8	7,9	43,4	8,1	2,3
12	48,1	27,5	7,3	43,2	12,1	3,4
13	39,2	17,4	4,7	37,1	9,8	2,9
14	37,7	25,2	6,7	36,8	8,4	2,4
15	22,8	18,1	4,8	27,3	11,1	3,1
16	25,1	21,1	5,6	23,5	8,2	2,3

Voglio qui accennare anche ad un altro meccanismo che può contribuire, nel caso presente, nel mantenere ad un livello elevato la percentuale di individui Pm/+. Su 31 piccole popolazioni iniziate da 1 ♂ per una ♀ Pm/+, tre hanno dato alla F' esclusivamente individui Plum. Mosche prese da questi

barattoli hanno da allora dato esclusivamente individui Plum. L'unica spiegazione di tale risultato è di ammettere che gli individui Plum in questione fossero Pm/l (dove una è un letale recessivo) sorto per mutazione spontanea.

Si vede così come un letale unito ad una inversione è favorito dall'insorgenza spontanea di qualunque altro letale sul cromosoma omologo che riporta ad un sistema di letali bilanciati.

Sb. – Il gene Sb, Stubble, del III cromosoma, letale in omozigosi, produce allo stato eterozigote un caratteristico accorciamento delle setole di tutto il corpo.

Le figg. 1 e 2 (linea punteggiata) mostrano l'andamento della selezione nelle due popolazioni per un periodo di 18 generazioni. La curva è in tutti e due i casi molto vicina alla curva teorica rimanendo però quasi costantemente superiore.

Una raccolta di uova, fatta per vedere una eventuale schiudibilità e sfarfallamento differenziale ha dato i risultati presentati nella tabella III.

TABELLA III.

Uova da Sb/ + × Sb/ +.

N. di uova	sgusciate	nati Sb/+	nati +/+	totale	χ^2
2400	2324	1117	480	1597	7,74
		Uova da +/+ × +/+ segreganti			
2400	2233	—	1880	1880	—

Il χ^2 calcolato sul teorico di 2 : 1 fra Sb/+ e normali è 7,74 per due gradi di libertà ed esiste quindi uno spupamento differenziale significativo fra Sb/+ e normali, a favore degli Sb/+.

È anche molto probabile che la vitalità delle mosche normali nel primo e nel secondo esperimento sia uguale: $\chi^2 = 0{,}27$ per due gradi di libertà. Altra differenza che pure è risultata significativa, fra i mutanti e i normali, è nel numero percentuale dei ♂♂.

La percentuale dei ♂♂ Sb/+ sul totale degli Sb/+ è risultata superiore a quella dei ♂♂ normali sul totale degli individui normali, facendo il calcolo su tutte e 18 le generazioni: I χ^2 sono di 40,07 e 24,40 rispettivamente per la prima e la seconda popolazione per 15 gradi di libertà. Questa differenza diventa, per cause restate ignote, fortissima alla 6ª generazione, in tutti e due i barattoli.

Gl. – La mutazione Gl, Glued, letale in omozigosi, in eterozigosi modifica profondamente l'occhio della Drosofila riducendolo a una sottile sbarra verticale. Le figg. 1 e 2 (punto e linea) mostrano l'andamento della selezione.

In sole 4 generazioni la mutazione Gl è stata completamente eliminata dalle due popolazioni.

Nessun tentativo è stato ancora fatto per appurare le cause di tale rapidissima selezione.

DISCUSSIONE. – L'andamento teorico della selezione contro un letale è dato dalla formula $q_n = q_0/(1 + nq_n)$, dove q_n è la percentuale genica del letale alla generazione n, q_0 la percentuale all'inizio dell'esperimento ed n è il numero delle generazioni.

I tre letali presi in esame in questa ricerca hanno mostrato un comportamento selettivo straordinariamente differente.

Essendo ovviamente $=1$ il coefficiente di selezione contro l'omozigote letale, il coefficiente di selezione dell'eterozigote passa da $s =$ circa $-0{,}37$ per Pm/+ a $s =$ circa 0,46 per Gl/+. L'eterozigote Sb/+ sembra invece essere, almeno in quell'ambiente genotipico, quasi neutrale con solo una debole eterosi positiva. Il suo coefficiente di selezione è quindi solo di poco inferiore a 1.

Il caso di Pm è forse il più interessante, in quanto che il suo comportamento è abbastanza simile a quello presentato da altri dominanti letali nella specie umana (Microcitemia, Falcemia).

Il caso di Pm mostra che un letale può mantenersi ad un alto livello in una popolazione, per un numero elevato di generazioni, per eterosi dovuta ad una lunga inversione.

L'inversione inibendo quasi completamente il crossing-over, separa distintamente le due classi di individui.

L'eterozigote Pm/+ è apparso avvantaggiato per tutti i caratteri presi in esame, e cioè: velocità di sviluppo, competizione allo stato larvale, fecondità. La forte fecondità differenziale nei primi giorni di deposizione e la maggior velocità di sviluppo sono probabilmente i fattori più effettivi ad assicurare il basso coefficiente di selezione di Pm.

Anche le altre piccole differenze che sono venute in luce possono avere notevole importanza nell'evoluzione di tali popolazioni artificiali. Moore (1953 [10]), in un esperimento di competizione fra *D. simulans* e *D. melanogaster*, ha trovato nel meccanismo della deposizione delle uova differenze simili a quelle da me riscontrate, e attribuisce notevole importanza al fatto data la differente compattezza della pappa ai bordi e al centro del vasetto.

Estremamente aberrante è stato anche il comportamento di Glued che in sole 4 generazioni è completamente scomparso dalle popolazioni. Casi simili di rapida e totale scomparsa di un gene, sia pure letale sono estremamente rari in Drosofila. Non mi posso ancora pronunciare sulle cause di tale comportamento selettivo. Non credo che si possa trattare di competizione allo stato larvale dato che alla prima generazione la percentuale degli individui Gl/+ era superiore al livello teorico.

(10) J. A. MOORE, « Evolution », *6*, 4, 407-421 (1953).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Gino Loria.

Tenuta (*) dal Corrispondente ALESSANDRO TERRACINI

Inesorabile la morte – che ieri stroncava l'esistenza di Enrico Fermi – in questi anni ha largamente mietuto nel manipolo di venerandi geometri che illustravano quest'Accademia: nel 1946 Enriques, nel 1948 Berzolari, nel 1952 Castelnuovo e Fano, e, il 30 gennaio di quest'anno, Gino Loria che, nato a Mantova il 19 maggio 1862, era fra tutti il più anziano.

Il suo nome ci riporta dunque a pensare ad anni lontani, e ad osservare quasi con stupore la data dell'anno 1847 in cui suo padre, Salomone Girolamo, si era addottorato in leggi nell'Università di Pavia, quando ad un ebreo ciò non sarebbe stato consentito in altre parti d'Italia, sotto questo aspetto meno liberali dell'imperial regio governo austriaco.

Lontano è anche l'anno 1883, in cui Loria si laureava nell'Università di Torino, con una dissertazione sui complessi di rette e sulle ciclidi. A Torino l'insegnamento della geometria superiore era allora impartito da Enrico D'Ovidio, che andava diffondendo i concetti della metrica proiettiva e l'idea di Plücker di assumere come generatori delle figure geometriche elementi meno tradizionali: appunto in quel torno di tempo D'Ovidio aveva tenuto un corso di geometria della retta.

In tale insegnamento è da vedere l'origine di quella dissertazione, e di altre ricerche compiute da Loria nel suo primo periodo, segnatamente della Memoria sui complessi quadratici di rette che segano armonicamente una coppia di quadriche, scritta in collaborazione con Corrado Segre. La Memoria è la prima nell'elenco cronologico dei lavori sia di Loria, sia di Corrado Segre, e costituisce, anche con questo segno esteriore, una testimonianza di un'amicizia fra i due condiscepoli che durò salda, affettuosa ed ininterrotta fino alla morte di Segre, anche quando essi si erano allontanati, sia col passaggio di Loria a Genova, sia per il divergere dei loro interessi scientifici. Ma in quei primi anni le loro ricerche interferivano, e mentre l'uno applicava la teoria di Weierstrass dei divisori elementari alla geometria della retta, l'altro vi ricorreva per classificare le ciclidi. Anche nella classificazione delle omografie hanno entrambi lavorato, sebbene non collaborato. E oggi, rileggendo quei lavori, ormai vecchi di settant'anni, quasi ci commuoviamo incontrando più di una volta le parole « il mio carissimo amico Gino Loria » con le quali Segre nomina il collega, così come gli stessi identici termini adoperati da Loria, nei riguardi di Segre: associazione ottocentesca di una citazione bibliografica con un aggettivo affettuoso.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

Alla fine del 1883 troviamo Loria ad un corso di perfezionamento alla Università di Pavia, avendovi a maestri il Beltrami, il Bertini, il Casorati; e fu poi Beltrami, anni dopo, quando Loria già si era affermato con vari saggi di storia della matematica, ad incoraggiarlo in questa via.

Intanto col novembre del 1884 Loria era divenuto assistente di D'Ovidio, per l'algebra complementare e la geometria analitica, finché, due soli anni dopo, il 1° novembre 1886, fu nominato professore straordinario di geometria superiore nell'Università di Genova.

Era il momento in cui quell'Università, dopo la legge del 1885 che le permetteva di uscire dal gruppo delle università minori tra le quali era stata relegata dalla legge del 1862, provvedeva a coprire per concorso cattedre di nuova istituzione ed altre allora vacanti. Appunto questi concorsi portarono a Genova, oltre a Loria, Giacinto Morera e Paolo Pizzetti, passati poi rispettivamente a Torino ed a Pisa. Invece Loria, ordinario dal 1891, coprì la cattedra di geometria superiore a Genova per ben quarantanove anni, fino al suo collocamento a riposo, avvenuto nel 1935. Ebbe vari incarichi, tra i quali la geometria descrittiva, la storia della matematica, ed il corso di magistero. Con quest'ultimo si collega il costante interesse di Loria per le questioni concernenti l'insegnamento. Quanto alla geometria descrittiva, che insegnò per moltissimi anni, Loria ha lasciati vari trattati – usciti in tedesco e poi in italiano –, che furono tra i primi a ridare al metodo di Monge quel primo posto che, sotto l'influsso di Fiedler, gli aveva tolto la proiezione centrale, e ad introdurre gli elementi della fotogrammetria. Essi si segnalano per l'eleganza delle costruzioni, non disgiunta da una generalità maggiore del consueto, senza però che questo nuoccia alla semplicità.

Nominato emerito nel 1936, trascorse a Genova tutta la vita, salvo che nei tragici anni nei quali dovette cercare, e fortunatamente trovò, un sicuro rifugio nelle valli valdesi. Ricordo anzi che presso Torre Pellice morì nel 1943 Achille Loria, suo fratello maggiore, il celebre economista.

Già abbiamo accennato ai primi lavori di Loria. Essi, insieme con alcuni fra i successivi, in parte lo mostrano partecipe di movimenti di idee che andavano prendendo piede in Italia agli inizi della sua vita scientifica, in parte lo vedono muoversi nella scia della generazione precedente. Si tratta dell'applicazione, già richiamata, di concetti algebrici prima non utilizzati a quegli scopi, della geometria della retta o delle sfere, della geometria proiettiva iperspaziale, di enti generati da corrispondenze algebriche tra forme fondamentali, di trasformazioni cremoniane nello spazio. Ma Loria rimase estraneo alle nuove vedute ed ai nuovi indirizzi verso i quali le ricerche precedenti erano destinate ad evolvere in Italia, e rivolse ben presto la sua attività verso un altro campo, al quale ormai ci limiteremo.

Credo che si possa ragionevolmente datare nel 1886 il primo accostarsi di Loria alla storia della matematica, nella modesta forma di una sua breve chiosa ad una Memoria pubblicata da E. Holst negli « Acta mathematica »,

per segnalare che la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra data da Holst poggiava sulla stessa idea di quella trovata da C. V. Mourey fin dal 1828. Non si trattò di un'osservazione isolata, ma del primo germe di un ampio lavoro storico-critico su quel teorema, che occupò Loria durante cinque anni, e che vide la luce nella Rivista di matematica di Peano. Il lavoro, movendo dalle incomplete argomentazioni di Eulero e di D'Alembert, il quale ebbe comunque il merito di enunciare per primo il teorema, attraverso i tentativi di Lagrange e di Laplace, passa in rassegna le dimostrazioni di Gauss e via via tutte le altre, mostrando la concatenazione delle idee, ed il fiorire di nuove dimostrazioni sulla base di altre precedenti incomplete, secondo il costume dei grandi di « fondare il nuovo mentre distruggono il vecchio ». Così il lavoro non solo è la storia di una teoria, ma la prova che parecchi dei personaggi di questa storia agivano a loro volta con coscienza storica.

Quasi contemporaneamente Loria portava a termine altri saggi congeneri sulla geometria numerativa e sui poligoni di Poncelet, ed un altro di carattere sostanzialmente diverso, su « Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce ». Un passo del celebre *Aperçu historique* di Chasles su Nicola Fergola ed i suoi discepoli – autori, egli dice di « plusieurs écrits importants sur l'Analyse géométrique des anciens, qui s'y trouve rétablie dans sa pureté originaire » – fece rivolgere l'attenzione di Loria alla scuola sorta a Napoli per opera del Fergola nell'ultima parte del secolo decimottavo. Siamo qua in un'atmosfera in un certo senso opposta a quella dei lavori precedenti, nei quali si trattava di cogliere un'ininterrotta continuità di pensiero, laddove la cosidetta scuola napoletana si riattaccava bensì alla matematica antica, ma viveva sostanzialmente isolata nel mondo moderno; cosicché questo studio di Loria si può forse meglio inquadrare nella storia della cultura che in quella della matematica.

Ormai Loria era pronto ad affrontare un'opera di ampio respiro, quale fu la sua storia della matematica greca: « Le scienze esatte nell'antica Grecia ». È un'opera poderosa e voluminosa: quasi mille pagine nella seconda edizione del 1914 (prima era uscita, tra il 1895 ed il 1902, nelle Memorie dell'Accademia di Modena). Partendo dai geometri preeuclidei, attraverso quello che Loria chiama il periodo aureo della geometria greca – impersonato specialmente in Euclide, Archimede ed Apollonio –, essa va al « periodo argenteo » (Gemino da Rodi, Teone da Smirne, Pappo, i neoplatonici, Eutocio, Sereno) per concludere con la storia dell'aritmetica, includendo sotto il termine di scienze esatte quelle i cui risultati ebbero un'influenza sullo sviluppo della matematica pura, quali l'astronomia, la sferica, l'ottica. Opera preparata con la più ampia conoscenza di quanti avevano preceduto Loria in questo campo di studi, e col diretto ricorso alle fonti; ricca d'informazione (per esempio di notizie sulle divinazioni moderne di opere scomparse), ma senza sfoggio di inutile erudizione; opera dove un prudente scetticismo, talora quasi agnosticismo, si alterna all'esposizione concreta dei contributi dei vari autori; opera che, ancora vari anni dopo, un conoscitore come lo Heath giudica

indubbiamente « the best history of Greek mathematics which exists at present ». Di disegno grandioso ed originale, supera sotto questo aspetto le opere di Zeuthen, di Tannery, di Cantor, anche se – intesa a riferire le costruzioni altrui piuttosto che a proporne una propria – resti in parte al disotto come genialità di concezione e sottigliezza di idee.

« Le scienze esatte nell'antica Grecia » erano state frutto indiretto del consiglio avuto da Beltrami di partecipare ad un concorso indetto dall'Istituto veneto per un manuale di storia della matematica. Ma « da molto tempo era oltrepassata la data fissata per la chiusura di quel concorso » scriverà poi Loria « che io ero tuttora immerso nello studio delle opere immortali di Euclide, di Archimede, di Diofanto, di Tolomeo ». Ed è bene che sia stato così; però venne poi anche a suo tempo la « Storia delle matematiche », uscita in tre volumi tra il 1929 ed il '33 – ripubblicata nel 1950 – che va dai tempi antichi al secolo XIX. Essa pure risponde ad una visione eclettica, e, intesa da Loria non come opera di divulgazione, ma scritta da un matematico per matematici, opera di divulgazione è tuttavia in un'accezione elevata, e alterna gli sviluppi di carattere dottrinale con le biografie degli autori più eminenti, secondo la veduta del Loria dell'alto valore che hanno le biografie degli eroi dello spirito.

Si stacca dalle precedenti la bella opera sulla « Storia della geometria descrittiva », che, per il carattere ben delimitato della materia, ha consentito a Loria un esame analitico più particolareggiato dei successivi sviluppi, a partire dai primi cultori della prospettiva. Non hanno invece raggiunto la veste di volume gli studi sulla storia della geometria analitica, dei quali pure Loria si occupò ripetutamente, in specie con la Monografia pubblicata nel 1924 nelle Memorie di quest'Accademia.

Di carattere metodologico è invece la « Guida allo studio della storia delle matematiche » (1ª ed. 1916, 2ª ed. 1946). Essa risponde ad un programma prospettato da Loria sin dal congresso dei matematici del 1908, quando, citati i tre modi di apprendere un'arte secondo san Francesco di Sales – il migliore è professarla, eccellente ascoltarla dalla voce di un maestro, buono apprenderla da un libro – aveva proposto di venire incontro alla preparazione dei futuri storici della matematica con un buon libro che risparmiasse loro le dolorose incertezze degli autodidatti. Il libro uscì, ed ottimo: Loria vi mise alla portata di tutti l'ampio materiale che era venuto raccogliendo per suo uso in ciò che concerne sia la preparazione di chi intenda dedicarsi a ricerche storico matematiche, sia la conoscenza delle fonti alle quali conviene accedere.

Per questo libro, con eccessiva modestia, Loria ha scelto come epigrafe le parole di Machiavelli: « è ufficio di uomo buono quel bene che per la malignità de' tempi e della fortuna tu non hai potuto operare, insegnarlo ad altri, acciocché, sendone molti capaci, alcuno di quelli, più amato dal Cielo, possa operarlo ». Direi invece che quest'opera risponde bene al carattere di Loria, per la soddisfazione che egli provava nel mettere a disposizione degli altri quanto aveva raccolto per sé.

Fuori del campo propriamente storico, ma collegato con esso, è il bel volume di Loria sulle curve piane speciali (1ª ed. tedesca 1902, 2ª ed. tedesca 1910-11, ed. italiana 1930-31). «Tutto ciò che la fantasia matematica ha ideato nel corso dei secoli» così riferendosi a questo libro scriveva a Loria molti anni dopo Hermann Weyl: «in quanto a costruzioni e proprietà delle curve speciali, Lei lo ha riunito, ordinato sistematicamente, ampliato e completato coi Suoi lavori».

A proposito di questo libro Enriques ebbe a sottolineare il fatto che, procedendo la scienza induttivamente dal particolare al generale, l'interesse precipuo delle curve speciali proviene dal fatto che attraverso il loro esame si sono spesso conseguiti i risultati più generali. Personalmente, non mi sentirei di aderire che in parte ad un tale giudizio, in quanto, come elemento preponderante d'interesse nell'esame delle singole curve speciali, mi pare che possano essere considerate quelle belle proprietà che sussistono soltanto in casi singoli, senza mantenersi, né lasciar traccia di sé nei tipi più generali. Comunque quella veduta di Enriques può contribuire a spiegare come un'opera di questo carattere si sia innestata quasi naturalmente nella produzione di Loria. Anche su questo argomento l'attenzione di Loria era stata inizialmente richiamata da un tema proposto da un'Accademia, quella di Madrid. A quest'opera fece poi seguito un'altra sulle curve speciali sghembe.

Ma non meno che nelle esposizioni d'insieme l'opera storica di Loria si è concretata nella forma di molte Note e Memorie – tra le sue moltissime su altri argomenti – nelle quali volta a volta ha portato contributi storici dai punti di vista più diversi.

Così nello studio della storia di questioni singole, o di singole scuole, ad alcune delle quali abbiamo accennato.

Così ancora quando adottò un punto di vista «regionale» nella storia della matematica, studiando i contributi dei diversi paesi.

Così nei necrologi, o rassegne dell'opera scientifica, o biografie di vari matematici (quali Ettore Caporali, Felice Casorati, Eugenio Beltrami, De Jonquières, Luigi Cremona, Paul Tannery, Mannheim, Zeuthen, Corrado Segre, Enrico D'Ovidio, o – risalendo più addietro – C. Sturm, G. B. Giorgini, Evangelista Torricelli, Leonardo Fibonacci). Tra queste occupano un posto a sé quelle di Lagrange, al quale tornò in varie occasioni, esaminando anche in particolare la sua attività nelle accademie di Berlino e di Parigi, e rilevando l'aspetto di Lagrange quale cultore della storia della matematica.

Così negli scritti di carattere programmatico ed organizzativo, sia per la storia della matematica, sia per l'insegnamento della storia.

Così in particolare quando mostrò con l'esempio la convenienza di segnalare antichi lavori sommersi in raccolte di carattere generale – descrivendo gli scritti di argomento matematico contenuti in due raccolte del secolo XVIII, il Giornale dei Letterati d'Italia di Venezia e la «Raccolta Calogera», o esaminando i contributi di D'Alembert alla *Encyclopédie méthodique* –, e di far conoscere spogli di vecchie pubblicazioni poco accessibili.

Loria ha fondato e diretto il « Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche », che in un certo senso, sebbene in forma e con intento diversi, ha costituito la continuazione del « Bullettino » di Boncompagni. Ne sono stati pubblicati 21 volumi, a partire dal 1898: in seguito il Bollettino è passato a costituire una sezione di altre pubblicazioni periodiche.

A Loria si deve l'articolo sulle curve piane algebriche d'ordine superiore al quarto nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, e parimenti il capitolo sulla storia della prospettiva e della geometria descrittiva nelle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* di Moritz Cantor.

Loria ha cooperato alla pubblicazione delle opere di vari matematici, tra i quali Francesco Siacci, il marchese di Fagnano, ed Evangelista Torricelli. Quest'ultima pubblicazione si è protratta attraverso notevoli difficoltà, dalle quali derivarono inconvenienti e difetti che Loria riconobbe con bella sincerità.

Difficile e forse vano è indagare perché certe cose sono avvenute; ma forse non è avventato indicare alcune tra le circostanze, che – oltre alla naturale propensione – possono aver spinto Loria verso la storia della matematica. Suoi maestri a Torino erano stati Genocchi e D'Ovidio, incline il primo e non estraneo il secondo ad una visione storica della matematica – si pensi per esempio alle note storiche della sua geometria analitica –. Inoltre i tempi correvano ovunque favorevoli per la storia della matematica, e – per rimanere in Italia – a tacere di altri tra cui il Favaro, l'opera svolta dal principe Baldassarre Boncompagni, sia con le sue personali ricerche sia sopratutto con la fondazione e la munifica direzione del « Bullettino di bibliografia e storia » che da lui prende il nome, non poteva non dare frutti.

Del resto, anche per la storia di altre scienze il clima era allora propizio; e, poco dopo, per la geografia, un impulso occasionale doveva essere dato da quella pubblicazione per il centenario colombiano nella quale vide la luce lo studio di Loria su Nicola Fergola e la sua scuola.

Nella sua produzione storica Loria doveva battere una via propria, discostandosi dall'eccessiva preoccupazione bibliografica che aveva contraddistinta l'opera di Boncompagni, tendendo a rifuggire da costruzioni azzardate, e sopratutto approfittando della sua armonica e sagace visione d'insieme per architettare con bella proporzione il piano della sua esposizione, e della facilità con cui correva la sua penna per includere, ben inquadrati, gran copia di fatti, senza farne in alcun modo sentire il peso al lettore.

Tanto facilmente correva, che un altro suo scritto, che pure ebbe notevole fortuna di edizioni e di traduzioni, può forse apparire meno elaborato. È il volume « Il passato e il presente delle principali teorie geometriche », che comunque si è reso e si può rendere utile per un primo orientamento in alcuni capitoli della geometria.

Loria non tralasciò mai di mettere in evidenza, all'occasione, i meriti degli scienziati italiani, senza però lasciar prevalere sull'obbiettività alcun preconcetto nazionalistico. Si rileggono con piacere, e possono essere un mo-

nito, le sue parole: «giunto ormai sul tramonto della mia vita, se getto uno sguardo indagatore sul mio passato, mi pare di potere affermare con sicura coscienza che mai ho lasciato sfuggire una propizia occasione per porre in luce meridiana le benemerenze degli italiani; ma tale aspirazione costante non ha mai fatto velo (almeno io spero) alla serena valutazione storica dei fatti. Il tono di costante protesta verso spoliazioni compiute in danno di nostri connazionali che informa le opere del Cossali e del Libri si comprende benisimo date le miserrime condizioni politiche della patria nostra nel tempo in cui esse furono scritte; ma ritengo sia da abbandonare oggi... Fo voti che tale sistema venga adottato da tutti coloro che scriveranno in avvenire di storia della scienza».

Questo suo atteggiamento moderato rispecchia del resto le qualità dell'animo suo. Loria fu di carattere riservato e quasi timido, indizio di una ingenita bontà. Era anche modesto, sebbene le sue benemerenze siano state ampiamente riconosciute. Due volte, nel 1907 e nel 1922, ebbe – per la storia delle scienze – il premio Binoux dell'Académie des Sciences. Appartenne a moltissime accademie italiane e straniere: era Corrispondente dell'Accademia dei Lincei dal 1912, e Socio nazionale dal 1947.

Godeva di grande considerazione anche in campo internazionale: fece parte della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico e del Consiglio dell'Académie internationale d'Histoire des Sciences.

Fu festeggiato, ancora recentemente, in occasione del suo novantesimo compleanno, e – in forma più solenne – prima, sia per il quarantesimo anno d'insegnamento, sia al suo collocamento a riposo. In quest'occasione fu pubblicato un bel volume che riproduce vari suoi scritti, conferenze e discorsi sulla storia della matematica.

Si può affermare che nella vita della cultura raramente sia venuto meno l'amore per la storia delle scienze: non certo perché nell'onore reso al primo ritrovatore si debba vedere un necessario incentivo a nuove ricerche, secondo la meschina veduta espressa da Vincenzo Monti in una sua prolusione di Pavia; nemmeno per uno spirito diciamo così agonistico di risalire senza posa da un precedente ad un altro con l'ideale di dimostrare, come è stato detto, che nulla è mai stato scoperto da nessuno; e nemmeno, come altri pensò, perché chi vuol far progredire la scienza debba necessariamente conoscere gli errori attraverso i quali sono passati i suoi predecessori.

In realtà, come ben sappiamo, l'amore per la storia della scienza non è mai venuto meno, sia come pura opera erudita, sia come studio del divenire delle conquiste dello spirito, necessario per l'intelligenza del pensiero scientifico, sia come riflesso dell'una o dell'altra corrente filosofica.

Ma in realtà – né potrebbe essere diversamente – mentre la coscienza della necessità di una visione storica si può trovare largamente diffusa tra i cultori di una scienza, è molto ridotto il numero degli studiosi che della storia della loro scienza fanno la principale ragione della loro vita scientifica. In ogni generazione, si trova una piccola minoranza di veri e propri cultori di

storia della matematica, i quali per un'esigenza del loro spirito hanno mutato in attività operante quella che nei più è sentita come semplice tendenza. Attraverso la loro opera si svolge e si mantiene viva la visione storica del pensiero matematico.

A questa schiera di studiosi, con tutta la sua nobile e lunga vita dedicata alla scienza ed al lavoro, ben degnamente appartiene Gino Loria.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI (1)

1. – *Sur les différentes espèces de complexes du second degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (in collaborazione con C. Segre), «Math. Ann.», t. XXIII, 1883, pp. 213–235.

2. – *Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio e alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all'infinito*, «Mem. Acc. Torino», (2), vol. XXXVI, 1884.

3. – *Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazi*, «Giorn. di Mat.», t. XXII, 1883, pp. 1–16.

4. – *Geometrischer Beweis der bekanntesten Eigenschaften einer binären cubischen Form*, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XXIX, 1884, pp. 245–250.

5. – *Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale*, «Atti Acc. Torino», vol. XIX, 1884, pp. 849–878.

6. – *Nuovi studi sulla geometria della sfera*, ibid., vol. XX, 1885, pp. 505–526.

7. – *Ueber einen von Steiner entdeckten Satz und einigen verwandte Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung.*, «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», t. XXX, 1885, pp. 291–300.

8. – *Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito*, «Rend. Acc. Napoli», t. XXIV, 1885, pp. 298–309.

9. – *Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), t. XVIII, 1885, pp. 491–494.

10. – *Intorno ad alcune relazioni fra distanze*, «Per. di Mat.», vol. I, 1886, pp. 33–43.

11. – *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $(2,6)_2$ *e* $(2,7)$, «Atti Acc. Torino», vol. XXI, 1886, pp. 621–634.

12. – *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du* 4^e *ordre*, «Quart. J. of Math.», t. XXII, 1886, pp. 44–73.

13. – *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari e sulla geometria analitica di un piano nello spazio*, «Giorn. di Mat.», t. XXIV, 1886, pp. 164–241.

14. – *Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques*, «Acta Math.», t. IX, 1886, pp. 71–72.

15. – *Nota sulla moltiplicazione di due determinanti*, «Jorn. Teixeira», t. V, 1886.

16. – *Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale*, ibid.

17. – *Le definizioni di spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio, secondo le ricerche di Giorgio Cantor*, «Giorn. di Mat.», t. XXV, 1887, pp. 97–108.

18. – *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, «Mem. Acc. Torino» (2), vol. XXXVIII, 1887; 2^a ed. Torino, Clausen, 1897; 3^a ed., 1907, 4^a ed. Padova, 1931. Trad. polacca di S. Dickstein. Trad. tedesca di F. Schütte.

19. – *Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica*, «Giorn. Soc. lett. e conv. scient. Genova», 1886, pp. 53–80; «Giorn. di Mat.», t. XXXIV, 1896, pp. 354–374.

(1) Le pubblicazioni il cui numero d'ordine, nell'elenco, è contrassegnato con un asterisco si trovano riprodotte nel volume *Scritti...* (n. 350).

20. – *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque*, « Giorn. di Mat. », t. XXVI, 1888, pp. 96–101.

21. – *Notizie storiche sulla geometria numerativa*, « Bibl. Math. », (2), t. II, 1888, pp. 39–48, 67–80.

22. – *Intorno alle curve razionali d'ordine* n *dello spazio a* n–1 *dimensioni*, « Rend. Circ. Palermo », t. II, 1888, pp. 201–224.

23. – *Sulle curve razionali normali in uno spazio a* n *dimensioni*, « Giorn. di Mat. », t. XXVI, 1888, pp. 334–347.

24. – *Nota su una classe di determinanti*, ibid., pp. 329–333.

25. – *Zur Eliminationstheorie*, « Zeitschr. f. Math. u. Phys. », t. XXXIII, 1888, pp. 357–358.

26. – *I poligoni di Poncelet*, discorso pronunciato all'Università di Genova. Torino, Paravia, 1889, di pp. 50.

27. – *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet*, « Bibl. Math. », (2), t. 3, 1889, pp. 67–74.

28*. – *L'opera scientifica di Ettore Caporali*, « Giorn. di Mat. », t. XXVII, 1889, pp. 1–32.

29. – *Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie*, ibid., pp. 224–225.

30. – *Addizioni alle notizie storiche sulla geometria numerativa*, « Bibl. Math. », (2), t. III, 1889, pp. 23–27.

31. – *A.I.G.T.*, « Per. Mat. », t. IV, 1889, pp. 125–127.

32. – *Nota su due applicazioni algebriche dell'eliminazione*, « Jorn. Teixeira », t. IX, 1889, pp. 33–38.

33. – *Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie*, « Rend. Lincei », (4), vol. VI_2, 1890, pp. 179–187.

34. – *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere uno*, « Rend. Ist. Lomb. », (2), t. XXIII, 1890, pp. 824–834.

35. – *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine*, « Atti Acc. Torino », vol. XXVI, 1890, pp. 275–299.

36. – *Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico*, « Mem. Acc. Torino », (2), vol. XL, 1890, di pp. 79.

37. – *Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche*, « Riv. di Mat. », t. I, 1891, pp. 185–248.

38*. – *Cenni intorno alla vita e le opere di Felice Casorati*, « Bibl. Math. », (2), t. V, 1891, pp. 1–12; « Rend. Circ. Palermo », t. V., 1891, pp. 236–251.

39. – *Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche*, « Bibl. Math. », (2), t. V, 1891, pp. 92–112.

40. – *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*, « Atti Università Genova », 1892, di pp. 144.

41. – *Sulla teoria della curvatura delle superficie*, « Riv. di Mat. », t. II, 1892, pp. 84–95.

42. – *Congetture e ricerche sull'aritmetica degli antichi Egiziani*, « Bibl. Math. », (2), t. VI, 1892, pp. 97–110.

43. – *Pro veritate. Risposta alle « Osservazioni » del prof. E. Pascal*, « Riv. di Mat. », t. III, 1892, pp. 6–15.

44. – *L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte*, V Congresso storico italiano, 1892, di pp. 17.

45. – *Aggiunte all'articolo « Il teorema fondamentale delle equazioni algebriche »*, « Riv. di Mat. », t. II, 1892, pp. 37–38.

46. – *L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche*, « Bibl. Math. », (2), t. VII, 1893, pp. 39–46.

47. – *Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche*, « Riv. di Mat. », t. III, 1893, pp. 105–108, « Bibl. Math. », (2), t. VII, 1893, pp. 47–50.

48. – *Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana*, « Bibl. Math. », (2), t. VII, 1893, pp. 79–89.

49. – *Della varia fortuna d'Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare*, « Per. di Mat. », t. VIII, 1893, pp. 81–113.

50*. – *Intorno alla vita e le opere di Gaetano Giorgini, 1795–1874*, «Giorn. di Mat.», t. XXXI, 1893, pp. 23–30.

51. – *Le curve di genere 1 e le funzioni sigma di Weierstrass*, «Giorn. di Mat.», t. XXXI, 1893, pp. 179–198.

52. – *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, «Mem. Acc. Modena» (3), t. X, pp. 3–168; t. XI, pp. 3–237; t. XII di pp. 411; 2ª ed. Milano, Hoepli, 1914 di pp. XXIV+973.

53. – *A few remarks on the Syllabus of modern plane geometry issued by the A.I.G.T.* Bedford, 1893.

54. – *Studi intorno alla logistica greco-egiziana*, « Giorn. di Mat. », t. XXXII, 1894, pp. 28–57.

55. – *La logique mathématique avant Leibniz*, « Bull. des Sciences math. », (2), t. XVIII, 1894, pp. 107–112.

56. – Articoli « *Euclide* » e « *Matematica* » nel « Dizionario illustrato di Pedagogia », 1895.

57. – *Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives*, « Bull. Soc. math. de France », t. XXIII, 1895, pp. 4–6.

58. – *Per Leon Battista Alberti*, « Bibl. Math. », (2), t. IX, 1895, pp. 9–12.

59. – *Desargues e la geometria numerativa*, ibid., pp. 51–53.

60. – *I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali*, « Prager Sitzber. », 1896, di pp. 4.

61. – *Un'opera recente sulla storia delle matematiche elementari*, « Per. di Mat. », t. XI, 1896, pp. 1–13.

62. – *Integrali euleriani e spirali sinusoidi*, « Prager Sitzber. », 1897, di pp. 6.

63. – *Une courbe oubliée. La conchoïde de R. de Sluse*, «Mathésis», (2), vol. 7, 1897, pp. 5–8.

64. – *Identité de la strophoïde avec la focale à noeud. Son application à l'optique géométrique*, « Nouv. Ann. Math. », (3), t. 16, 1897, pp. 262–265.

65. – *Versiera, visiera e pseudo-versiera*, « Bibl. Math », (2), t. XI, 1897, pp. 7–12, 33–34.

66. – *Di alcuni nuovi documenti relativi a J. Steiner*, « Giorn. di Mat. », t. XXXVI, 1897 (Suppl.), pp. 1–2, 5–6, 9–11.

67. – *Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia*, « Per. di Mat. », t. XIII, 1897, pp. 129–138, « Prager Sitzber. », 1897, di pp. 13.

68. – *Sopra certi determinanti i cui elementi sono funzioni trigonometriche*, « Per. di Mat. », t. XII, 1897, pp. 33–34.

69. – *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva*. « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. VI_2, 1897, pp. 318–323.

70. – *Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes*. « Verh. d. intern. Math. Congr. », t. I, 1897, pp. 289–298; trad. polacca, « Wiad. Mat. », t. 2, pp. 202–213.

71. – *Per la storia di alcune curve piane. La strofoide*. « Loria Boll. », t. I, 1898, pp. 1–7.

72. – *Necrologio. Ernesto Cristiano Giulio Schering*, ibid., pp. 26–29.

73. – *Necrologio. P. Serret.*, ibid., p. 157.

74. – *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario*, « Per. di Mat. », (2), t. I, 1898, pp. 19–33.

75. – *La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice*. « Mathésis », (2), vol. 8, 1898, pp. 265–267.

76. – *La fusione della planimetria con la stereometria. Una pagina di storia contemporanea*, « Per. di Mat. », t. XV, 1899, pp. 1–7.

77. – *Osservazioni sopra le coordinate polari*, ibid., pp. 7–11.

78. – *Un problema de aritmética que se encuentra en el estudio de las rodoneas*, « Progréso matém. », (2), t. I, 1899, pp. 65–68.

79. – *Généralisation d'un problème de minimum classique*, « Mathésis », (2), vol. 9, 1899, pp. 131–136.

80. – *Remarques sur les coordonnées polaires*, « Enseign. Math. », vol. I, 1899, pp. 357–364; « Wiad. Mat. », t. 4, 1900, pp. 44–51.

81. – *Il « Giornale de' Letterati d'Italia » di Venezia e la « Raccolta Calogera » come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII*, « Festschrift », z. 70, Geburstst. M. Cantor's 1899, pp. 241–274.

82. – *Un trattato sulle curve piane algebriche pubblicato senza nome d'autore*, « Bibl. Math. », (2), t. XIII, 1899, pp. 10–12.

83. – *Les courbes parallèles aux astéroïdes sont-elles toujours des astéroïdes?*, « Mathésis », 1899.

84. – *Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica*, « Bibl. Math. », (3), t. I, 1900, pp. 75–89.

85. – *Sui metodi di compilazione dei cataloghi bibliografici. Pensieri e desideri*, « Loria Boll. », t. 3, 1900, pp. 65–70.

86. – *Intorno alle radiali delle curve piane*, « Rend. Circ. Palermo, », t. XVI, 1902, pp. 46–56.

87. – *Le trasfigurazioni di una scienza*, Discorso. « Ann. Univ. Genova », 1900–1901, di pp. 35 (cfr. n. 98).

88. – *La radiale di una curva algebrica*, « Per. di Mat. », (2), t. IV, 1901, pp. 30–33.

89. – *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque*, « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. X_2, 1901, pp. 150–158.

90. – *Mascheroni contro Varignon. Nel primo centenario della morte di L. Mascheroni*, Ateneo di Bergamo, vol. 2°, pp. 159-167.

91. – *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, Leipzig, 1902, di pp. XXI + 744; 2ª ed. in due volumi: I di pp. XVIII + 488; II di pp. VIII + 384, 1910; ed. italiana, Milano, Hoepli, 1930, in 2 volumi di pp. XVI + 574, e pp. XI + 439.

92*. – *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, « Bibl. Math. », (3), t. II, 1901, pp. 392–440.

93*. – *L'oeuvre scientifique d'Ernest de Jonquières*, ibid., t. III, 1902, pp. 276–322.

94. – *Pseudo-versiera e quadratrice geometrica*, ibid., pp. 127–130.

95. – *Le curve panalgebriche*, « Prager Sitzber. », 1901; « Mat. pure e appl. », t. 2, 1902, pp. 73–96.

96. – *Transformation des coordonnées projectives*, « Enseign. Math. », vol. 4, 1902, pp. 323–326.

97. – *Necrologio. Emanuele Lazzaro Fuchs*, « Loria Boll. », t. 5, 1902, pp. 126–127.

98*. – *Le trasfigurazioni di una scienza*. Discorso. G. Mondovi, 1904, di pp. 26 (cfr. n. 87).

99. – *Carattere di divisibilità per un numero intero*, « Boll. Mat. », vol. 1, 1902, pp. 3–13; « Mathésis », (3), vol. 2, 1902, pp. 33–39.

100. – *Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions*, « Arch. d. Math. u. Phys. », (3), vol. 2, 1902, pp. 257–266.

101. – *Le quadrisecanti di una quaterna di rette. Nota di geometria descrittiva*, « Per. di Mat. » (2), t. IV, pp. 289–291.

102*. – *Donne matematiche*. « Atti Acc. Virg. », 1901; « Rev. Scient. », (4), vol. 20, 1903, pp. 385–392.

103. – *G. B. Caraccioli*, « Loria Boll. », t. 6, 1903, pp. 33–38.

104. – *Fondamenti geometrici della fotogrammetria*, « Giorn. di Mat. », t. XLI, 1903, pp. 1–13.

105. – *Sopra la risoluzione grafica delle equazioni di secondo grado*, « Boll. di Mat. », t. 2, 1903.

106. – *In qual modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche e naturali possa costituire oggetto di un corso universitario* (in collab. con D. Barduzzi e P. Giacosa), « Atti II congr. int. scienze storiche », vol. XII, Roma, 1903, pp. 15–21.

107. – *Un'impresa nazionale di universale interesse.* (*Pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli*), ibid., pp. 23–27.

108. – *Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva*, « Per. di Mat. », (3), t. I, 1903, pp. 143–144.

109. – *Sui fondamenti della teoria proiettiva delle curve algebriche sghembe*, « Rend. Circ. Palermo », t. XVII, 1903, pp. 44–64.

110. – *Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare*, « Bibl. Math. », (3), t. IV, 1903, pp. 48–51.

111. – *Commemorazione di L. Cremona*, « Atti Soc. Lig. sc. nat. e geogr. », t. 15, 1904, di pp. 19.

112. – *P. Paci, Cenno necrologico*, « Ann. Univ. Genova », 1904–1905.

113*. – *L. Cremona et son oeuvre mathématique. Un article de L. Cremona sur Giovanni Ceva*, « Bibl. Math. », (3), t. V, 1904, pp. 125–195, 311.

114. – *Verso una lingua universale?*, « Riv. Lig. », 1904.

115. – *Quistione 634*, « Per. di Mat. », (3), t. II, 1904, pp. 134–135.

116. – *Rette bisettrici e piani bisettori. Nota di geometria descrittiva*, ibid., pp. 41–44.

117. – *Encore les femmes mathématiciennes*, « Revue sc. », (5), vol. 1, 1904, pp. 12–15; 338–340.

118. – *Pour une histoire de la géométrie analytique*, « Verh. III intern. math. Kongress », Heidelberg, 1905, pp. 562–574.

119. – *Sur l'enseignement des mathématiques en Italie*, ibid., pp. 594–602.

120. – *Necrologio. Paolo Tannery*, « Loria Boll. », t. 8, 1905, pp. 27–30.

121. – *Sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie*, « Enseign. Math. », vol. 7, 1905, pp. 11–20.

122*. – *Programmi del passato e programmi per l'avvenire.* Lettura fatta il 22 aprile 1905, « Boll. Ass. Mathesis », t. 11, 1905, di pp. 11; trad. tedesca, Leipzig 1906, di pp. 22.

123. – *Unicuique suum*, « Loria Boll. », 1905, pp. 65–67.

124. – *Sopra una trasformazione di contatto ideata da Fermat*, « Bibl. math. », (3), t. VI, 1905, pp. 343–346.

125. – *Per la preistoria della teoria delle trasformazioni di contatto*, « Bibl. Math. », (3), t. VII, 1906, pp. 67–68.

126. – *Scienze e stile scientifico. A proposito di due recenti pubblicazioni*, « Riv. Ligure », 1906.

127. – *La riforma della scuola media in Germania*, ibid., pp. 11.

128. – *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens*, « Enseign. Math. », vol. 8, 1906, pp. 383–385.

129. – *Sulle riforme scolastiche da compiersi e in particolare su quelle relative all'insegnamento della matematica*, « Boll. mat. », 1906.

130. – *Quistione 711*, « Suppl. Per. Mat. », vol. 9, 1906, pp. 72–74.

131. – *Lösung zu Aufgabe 121*, « Arch. d. Math. u. Phys. », (3), vol. 10, 1906.

132. – *Matematica e matematici del Giappone. A proposito di un'opera recente*, « Loria Boll. », t. 9, 1906, pp. 65–72.

133. – *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* Erster Teil: *Die Darstellungsmethoden.* Teubner, 1907, pp. XI + 219; zweiter Teil: *Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen.* Teubner, 1913, pp. XII + 294.

134. – *Esiste lo spazio a quattro dimensioni?*, « Atti Soc. Lig. sc. natur. e geogr. », 1907.

135. – *Sur la courbure d'une ligne plane dans un point quelconque*, « Ann. Sc. Pol. Porto », vol. 2, 1907, pp. 100–114.

136. – *La spirale de Pappus*, « Arch. d. Mathem. u. Phys. », (3), vol. 12, 1907, pp. 45–48.

137. – *Le trasformazioni pedali ed antipedali nel piano e nello spazio*, « Per. di Mat. » (3), t. IV, 1907, pp. 214–224.

138. – *Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens*, « Bibl. Math. », (3), t. 7, 1906, pp. 270–281.

139. – *Perspective und darstellende Geometrie*. Nel vol. IV di CANTOR, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1908, pp. 577–637.

140. – *Sopra certi inviluppi di cerchi*, « Math. Ann. », t. LXIV, 1907, pp. 512–516.

141. – *Raggi di scienza in canti studenteschi ultramontani*, « Riv. Lig. », 1907.

142. – *Sur les projections des droites perpendiculaires*, « Enseign. Math. », vol. 10, 1908, 141–144.

143. – *Intorno ad alcuni problemi metrici che s'incontrano in geometria descrittiva*, « Per. di Mat. », (3), t. V, 1908, pp. 273–277.

144*. – *Le tradizioni matematiche dell'Italia*, « Conferenze e prolusioni; Atti IV Congr. Mat. Roma », 1908, vol. 3, pp. 402–421.

145. – *Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques*, ibid., pp. 541–548; « Arch. Gesch. Naturwiss. u. Technik », vol. 1, 1909, pp. 9–18.

146. – *La geometrografia e le sue trasfigurazioni*, « Per. di Mat. », (3), t. VI, 1908, pp. 114–122.

147*. – *L'opera geometrica di A. Mannheim*, « Rend. Circ. Palermo », t. XXVI, 1908, pp. 1–63.

148. – *Notice sur G. Vailati*. « Enseign, Math. », 1909.

149. – *Metodi di geometria descrittiva*, Milano Hoepli, 1909, 2ª ed. 1919, 3ª ed. 1925.

150. – *In memoria di Evangelista Torricelli. Discorso*, « Riv. Lig. », 1909, pp. 12.

151. – *Développements relatifs au projet d'un manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques*, « Bibl. math. », (3), t. IX, 1909, pp. 227–236.

152. – *Per la storia della geometria descrittiva; T. Olivier*, « Arch. Gesch. der Naturw. und Technik », vol. 1, 1909, pp. 335–346.

153. – *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche*, « Atti Acc. Pontaniana », vol. 39, 1909, n. 6, di pp. 24.

154. – *Sopra un antico tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche*, « Loria Boll. », t. 11, 1909, pp. 33–37.

155*. – *La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo*, « Atti V Congr. Mathesis », 1909, di pp. 20.

156. – (In collab. con A. Padoa). *Preparazione degli insegnanti per le scuole medie. Relazione*, ibid.

157. – *G. Vailati (1863–1909)*, « Enseign. Math. », vol. 11, 1909, pp. 296–299.

158. – *G. Schiaparelli quale storico dell'antica astronomia*, « Bibl. Math. », (3), t. X, 1910, p. 330–340.

159. – *Metodo matematico e metodo statistico*, « Atti Acc. Virg. », 1910, di pp. 14.

160. – *Osservazioni intorno alla topologia delle curve e delle superficie non algebriche*, « Rend. Ist. Lomb. », (2), t. XLIII, 1910, pp. 248–255.

161. – *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*, Milano Hoepli, 1912, pp. XV + 235.

162. – *Sulla topologia delle superficie trascendenti*, « Giorn. di Mat. », t. XLVIII, 1910 pp. 56–63.

163*. – *Matematica e realtà*, « Conferenze e prolusioni; Boll. Mathesis », vol. 4, 1911, pp. 153–160.

164. – *Carlo Méray*, « Boll. Mathesis », vol. 3, 1910, pp. 127–131.

165. – *Una proprietà delle reti di sfere*, « Per. di Mat. », (3), t. VIII, 1911, pp. 230–232.

166. – *Sopra un'estesa categoria di superficie trascendenti. (Le superficie panalgebriche)*, « Rend. Ist. Lomb. », (2), t. XLIV, 1911, pp. 643–666.

167. – *Sur la détermination de la courbure d'une ligne plane considérée comme enveloppe de ses tangentes*, « Enseign. Math. », vol. 13, 1911, pp. 104–108.

168. – *Sopra una relazione che passa tra due antiche soluzioni del problema di Delo*, « Bibl. Math. », (3), t. XI, 1910, pp. 97–99.

169. – *Sur un travail relatif à la formule de Héron mentionné en 1849 par Jacobi*, « Bibl. math. », (3), t. XII, 1911, p. 182.

170. – *Gli scritti di Vailati*. « Riv. lig. sc., lett. ed arti », 1911, pp. 146–150.

171. – *Intorno alla trigonometria degli antichi Greci*, « Boll. Mathesis », vol. 4, 1912, pp. 13–28.

172. – *Emile Lemoine*, ibid., pp. 60–65.

173. – *Intorno allo stato attuale e alla sorte futura di una bibliografia matematica*, « Loria Boll. », 1912.

174. – *Sur la topologie des courbes interscendantes*, « Enseign. Math », vol. 14, 1912, pp. 291–293.

175. – *Proiezione centrale e omotetia*, « Per. di Mat. », t. XXVIII, 1913, pp. 121–123.

176. – *Sulle origini della teoria dei poliedri semi-regolari*, « Bibl. Math. », (3), t.XIII, 1912, pp. 14–16.

177*. – *La storia delle scienze è una scienza?*, « Atti Soc. It. progr. sc. », vol. 6, 1913, di pp. 19.

178. – *Détermination directe des projections des bissectrices d'un angle. A propos d'un article de M. Paternò*, « Enseign. Math. », vol. 13, 1913, pp. 413.

179*. – *Eccentricità e misteri dei numeri*, « Atti II Congr. Mathesis », 1913; « Enseign. Math. », vol. 15, 1913, pp. 193–201.

180. – *Cultura classica e scienza moderna, Discorso*. « Ann. Univ. », Genova, 1912–1913.

181. – *Carlo Maria Piuma*, ibid, 1912–1913, di pp. 8.

182. – *P. Tardy*, ibid., 1914–1915.

183. – *Intorno ai metodi usati dagli antichi greci per estrarre le radici quadrate*, « Proc. 5th Intern. Math. Congress. », vol. 2, 1913. pp. 518–525.

184*. – *G. Lagrange nella vita e nelle opere*, « Ann. di Mat. », (3), vol. 20, 1913, pp. IX–LII.

185. – *Lagrange e la storia delle matematiche*, « Bibl. Math. », (3), t. XIII, 1912, pp. 333–338.

186. – *Le glorie matematiche della Granbrettagna*, « Isis », vol. 1, 1914, pp. 637–654.

187. – *Determinazione delle parti visibili di un poliedro rappresentato graficamente*, « Zeitschr. f. Math. u. Phys. », t. LXIII, 1914, pp. 290–303.

188. – *Sur l'opération « transport des segments rectilignes » dans les constructions de géométrie descriptive*, « Enseign. Math. », vol. 16, 1914, pp. 101–107.

189. – *Zum Andenken an prof. F. Schütte*. « Jahr. der deutsche Math. Ver. », t. 23, 1914, pp. 429–430.

190. – *Sur un paradoxe algébrique apparent*, « Amer. math. Monthly », 1914.

191. – *Construction plane des spiriques de Perseus*, « Ann. sc. Ac. Polyt. de Porto », vol. 9, 1914, pp. 193–196.

192. – *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici dell'antichità*, « Scientia », vol. 18, 1915, pp. 358–368.

193*. – *Commemorazione del Socio Placido Tardy*, « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. XXIV, 1915, pp. 505–531.

194*. – *The achievements of Great Britain in the realm of mathematics*, « Math. Gaz. », vol. 7, 1914, pp. 423–427; vol. 8, pp. 12–19.

195. – *Les gymnases-lycées modernes en Italie*, « Zs. f. Math. u. Naturw. Unterr. », t. XLV, 1914, pp. 188–193.

196. – *Professori e studenti nella lotta per la redenzione nazionale*. Genova 1915.

197. – *Guida allo studio della storia delle matematiche*, Milano, Hoepli, 1916, pp. XVI + 223, 2ª ed. 1946.

198. – *The physicist J. B. Porta as a geometer*, « Bull. Am. Math. Soc. », vol. 22, 1916, pp. 340–343.

199. – *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici moderni anteriori al secolo XVIII*, « Scientia », vol. 18, 1916, pp. 357–368.

200. – *I doveri dei simboli matematici*, « Boll. Mathesis », 1916.

201. – *L'enigma dei numeri immaginari attraverso i secoli*, « Scientia », vol. 21, 1917, pp. 99–121.

202. – *Lo spettro dell'immaginario in geometria*, « Scientia », vol. 22, 1917, pp. 1–15.

203. – *Il « Philosophical Magazine » e la storia delle matematiche*, « Riv. di storia delle sc. med. e natur. », anno VII, n. 1, 1916; « The Mathem. Gazette », vol. 8, 1916, pp. 325–329.

204. – *Per la biografia di Giovanni Ceva*, « Rend. Ist. Lomb. », 1915, di pp. 3.

205. – *Spezielle ebene alg. Kurven von einer Ordnung höher als den vierten*, « Encykl. Math. Wissensch. », III, C 5 *b*. (3° vol., 2ª parte, 1ª metà, pp. 571–634).

206. – *Scienza e scienziati nel periodo della rivoluzione francese*, « Conferenze e prolusioni », 1915.

207*. – *Leonardo Da Vinci e la genialità latina*, ibid., 1917.

208*. – *Intorno allo stato attuale degli studi sulla storia delle matematiche*, « Atti Soc. It. progr. sc. », vol. 8, 1916, pp. 643–659.

209. – *Le matematiche nell'Estremo Oriente*, « Rend. Sem. mat. », Roma, t. IV, 1916–1917, di pp. 48.

210. – *Una generazione delle coniche a centro ideata da E. Torricelli*, « Per. di Mat. », t. XXXII, 1917, pp. 189–192.

211. – *Courbes orthoptiques*, « Int. des. Math. », t. 23, 1916, pp. 190–191.

212. – *Rayons de courbure succesifs en un point d'une épi-ou hypocycloide*, ibid., t. 24, 1917, pp. 92–94.

213. – *Note sulla storia delle matematiche in Italia*, « Rend. Lincei », (5), t. XXV 1916, pp. 264–270.

214*. – *Guglielmo Libri come storico della scienza*, « Atti Soc. Lig. sc. nat. e geogr. », 1916.

215. – *Collaborazione nazionale ed internazionale a pubblicazioni di Scienza e di Cultura*, Atti del Congresso del libro, 1917.

216. – *Le cubiche gobbe aventi ciascuna all'infinito tre punti reali e distinti*, Scritti matematici offerti a E. D'Ovidio. Torino, 1918, pp. 82–129.

217. – *Le matematiche in Ispagna ieri e oggi*, « Scientia », vol. 25, 1919, pp. 353–359, 441–449.

218. – *Le matematiche in Portogallo: ciò che furono, ciò che sono*, « Scientia », vol. 26, 1919, pp. 1–9.

219. – *Veicoli al servizio dei calcolatori*, ibid., vol. 28, 1920, pp. 77–93.

220. – *Che cosa debbono le matematiche ai Cinesi*, « Boll. Mathesis », 1920.

221. – *Per la storia del newtonianesimo in Italia*, « Atti Soc. progr. sc. », vol. 10, 1920, pp. 471–473.

222. – *H. G. Zeuthen (1839–1920)*, « Arch. St. Scienza », t. I, 1919–1920, pp. 447–451.

223. – *Per una storia delle matematiche nel secolo XIX*, ibid., pp. 39–47.

224. – *Sur le folium double*, « Rev. de mathém. spéciales », 1920.

225. – *Panegirico d'un eroe. Commemorazione di E. E. Levi*, Genova, 1919.

226. – *E. E. Levi (1883–1917)* (in collab. con G. Fubini), « Loria Boll. », 1919.

227. – *Les noms et les choses; remarques sur la nomenclature mathématique*, « Enseign. Math. », vol., 20, 1918, pp. 237–244.

228. – *Newton*. (Profili, n. 52), Roma, Formiggini, 1920, di pp. 69; 2ª ed. Milano, Bietti, 1939.

229. – *Prefazione all'opera*: J. W. YOUNG, *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria*, trad. D. Mercogliano. Napoli, 1919.

230. – *Per la gloria scientifica della Liguria. L. B. Alberti e G. Saccheri*, « Gazzetta di Genova », 1920.

231. – *C. Alasia, in memoria*, « Boll. Mathesis », 1919.

232. – *E. Torricelli nella storia della geometria*, « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. $XXXVIII_2$, 1919, pp. 409–415.

233. – *Remarques sur la construction des courbes gauches, avec application à la parabole cubique*, « Enseign. Math. », vol. 20, 1918, pp. 43–46.

234. – *Necrologia di G. F. Monteverde*, « Ann. Univ. Genova », 1919.

235. – *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane*, « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. XXVII, 1918, pp. 197–202.

236. – *Come venne scoperto il teorema di Pitagora?*, « Boll. Mathesis », 1919.

237. – *L'insegnamento della matematica nelle scuole industriali secondarie dei principali paesi del mondo*, ibid.

238. – *On certain constructions of descriptive geometry*, « Amer. Math. Monthly », t. 26, 1919, pp. 45–52.

239. – *La preparazione degli insegnanti medi di matematica*, « Per. di Mat. », 1921.

240. – *Sugli asintoti ed i piani asintotici di una linea gobba*, « Per. di Mat. », (4), t. I, 1921, pp. 94 100.

241. – *Dante e la scienza del suo tempo*, « Conferenze e prolusioni », 1921.

242. – *Huygens, Gauss e. . . Pitagora*, ibid., 1922.

243. – *Commemorazione di O. Tedone*, ibid.

244. – *Sopra un problema di geometria*, ibid.

245. – *Leonardo Fibonacci*, « Gli scienziati italiani », 1921.

246. – *Ulisse Dini*, ibid.

247. – *Evangelista Torricelli*, ibid.

248. – *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano, Hoepli, 1921, pp. XXIV + 584.

249. – *Un'accademia scientifico–letteraria in Genova*, « Gazz. di Genova », 1921.

250. – *Quando divenni professore*, ibid.

251*. – *Les contributions des différents peuples au développement des mathématiques*, « Scientia », vol. 29, 1921, pp. 169–184, 253–262.

252*. – *Philip E. B. Jourdain, matematico e storico della scienza*, « Arch. storia della scienza », 1921.

253. – *Osservazioni relative alla rappresentazione analitica dei sistemi elementari di coniche o quadriche*, « Atti Soc. Lig. di Sc. e lett. », vol. 1, 1922, pp. 161–170.

254. – *Descartes e la teoria dei numeri*, « Boll. di Mat. », 1923.

255*. – *Deux grands historiens des mathématiques: M. Cantor et H. G. Zeuthen*, « Scientia », vol. 31, 1922.

256. – *Le matematiche nel secolo di Dante*, « Arch. st. scienza », t. 3, 1922, pp. 32–33.

257. – *Una lettera inedita di E. Torricelli al P. Mersenne*, ibid., pp. 272–276.

258. – *L'opera geometrica di Evangelista Torricelli*, « Boll. di Mat. », (2), vol. 1, 1922, pp. I–VII.

259. – *Documenti relativi all'antica matematica dei cinesi*, « Arch. st. scienza », t. 3, 1922, pp. 141–149.

260. – *A remark on skew parabolas*, « Bull. Am. Math. Soc. », vol. 27, 1921, p. 201.

261. – *Qu'est-ce que c'est la géométrie analytique?*, « Enseign. Math. », vol. 23, 1923, pp. 141–147.

262. – *Applicazioni geometriche di una formola di F. Siacci*, « Boll. Un. Mat. It. », vol. 2, 1923, pp. 93–97, 121–125.

263. – *Osservazioni relative alla rappresentazione analitica dei sistemi elementari di coniche o quadriche*, « Scripta Univ. atque Bibl. Hierosolym. », 1923.

264*. – *Matematici nella vita pubblica. Contributi storici alla psicologia dell'uomo di scienza*, « Arch. st. scienza », t. 4, 1923.

265. – *Sur le nombre des normales que l'on peut mener d'un point à une courbe algébrique plane ou à une surface algébrique*. « Int. des Math. », (2), vol. 2, 1923, pp. 134–135.

266*. – *Psicologia dei matematici*, « Scientia », vol. 35, 1924, pp. 10–20.

267*. – *La funzione sociale della scienza*, « La parola », 1924.

268*. – *L'opera geometrica di C. Segre*, « Ann. di Mat. », (4), vol. 2, 1924, pp. 1–21.

269*. – *Una massima di Abel*, « Per. di Mat. », 1925.

270. – *Complementi di geometria descrittiva. Visibilità, ombre, chiaroscuro, prospettiva lineare*. Milano, Hoepli, 1924, pp. XII + 192.

271. – *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*. Bologna, 1925, vol. I, pp. XII + 376; vol. II, pp. II + 256.

272. – *Sulle curve le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare*, « Giorn. di Mat. », t. LXIII, 1925, pp. 101–107.

273. – *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della geometria analitica*, « Mem. Acc. Lincei », (5), vol. 14, 1924, pp. 777–845.

274. – *Alla ricerca di documenti sulla storia della scienza*, « Arch. », vol. 6, 1925, pp. 169–171.

275. – *Il periodo Galileiano nella storia delle scienze*, « Scientia », vol. 38, 1925, pp. 361–370.

276. – *Pagine di storia della scienza*, Torino, G. B. Paravia, 1925. di pp. XV + 151.

277. – *Une nouvelle (?) trisectrice*, « Mathésis », vol. 39, 1925, pp. 348–350.

278. – *Sobre las geodéticas de un cono de revoluciòn*; « Rev. mat. hispano-americ. », vol. 7, 1925, pp. 61–66, 96–100.

279. – *En relisant un mémoire de Plücker sur la théorie des surfaces*, « Enseign. mat. », vol. 25, 1926, pp. 67–71.

280. – *Prefazione al T. IV dei « Mémoires scientifiques » di P. Tannery*, Paris, 1926.

281. – *La legge d'evoluzione propria delle matematiche*, « Scientia », vol. 41, 1926, pp. 321–332.

282. – *Punti interrogativi nella storia delle matematiche*, « Archeion », vol. 7, pp. 4–17.

283. – *Phases de développement de la géométrie analytique*, « Association française », Grenoble, 1925, pp. 102–105.

284. – *Durante quarant'anni d'insegnamento: confessioni e ricordi*, « Boll. Mat. », 1926, sez. storico-bibliografica, pp. LXV–LXXVII.

285. – *Un periodo di storia delle scienze: da Galileo a Newton*. I: *Da Descartes a Pascal*, « Scientia », vol. 39, 1926, pp. 323–334. II: *Da Bacone all'alba del XVIII secolo*, « Scientia », vol. 40, 1926, pp. 205–216.

286. – *Nota sopra un'antica soluzione del problema di Delo*, « Boll. di Mat. », (2), vol. 6, 1927, pp. I–III.

287. – *Caratteri della geometria nella sua più recente fase di sviluppo*, ibid., pp. XLIX–LIII.

288. – *Sicilia matematica*, « Atti Congr. di Chimica », 1927.

289. – *L'enseignement secondaire des mathématiques en la République Argentine*, « Scientia », vol. 41, 1927, pp. 319–320.

290. – *La scienza nel secolo XVIII*, ibid., vol. 45, 1929, pp. 1–12.

291. – *Archimede*. (Collezione: *I curiosi della natura*) Milano, 1928.

292. – *Matematiche greche e matematici arabi*, « Archeion », vol. 9, 1928, pp. 161–166.

293. – *Quo vadimus?*, « Boll. di Mat. », (2), vol. 7, 1928, pp. LXXIII–LXXX.

294. – *Note sulla storia della matematica greca*, ibid., pp. I–V.

295. – *Storia delle matematiche*. Torino, Sten. I vol., 1929, di pp. 497, II vol., 1931, di pp. 595, III vol., 1933, di pp. 607; 2ª ed. Milano, Hoepli 1950 in un volume di pp. XXXV + 975.

296. – *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*, Paris, Gauthier-Villars, 1929, pp. IV + 215.

297. – *Lo sviluppo delle matematiche pure durante il secolo XIX*, « Scientia », 1929, vol. 45, pp. 225–234, 297–306, vol. 46, pp. 77–86, 153–162.

298. – *Dalla tavola pitagorica alle equazioni integrali. Schizzo storico.* (Estratto dal vol. 3° dell'opera: *L'Europa nel secolo XIX*), Padova, Cedam, di pp. 51.

299*. – *Paul Tannery et son oeuvre d'historien*, « Archeion », vol. 11, 1929.

300. – *Gli « Scritti scientifici » di Francesco Siacci*, « Rend. Acc. Lincei », (6), vol. IX, 1929, pp. 596–597.

301. – *Ce que nous apprirent et ce que nous attendons des manuscrits arabes relatifs aux mathématiques*, « Archeion », vol. 11, 1929, pp. XXIII–XXVIII.

302. – *Una curva speciale ideata da Vincenzo Viviani*, « Boll. di Mat. », (2), vol. 8, 1929 pp. XLIX–LI.

303. – *Risposta a una questione*, « Boll. Un. mat. it. », 1929.

304. – *Per la storia dell'algebra nei secoli XIII–XV*, « Per. di Mat. », (4), t. X, 1930, pp. 152–154.

305. – *Tavole numeriche*, « Atti Soc. Ligustica », vol. 9, 1930, pp. 9–16.

306. – *Indice cronologico e topografico del Carteggio Linceo*, « Archeion », vol. 12, 1930, pp. 76–77.

307. – *Ales. Vas. Vasilieff. Necrologia*, ibid., pp. 46–47.

308. – *Un problema d'aritmetica*, « Per. di Mat. », (4), t. X, 1930, pp. 337–338.

309. – *Come giunse a Firenze il manoscritto arabo dei libri V–VII delle « Coniche » di Apollonio*, « Archeion », vol. 12, 1930, pp. 13–14.

310. – *La réponse de Frénicle au premier défi de Fermat*, « Bull. des Sc. Math. », (2), 1930, t. LIV, pp. 245–254.

311. – *L'insegnamento della storia delle scienze in Italia*, « Archeion », vol. 13, 1930, pp. 474–476.

312. – *Intorno alla frequenza dei numeri primi*, « Atti Soc. Lig. di sc. e lett. », vol. 10, 1931, pp. 311–312.

313. – *Elogio del libro*, ibid.

314. – *L'ininterrotta continuità del pensiero matematico italiano*, « Per. di Mat. », (4), t. XII, 1931, pp. 1–16; « Atti Soc. It. progr. sc. », vol. 20, pp. 384–397.

315. – *Le matematiche nei quaranta secoli della loro storia*, « Atti Soc. Lig. di sc. e lett. », vol. 11, 1932, pp. 247–324.

316*. – *Di alcuni aspetti sotto cui presentansi le ricerche storiche nel campo matematico*, « Archeion », vol. 14, 1932, pp. 198–206.

317. – *Les mathématiques chez les anciens Egyptiens*, « Bull. sc. math. », (2), t. LVI, 1932, pp. 236–247.

318. – *Sopra una poco nota costruzione del pentagono regolare.* « Boll. Mat. », (2), vol. 11, 1932, pp. 147–148.

319. – *Bombelli e Diofanto*, « Atti Congr. intern. mat. », Bologna, 1932, vol. 6, pp. 415–420.

320. – *A. L. Cauchy nella storia della geometria analitica*, « Verhandl. des Math. Congr., Zürich », 1932, vol, 2, pp. 335–336.

321. – *Sur l'équation de la surface du 2^e ordre déterminée par trois droites. (Extrait d'une lettre adressée à un élève).* « Enseign. math. », vol. 31, 1932, pp. 235–240.

322. – *A. L. Cauchy in the history of analytic geometry*, « Scripta Math. », vol. 1, 1932, pp. 123–128.

323. – *Una lettera inedita di Evangelista Torricelli*, « Archeion », vol. 14, 1932, pp. 12–14.

324. – *Dimostrazione di una formula di Cayley*, « L'Archimede », 1933.

325. – *La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, dans les divers pays*, « Enseign. Math. », vol. 32, 1933, pp. 5–20, pp. 996–1009; « Verh. Kongr Zürich », 1932, vol. 2, p. 363.

326. – (In coll. con A. Fraenkel e R. C. Archibald.) *Mathematics and Law*, « Scripta Math. » vol. 1, 1933, p. 276.

327. – *Commemorazione di E. D'Ovidio*, « Rend. Acc. Lincei », (6), vol. XVII, 1933, di pp. 6.

328. – *Per la storia della prospettiva nei secoli XV e XVI*, « Atti Acc. Pontaniana », vol. 62, 1933, pp. 506–509.

329.* – *Considerazioni e notizie intorno alla storia delle matematiche*, « Rend. Acc. Lincei » (6), vol. XVII, 1933. pp. 768–775.

330. – *Métamorphose d'une solution ancienne du problème de Délos*, « Mathésis », vol. 47, 1933, pp. 293–295.

331. – *La geometria degli altari eretti in onore di Brahma*, « Archeion », vol. 15, 1934, pp. 395–407.

332. – *A. Mannheim-soldier and mathematician*, « Scripta Math. », vol. 2, 1934, pp. 337–342.

333. – *Metodi matematici, essenza, tecnica, applicazioni*, Milano, Hoepli, 1935, pp. XV + 276.

334. – *Contributi matematici dati da D'Alembert all'Encyclopédie méthodique*, « Actas III Congrès d'hist. des sc. », Lisboa, 1935, di pp. 15.

335. – *Eulero o i neo-pitagorici? Una questione di priorità*. Scritti in onore di S. Ortu-Carboni, Genova, 1935.

336. – *Triangles sphériques particuliers*, « Mathésis », vol. 49, 1935, pp. 335–336.

337. – *Per la storia della matematica nell'antica India*, « Boll. di Mat. », (2), vol. 14 1935, pp. I–IV.

338. – *Le mathématicien J. Liouville et ses oeuvres*, « Archeion », vol. 18, 1936, pp. 117–139.

339. – *Michele Chasles e la teoria delle coniche*, « Osiris », vol. I, 1936, pp. 421–450.

340. – *Lagrange nelle Accademie di Berlino e Parigi*, vol. in onore di A. M. Lorgna. Acc. di agricoltura, scienze, e lettere di Verona, 1935.

341. – *Curve*, « Rend. sem. mat. e fis. Milano », vol. 10, 1936, pp. 113–126.

342. – *Per la storia della geometria descrittiva*, « Boll. mat. », (2), vol. 15, 1936 di pp. 5.

343. – *Sur l'aritmétique babylonienne*, « Archeion », vol. 18, 1936, pp. 63–65.

344. – *Galileo Galilei nella vita e nelle opere*, « Atti Soc. sc. lett. Genova », t. 1, 1936, pp. 233–298; 2ª ed. Milano, Hoepli, 1938, pp. X + 145.

345. – *Due lutti: K. Bopp., K. R. Vallner*, « Archeion », vol. 17, 1936, pp. 423–425.

346. – *Intorno a due problemi geometrici proposti a N. Tartaglia*, « Boll. mat. » (2), vol. 15, 1936, pp. LXI-LXIII.

347. – *J. Liouville and his work*, « Scripta Math. », vol. 4, 1936, pp. 147–154, 257–262.

348. – *La società ligustica di scienze e lettere dal 1922 al 1935*, « Atti Soc. sc. e lett. Genova », 1937.

349. – *Descartes géomètre*, « Rev. de Methaphys. et Morale », vol. 49, 1937, pp. 199–220.

350. – *Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche*. Raccolti per iniziativa e pubblicati sotto gli auspici della sezione ligure della Soc. Mathesis, Padova, Cedam, 1937, pp. XV+589.

351. – *Sur la représentation par la méthode de Monge de l'icosaedre régulier*, « Mathésis », vol. 51, 1937, pp. 29–33.

352. – (In collab. con A. N. Singh), *Sur un système d'équations algébriques considéré par les indiens*, ibid., pp. 327–330.

353. – *Contributi dati dall'Italia alle matematiche pure dai tempi più remoti ai giorni nostri*, « Matem. Cluj », vol. 14, 1938, pp. 155–179.

354. – *A la recherche d'une frontière*, « Enseign. Math. », vol. 37, 1938, pp. 77–82.

355. – *Le prétendu « Larcin » de Torricelli*, « Archeion », vol. 21, 1938, pp. 62–68.

356. – *Rettificazioni e complanazioni anteriori alla creazione dell'analisi infinitesimale*, « Atti I Congr. Un. Mat. It. », Firenze 1937, pp. 521–527.

357. – *Per una più perfetta conoscenza della scuola Galileiana*, ibid., pp. 447–449.

358. – *L'aritmétique expérimentale*, « Sphinx », vol. 8, 1938, pp. 18–19.

359. – *Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange, 1736–1936*, « Isis », vol. 8, 1938, pp. 366–375.

360. – *Charles Sturm et son oeuvre mathématique (1803–1855)*, « Enseign. Math. », vol. 37, 1938, pp. 249–274.

361. – *Le matematiche in Ispagna ed in Argentina*, « Un. mat. arg. », n. 1, Buenos Aires, 1938, pp. 24.

362. – *Remarques sur les équations algébriques non rationnelles*. (Extrait d'une lettre), « Mathésis », vol. 52, 1938, pp. 129–131.

363. – *Curve e superficie speciali*, « Enc. Mat. elem. », II, p. 2ª, Milano, 1938, pp. 377–433.

364. – *Le rôle de la représentation géométrique des grandeurs aux différentes époques de l'histoire des mathématiques* », « Rev. méth. moral », vol. 46, 1939, pp. 57–63.

365. – *Un problema aritmetico che può essere stato risoltò dagli antichi greci*, « An. Fac. Ci. Porto », vol. 24, 1939, pp. 65–69.

366. – *Triangles équilatéraux dérivés d'un triangle quelconque*, « Math. Gaz. », vol. 23, 1939, pp. 364–372.

367. – *Nota sulla geometria del triangolo rettilineo*. (Da una lettera diretta ad un giovane studioso), « Rev. mat. hisp. amer. », (3), vol. 1, 1939, pp. 15–20.

368. – *Des cercles ex-circonscrits par rapport à un triangle sphérique*, « Math. Cluj », vol. 16, 1940, pp. 57–60.

369. – *W. von Tschirnhaus and algebraic equations with roots in arithmetical progression*, « Proc. Edinburgh Math. Soc. », (2), vol. 6, 1940, pp. 181–184.

370. – *Gli « Acta eruditorum » durante gli anni 1682–1740 e la storia delle matematiche*, « Archeion », vol. 23, 1941, pp. 1–35.

371. – *Dans quelles circonstances la découverte scientifique a-t-elle lieu?*, « Univ. nac. Tucumán, Revista ». A, vol. 2, 1941, pp. 357–368; « Boll. Un. mat. it. », 1947, pp. 35–45.

372. – *La vita scientifica di Cristiano Huygens quale si desume dal suo carteggio*, « Pont. Acad. Sc. Comment. », vol. 6, 1942, pp. 1079–1139.

373. – *La « courbe catoptrique d'Euler »*, « Enseign. Math », vol. 38, 1942, pp. 250–275.

374. – *Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de coordonnées. Contribution à l'histoire de la géométrie analytique*, « Mathematica », Timișoara, vol. 18, 1942, pp. 125–145; vol. 20, 1944, pp. 1–22; vol. 21, 1945, pp. 66–83; Osiris vol. 8, 1948, pp. 218–288.

375. – *Matematici liguri dei secoli XV–XVIII*. « Boll. mat. », 1943.

376. – *Il terzo centenario del barometro*, « Sapere », 1944, pp. 229–234.

377. – *Prime linee di una bibliografia Torricelliana*, « Torricelliana », 1945.

378. – *Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali*, « Rend. Lincei », (8), vol. I, 1946, pp. 7–15.

379. – *L'avverso destino di Evangelista Torricelli*, « Rend. Lincei », (8), 3, 1947, pp. 665–669.

380. – *Ernest de Jonquières, sailor and scientist*, « Scripta math. », vol. 13, 1947, pp. 5–15.

381. – *Paul Tannery, engineer and historian*, ibid, pp. 155–162.

382. – *Fisica di ieri e fisica di oggi*, « Arch. intern. hist. sciences », 1948, pp. 623–629.

383. – *La volgarizzazione delle scienze di ragionamento*, « Scientia », (6), 48, 1948, pp. 33–38.

384. – *Projet d'une histoire universelle des mathématiques*, « Arch. intern. hist. sciences », 1948, pp. 231–232.

385. – *Sull'introduzione dei numeri immaginari e irrazionali*, « Archimede », I, 1949, pp. 48–49.

386. – *La storia della matematica vista da un veterano*, « Boll. Un. mat. it. », (3), vol. 5, 1950, pp. 165–170.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Giordani comunica ai Colleghi la dolorosa notizia della morte di Enrico Fermi, avvenuta a Chicago il 28 novembre 1954, e rievoca brevemente, con commosse parole, le grandi doti di mente e di cuore dell'insigne scienziato. Dopo aver ricordato che se anche non si considerassero nell'opera del Fermi le scoperte atomiche, egli rimarrebbe pur sempre un grandissimo fisico perché innumerevoli sono i preziosi contributi da lui dati a tale scienza, il Presidente conclude affermando che la serena figura dell'illustre scomparso, la semplicità della sua vita e la bontà del suo cuore, lasceranno, in tutti coloro che lo hanno conosciuto, un ricordo incancellabile.

Alla Sua memoria il Presidente, a nome dell'Accademia, che ha avuto l'onore di annoverarlo ancora giovanissimo tra i Soci Nazionali della Categoria III, Sezione Fisica, invia un reverente pensiero di omaggio.

Il prof. Giordani annunzia poi che un altro grave lutto ha colpito l'Accademia con la morte, avvenuta a Milano il 9 corrente, del Socio Nazionale Mario Giacomo Levi, della Categoria III, Sezione Chimica. Oltre che valoroso scienziato e creatore di una importante scuola, il prof. Levi fu anche uno spirito talmente nobile da poter ritornare, dopo le traversie ingiustamente sofferte, ai suoi studi prediletti con animo del tutto sereno, scevro da risentimenti o rancori.

Alla memoria dell'illustre chimico scomparso, il prof. Giordani invia un pensiero di affettuoso e devoto omaggio.

Prega poi il Socio Cambi di rappresentare l'Accademia ai funerali che avranno luogo domani a Milano.

Rivolge quindi preghiera ai Soci E. Amaldi e Natta di voler rispettivamente commemorare, nelle prossime sedute, Enrico Fermi e M. G. Levi.

I predetti Soci accettano l'incarico.

Il Presidente comunica che il Collega Gortani ha accettato di commemorare, nella seduta del mese di febbraio 1955, il compianto Socio Feruglio, mentre il Collega Giorgio Dal Piaz ha fatto presente di non avere la possibilità, a causa delle sue condizioni di salute e della sua età, di aderire alla richiesta, rivoltagli dal Presidente, di tenere la commemorazione del Socio Fabiani.

Il Presidente, in considerazione del fatto che il Fabiani era stato allievo del prof. Dal Piaz, ha creduto di dover insistere nella sua preghiera, assicurando però lo stesso prof. Dal Piaz che il testo della commemorazione, qualora egli intendesse prepararlo e inviarlo all'Accademia, potrebbe essere letto da altro Socio.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Alessandro Terracini che commemora il compianto Collega Gino Loria.

Il prof. Giordani ringrazia l'oratore per le sue elevate e commosse parole e rinnova ai familiari del prof. Loria, presenti alla seduta, l'espres-

sione del più vivo cordoglio dell'Accademia per la scomparsa dell'illustre scienziato. Ringrazia poi il prof. Eugenio Togliatti, che ha assistito alla commemorazione in rappresentanza del Rettore dell'Università di Genova, nella quale il compianto Socio Loria ha insegnato per circa 45 anni.

Il Presidente informa la Classe che il Collega Cantelli, tuttora in convalescenza per una operazione che ha avuto un felice esito, gli ha scritto, pregandolo di rendersi interprete del suo saluto presso tutti i Soci.

Il Presidente, assolvendo tale incarico, invia al prof. Cantelli i più sinceri auguri.

Con una commovente lettera il Socio Lombardi, impossibilitato, per ragioni di salute, ad intervenire alla seduta odierna, prende commiato dai Colleghi con i quali teme di non poter continuare la consuetudine dell'incontro in occasione delle tornate accademiche.

Il Presidente, ricordando la scrupolosità e la diligenza con le quali il Socio Lombardi ha adempiuto sempre ai suoi doveri, essendo di esempio ai Colleghi ed allievi, esprime l'augurio che le previsioni della lettera siano dovute ad un eccesso di scrupolosità ed esprime il voto che il prof. Lombardi possa riprendere la sua consuetudine di partecipare ai lavori accademici e conservarla ancora per lunghi anni.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa i Colleghi che sono presenti alla seduta i proff. David Bourgin dell'Università dell'Illinois a Urbana e Volfango Wasow dell'Università di California a Los Angeles, e porge ai due illustri ospiti americani, che trascorreranno un anno presso l'Istituto di Calcolo diretto dal Socio Picone, il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il prof. Giordani comunica che, subito dopo la morte di Enrico Fermi, egli ha avuto uno scambio di corrispondenza con il Collega Bernardini e con il prof. Emilio Segrè che, da parte loro, si erano messi in contatto con l'Università di Chicago in merito alla pubblicazione delle opere del Fermi. Il Socio Bernardini ha risposto con una lettera che il Presidente ha ricevuto in questo momento e del cui contenuto ritiene opportuno informare i Colleghi. L'edizione delle opere di Enrico Fermi comprenderebbe, oltre la ristampa di quelle già pubblicate, la pubblicazione dei Quaderni relativi ai corsi da lui tenuti, tuttora inediti, e di altri lavori che debbono però essere esaminati ai fini della declassificazione dalle materie tenute segrete dagli Stati Uniti d'America.

Il Presidente è lieto di comunicare che, in linea di principio, l'Università di Chicago è d'accordo circa l'impresa, purché l'edizione sia affidata all'Accademia dei Lincei, d'accordo con l'Università stessa e con la Società Italiana di Fisica e a cura di un Comitato di redazione misto, composto da tre italiani, E. Amaldi, Rasetti e Persico e da tre americani, Anderson, Marschall e Zinn, mentre l'editore capo sarebbe Emilio Segrè.

Poiché vi sono pubblicazioni del Fermi in diverse lingue, italiana, francese, inglese e tedesca, la nuova edizione avrebbe luogo nelle lingue originali, con a fianco la traduzione inglese.

Il Presidente sarebbe d'avviso che a tale edizione potrebbe seguirne un'altra, sempre nelle lingue originali, ma con a fianco le traduzione italiana.

Il prof. Giordani chiede alla Classe l'autorizzazione a procedere nelle trattative con l'Università di Chicago, sempre mediante il cortese interessamento dei Colleghi italiani che si trovano colà, ai quali desidera rivolgere il più vivo ringraziamento, e aggiunge che non vi è da preoccuparsi circa la spesa perché il Comitato per le Ricerche Nucleari potrebbe assumersi tale onere.

Il Socio Polvani, nella sua qualità di Presidente della Società Italiana di Fisica, desidera informare la Classe che la Società stessa è onorata di dare il suo contributo all'impresa che costituirà un degno omaggio alla memoria di Enrico Fermi e desidera ringraziare il Presidente per il suo sollecito ed efficace interessamento al riguardo. Avanza solo qualche riserva circa l'opportunità della seconda edizione con la traduzione italiana, sia perchè non la ritiene indispensabile, dato che la lingua inglese è ben conosciuta dai nostri cultori di fisica, sia perché tale seconda edizione potrebbe pregiudicare in un certo senso la prima. Comunque sarebbe necessario, in tale materia, stabilire precisi accordi con gli editori.

Il Presidente osserva che questo problema non deve essere deciso oggi e che vi sarà tutto il tempo necessario per trattare l'argomento. In ogni modo egli ritiene che, qualora l'impresa fosse affidata all'Accademia, un'edizione italiana sarebbe opportuna.

Il Socio Perucca è d'accordo con il Presidente e fa presente che, indipendentemente dal risultato editoriale che potrebbe avere l'edizione italiana, questa non dovrebbe mancare. Ammette che su tale punto potranno esservi dei pareri discordi e che sarà necessario discutere ponderatamente, ma raccomanda di essere molto prudenti prima di abbandonare l'idea, giustamente prospettata dal Presidente, circa l'opportunità della traduzione nella nostra lingua.

Il Socio Signorini osserva che per la pubblicazione delle Opere di Volterra e di Levi-Civita, alle quali sovraintendono appositi Comitati accademici, si è adottato il criterio di conservare la lingua originale, senza traduzione italiana.

Il Socio Carnera propone di dare mandato al Presidente di continuare le trattative e, nello stesso tempo, formula per il Presidente stesso un vivo ringraziamento.

La Classe si associa all'unanimità.

Il Presidente ringrazia e comunica quindi che il Collega De Blasi, impossibilitato a prender parte, per ragioni di salute, alla presente seduta, ha inviato una relazione su un « comunicado », trasmesso dal sig. Harry Rahder, concernente le relazioni fra la costituzione fisica dell'uomo, il suo temperamento e la sua recettività patologica. Poiché dall'accurata relazione del Socio De Blasi non risulta che la comunicazione del sig. Rahder

sia fondata su argomenti tali da poter essere presi in considerazione, la Classe dispone che la comunicazione stessa sia passata agli atti.

Il Presidente Giordani formula per il Socio De Blasi un vivo ringraziamento, unitamente ad un affettuoso augurio per la sua salute.

Il Presidente dà quindi lettura di una circolare della Direzione Generale delle Accademie e Biblioteche riguardante una comunicazione dell'Ambasciata d'Italia a Buenos Aires circa il « Premio Juan Peron », istituito dalla Confederazione Generale dei Professionisti della Repubblica Argentina. Tale Premio intende onorare l'uomo, senza distinzione di patria, razza o condizione, che durante il periodo di due anni abbia maggiormente contribuito ad elevare le condizioni della vita umana e consiste nell'attribuzione di un diploma, di una medaglia d'oro e della somma di un milione di pesos argentini.

Le categorie o specialità del Premio sono le seguenti:

a) « Scienza », a colui che abbia realizzato qualche scoperta o creazione eccezionale e di effettivo beneficio per l'umanità.

È condizione indispensabile che le scoperte, creazioni o invenzioni concorrano effettivamente all'elevazione, alla salute o al benessere del genere umano.

b) « Azione umana », all'idealista o all'apostolo della pace e del progresso sociale, il quale abbia dedicato i suoi sforzi e pensieri alla liberazione, al benessere ed alla dignità dei suoi compatrioti o dell'umanità.

c) « Letteratura », allo scrittore, la cui opera celebri, con bellezza di ispirazione e di forma, la sublimazione dell'uomo.

d) « Arte », all'artista, la cui opera esalti quegli stessi ideali e risvegli nobili sentimenti estetici e morali.

Le istituzioni con personalità debitamente qualificate a proporre candidati sono:

a) « Scienza », le Università, le Accademie Nazionali, le Associazioni professionali, le Corporazioni, i Comitati o le Società di scienziati legalmente riconosciuti.

b) « Azione umana », le Associazioni professionali, le Corporazioni, i Comitati o le Società legalmente riconosciuti.

c) « Letteratura », le Università, le Accademie Nazionali di lingua e dialetti, le Associazioni Nazionali, o Collegi, di scrittori o di intellettuali.

d) « Arte », Musica: le Accademie, i Conservatorî o le Società Nazionali; Pittura, Scultura o Cesellatura: le Accademie o le Scuole di Arti plastiche nazionali.

Le proposte potranno essere presentate soltanto da quegli organismi o istituti che, in base al regolamento per il conferimento del Premio stesso, abbiano personalità qualificata per proporre candidati e saranno ricevute dal 15 luglio degli anni dispari fino al 31 agosto degli anni pari, salvo che per il primo anno, 1955, per il quale il periodo della ricezione delle proposte è stato fissato dal 1° settembre al 31 dicembre 1954.

Il regolamento del citato Premio potrà essere richiesto alla Confederazione Generale dei Professionisti.

Il Socio Vernoni, dopo aver ricordato che nel corrente anno è stato celebrato il centenario della nascita di Battista Grassi, e che alla memoria del grande biologo sono state tributate numerose onoranze, fa presente che una di queste, fra le ultime in origine di tempo ma forse tra le più durevoli dal lato sostanziale, è rappresentata dalla pubblicazione di una serie di memorie in uno speciale numero della « Rivista di Parassitologia » che si apre con un lavoro del Collega Cotronei. Il prof. Vernoni formula il voto che la Presidenza trasmetta alla Direzione della citata Rivista il plauso dell'Accademia e l'adesione della stessa all'importante iniziativa.

Il Presidente Giordani assicura che si renderà interprete presso la Presidenza del voto del Collega Vernoni.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, pervenuto all'Accademia in data 3 corrente da parte della dott.ssa Eleonora Tamajo e osserva che, tre dei sigilli apposti su detto plico, risultano completamente staccati. Comunque, numerosi altri sigilli sono integri e la busta contenente il plico è perfettamente chiusa e non presenta alcuna traccia di manomissione.

La Classe, constatata l'integrità dei numerosi sigilli rimasti, delibera che il plico di cui trattasi sia trasmesso all'Archivio accademico a disposizione dell'interessata.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sansone presenta la terza edizione delle sue « Lezioni sulla Teoria delle funzioni di una variabile complessa » e ne parla.

Il volume mira a dare ai giovani studiosi un sicuro orientamento sulle funzioni ipergeometriche ed ellittiche, sui principî dell'aritmetica analitica e sull'analisi diofantea di secondo grado, sul problema di Dirichlet per le funzioni armoniche dal punto di vista classico e moderno, sul problema della rappresentazione conforme e sulle funzioni automorfe e la loro rappresentazione con serie di Poincaré.

Il Socio Bompiani presenta una sua pubblicazione dal titolo « Preliminari di geometria iperspaziale », una del prof. Edgar R. Lorch su « La teoria delle trasformazioni lineari degli spazi di Banach » e una terza del prof. André Lichnerowicz, intitolata « Geometria differenziale in grande – Gruppo d'olonomia e omologia », che rappresentano parte dell'attività svolta dall'Istituto Matematico dell'Università di Roma nel decorso anno accademico.

Presenta poi un volume contenente le Lezioni svolte dai proff. Amerio, Fantappié e Lorch e le conferenze tenute dai proff. Cugiani e Rizza, costituenti il 1° Corso Internazionale Matematico Estivo svolto a Varenna nel giugno del 1954.

Il Socio Bompiani, mentre preannuncia che a tale volume seguiranno altri due, è lieto dell'occasione per rivolgere il suo vivo ringraziamento al Collega Colonnetti, Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'interessamento e gli efficaci contributi dati dal C.N.R. ai corsi di Varenna.

Il Presidente Giordani si associa.

Il Socio Sergi, a nome dell'Istituto Italiano di Antropologia, presenta l'opera postuma del dott. Giorgio Prosdocimo « Tra i Libici del sud tripolino – Etnologia e criminologia ». L'Autore del volume era un medico, antropologo ed etnologo, vissuto per molti anni in Libia a contatto intimo con le genti della regione e che, per la professione da lui esercitata, ha potuto conoscerle profondamente sotto ogni aspetto fisico e psichico. I dati pubblicati riguardano la criminalità del sud tripolino rilevati nel loro sfondo etnologico e completati da un saggio statistico, quest'ultimo in collaborazione con Alfredo Sacchetti. La documentazione si basa sulla vita abituale dei soggetti nelle scene dove essi si agitano e operano e dove affiorano antichi pregiudizi e tradizioni, relitti della loro storia etnica. Quanto ha scritto il dottor Prosdocimo è un contributo alla conoscenza della etnia libica sui dati della esperienza e della osservazione, metodo che solo permette un adeguato orientamento sui fenomeni sociali. Seguendo questa via l'A. ha il merito di avere compiuto indagini nella cerchia della criminologia comparata che ha per fine lo studio della criminalità nei diversi popoli e che apre largo orizzonte alla ricerca e alla determinazione dei fattori del delitto per gli opportuni e successivi raffronti che sorgono dal loro esame etnico. L'Antropologia criminale ha trovato in questo studio il suo naturale ambiente di esame nel quadro dello svolgimento storico–biologico dei tipi sociali etnici. Il volume è stato stampato a spese della vedova, con il contributo del C.N.R. e costituisce il supplemento al volume XL della Rivista di Antropologia.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno offerto e presentato opere in omaggio.

Viene letto l'elenco delle opere inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Graffi, Sansone, Cambi, Picone, Segre (a mezzo del Presidente Giordani), Armellini, Montalenti, Pensa (a mezzo del Collega G. Levi), Quilico, Tonzig, Semerano e Pupilli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CATTANEO L. — Considerazioni sul braccio temporale della commessura bianca anteriore dell'encefalo (pres. dal Socio A. PENSA).

MARRÈ E. — Dimostrazione spettrofotometrica della formazione di complessi auxin–proteici a livello dei gruppi sulfidrilici in preparati enzimatici vegetali (pres. dal Socio S. TONZIG).

Ricci G. — Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti (pres. dal Socio G. Sansone).

Sce M. — Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali (pres. dal Socio B. Segre).

Il Socio Natta presenta una sua Memoria dal titolo « Una nuova classe di polimeri di α–olefine, aventi eccezionali regolarità di struttura » e una altra Memoria, sua e di P. Corradini, dal titolo « Sulla struttura cristallina di un nuovo tipo di polipropilene ».

Il Presidente Giordani, riferendosi alla presentazione dei lavori del Socio Natta, desidera rallegrarsi in particolar modo con il Collega che è riuscito a preparare, ricorrendo alla catalisi etereogenea, particolari tipi di polimeri cristallini delle α–olefine, e ad identificarne la struttura lineare con una regolare successione di atomi di carbonio asimmetrico aventi, almeno per lunghi tratti di ogni singola molecola, uguale configurazione sterica. La cosa è veramente importante, dal punto di vista delle applicazioni, in quanto si riesce ad ottenere, a seconda del procedimento di catalisi, dalla stessa materia prima, polimeri con le proprietà le più diverse e con interessantissime relazioni tra tali proprietà e la struttura della catena: tra essi è di grande interesse, dal punto di vista tecnico e da quello economico, la nuova fibra tessile presentata. Maggiore poi sembra l'interesse teorico, in quanto l'uso di particolari catalizzatori solidi permette di orientare in modo ben determinato le molecole, che successivamente si addizionano, formando un primo esempio di quei modelli di accrescimento su materia, che i biologi hanno immaginato per spiegare alcune sintesi di altri polimeri negli organismi viventi.

Ringrazia perciò il Collega Natta che ha voluto riservare all'Accademia la primizia della pubblicazione dei risultati dei suoi studi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 dicembre 1954

BONGIOVANNI Gian Carlo. — *Insetti dannosi in agricoltura*. Bologna, s. d. Pp. 31, in–8°, con tavv.

CURIE SKLODOWSKA Marie. — *Oeuvres*. Recouillies par Irène Joliot Curie. Varsovie, Académie Polonaise des Sciences, 1954. Pp. XII–685, in–8°.

Dizionario d'Ingegneria diretto da Eligio Perucca. Vol. IV (Mot–Rul). Torino, UTET, 1954. Pp. VIII–1040, in–4°, con figg. e tavv.

JUNKES Giuseppe (S. J.). — *L'effetto della rotazione di un prisma disperdente allo spettro*. Estr. da « Atti della Fondazione G. Ronchi », a. IX, 1954, n. 3 (Specola Vaticana. Comunicazione, s. 1ª, n. 16).

JUNKES J. and SALPETER E. W. — *Unusual doubling of spectral lines*. Estr. da « Nature », vol. CLXXIV, 1954 (Specola Vaticana. Comunicazione, s. 1ª, n. 17).

NIEVGODOVSKY Pierre. — *Mouvements électronomiques des corps simples et leurs formes ou concentrations*. Compiègne, « Progrès de l'Oise », 1953. Pp. 31, in–8°.

— *La théorie des fonctions électroniques*. (Suite et confirmation de « Mouvements Électroniques des corps simples et leurs formes ou concentrations » du même auteur). Compiègne, « Progrès de l'Oise », 1954. Pp. 48, in–8°.

PELLEGRINI Giovanni. — *Esperimenti di lotta antidacica svolti nel 1952 con un insetticida a base di P. nitrofenildietiltiofosfato*. Milano, Soc. Montecatini, 1954. Pp. 89, in–8°, con figg. e tavv.

PERUCCA Eligio. — Vedi: *Dizionario d'Ingegneria*.

PROSDOCIMO Sergio. — *Tra i Libici del Sud Tripolino. Etnologia e Criminologia*. Roma, Istituto Italiano di Antropologia, 1954. Pp. XII–340, in–8°, con tavv.

The Rumford Bicentennial. — A record of scientific and biographical papers presented at the Symposium marking the two hundredth anniversary of the birth of Benjamin Thompson, Count Rumford, held at the American Academy of Arts and Sciences in Boston on the twenty–sixth to the twenty eighth of March, 1953. Estr. da « Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences », vol. LXXXII, 1953, n. 7.

RUSSO Achille. — *Battista Grassi maestro di biologia nei ricordi personali dell'autore*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6ª, vol. X, 1955.

RUSSO Giuseppe e SANTORO Rolando. — *Esperimenti di lotta antidacica eseguiti in Ascea Marina* [*Salerno*] *nel 1953*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria Filippo Silvestri di Portici », vol. XIII, 1954.

— *Essais de lutte contre le « Dacus Oleae » à Ascea* (*Salerno*) *en 1950*. Estr. da « Feuilles d'informations Oléicoles Internationales ».

ŠAHOVIĆ K. — *Opšta i specijalna patološka anatomija*. Sveska III: *Tumori*. Beograd, Srpska Akademija Nauka, 1954. Voll. 2. in–8°, con figg.

SANSONE Giovanni. — *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*. Vol. II. 3ª ed. Padova, CEDAM, 1955. Pp. XII–507, in–8°.

SANTORO Rolando. — Vedi: RUSSO Giuseppe e SANTORO Rolando.

SELLI Raimondo. — *Il bacino del Metauro*. Descrizione geologica, risorse minerarie, idrogeologia. Fano, Cassa di Risparmio, 1954. Pp. 268, in–8°, con tavv.

SALPETER E. W. — Vedi: JUNKES J. and SALPETER E. W.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

AGOSTINELLI C., Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia, *216*.
ARMELLINI G., La temperatura del gas nella galassia primitiva, *87*.
ARRIGONI O. e MARRÈ E., Azione inibente degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti di pisello (« Pisum sativum »), *390*.
— Vedi MARRÈ E.
AVIGLIANO V., vedi COLOMBO G.

B

BAFFONI G. M., Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – II. Osservazioni sulla istogenesi delle cellule di Purkinje, *70*.
— Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – III. Fenomeni involutivi in neuroni di Purkinje durante il ciclo vitale del gatto, *269*.
BONETTI A., DILWORTH C., LADU M. e OCCHIALINI G., Misure in lastre nucleari. Nota I, *311*.
BONINO C. (jr.), vedi MIRONE P.
BONINO G. B. e MIRONE P., Sullo spettro di assorbimento ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide, *167*.
— Vedi MIRONE P.

C

CANONICA L. e FIECCHI A., La trasposizione di Claisen degli esteri γ–fenossicrotonici, *385*.
CAPITÒ L., vedi ROMEO A.
CAPRIOLI L., Sul calcolo della frequenza collisionale nella ionosfera, *365*.
CARDANI C., vedi QUILICO A.
CARINI G., Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde piane nei corpi in moto, *358*.
CHATT J., DUNCANSON A. e VENANZI L., Associazione tramite legami idrogeno nei complessi amminici del platino bivalente, *120*.
CARRÀ S., vedi SIMONETTA M.
CHISINI O., Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota I, *143*.
— Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota II, *305*.
CIMINO M., Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Le isofote coronali. Nota II, *21*.
CINQUINI S., Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota I, *188*.
— Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota II, *339*.
CLAUSER E., Velocità della luce nei corpi isotropi in moto, *362*.
CLEMENTI A., Formazione di acido urico dall'acido dialurico ecc. e dall'uracile nel fegato isolato e sopravvivente di piccione (Columba Livia), *5*.
— L'acido urico quale prodotto terminale del catabolismo degli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico e dell'uracile nel piccione e nel pollo, *92*.
COLA M., Sintesi e proprietà cristallografiche ottiche e strutturali del composto $CoCaSiO_4$ (tipo monticellite $MgCaSiO_4$), *258*.
— Vedi GALLITELLI P.
COLOMBO G. e AVIGLIANO V., Osservazioni sul polimorfismo in «Chorthippus longicornis» Latr. (« Acridoidea, Orthoptera »), *56*.
COLONNETTI G., A proposito del secondo principio di reciprocità, *3*.

D

D'AGOSTINO–BARBARO A., vedi LIVREA G.
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi con un componente a struttura ramificata, *109*.
— Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli, *114*.
— Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli con glicol etilenico, *234*.

DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli e polialcoli, *370*.

DEMICHELIS F., Sullo schema di decadimento del $^{212}_{84}Po$ (ThC'), *46*.

DILWORTH C., vedi BONETTI A.

DUCANSON A., vedi CHATT J.

F

FANTAPPIÈ L., Su una nuova teoria di « relatività finale », *158*.

FAVINI G., vedi SIMONETTA M.

FERRARI I., Multipoli e onde di Schelkunoff, *32*.

FERRO R., Il composto BaZn, *256*.

— Vedi RUGGIERO, A.

FOLICALDI G. e PUPILLI G. C., Stimolatore a doppio impulso, alimentato con corrente continua, *332*.

FIECCHI A., vedi CANONICA L.

FORTINI T., Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18-19 gennaio 1954 in relazione al problema della luminescenza del suolo lunare, *209*.

G

GALLITELLI P. e COLA M., Sintesi, proprietà cristallografiche e strutturali del composto Co_2SiO_4 (tipo dell'olivina), *172*.

GHIARA G., Neurosecrezione nel maschio di « Lacerta s. sicula » Raf., *132*.

GIACHETTI A., vedi SPADOLINI I.

GIACOMETTI G., Una teoria della reattività chimica applicata alla reazione di apertura dell'anello di cumarine-metilate, *379*.

GIANNUZZI M. A., Determinazione dell'oscuramento al bordo del Sole, eseguita a Monte Mario durante l'eclisse del 30 giugno 1954, *352*.

GUGGENHEIMER H., Omologia delle dilatazioni, *13*.

GULOTTA B., Per una più precisa definizione delle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide, *26*.

L

LADU M., vedi BONETTI A.

LAMPARIELLO G., Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto, *37*.

— Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica, *100*.

LAMPARIELLO G., L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto, *222*.

LIVREA G., ZANNELLI C. e D'AGOSTINO-BARBARO A., Ancora circa gli effetti di ripetute crisi convulsive da elettroshock sui processi costruttivi, *60*.

M

MAGNI L., vedi ROMEO A.

MAJORANA Q., Su di un'ipotesi cosmogonica, *150*.

MANARA C. F., Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali, *15*.

MARIN G., Osservazioni sullo sviluppo e sul differenziamento morfologico della gonade nell'embrione di pollo, *51*.

MARRÈ E. e ARRIGONI O., Azione delle auxine sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in estratti di pisello (« Pisum sativum ») e di giglio (« Lilium candidum »), *264*.

— Vedi ARRIGONI O.

MARZIANI M., Sul teorema di reciprocità dello stato superconduttivo stazionario, *229*.

MIRONE P. e BONINO C. (jr.), Spettri d'assorbimento del pirrolo e dell'α-pirrolaldeide nella regione ultrarossa tra 400 e 700 cm^{-1}, *250*.

— Vedi BONINO G. B.

MORPURGO G., Vitalità di eterozigoti per letali dominanti in « Drosophila melanogaster », *394*.

N

NIKODÝM O. M. e NIKODÝM S., Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un procédé généralisé de Cantor, *334*.

NIKODÝM S., vedi NIKODÝM O. M.

NOTARNICOLA L., vedi PERRI T.

O

OCCHIALINI G., vedi BONETTI A.

P

PERRI T. e NOTARNICOLA L., L'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli. Comparazione tra Anuri ed Urodeli. Nota I, 77.

PIOZZI F., vedi QUILICO A.

POLVANI G., Commemorazione del Corrisp. GIORGIO VALLE. Sarà pubblicata nel fasc. 1 del vol. XVIII (1955) dei « Rendiconti ».

Pucci C., A proposito di un problema isoperimetrico, *345*.
Pupilli G. C., vedi Folicaldi G.

Q

Quilico A., Cardani C. e Piozzi F., Sulla struttura dell'echinulina, *315*.

R

Reggiani M. P., Osservazioni preliminari sul comportamento del nucleolo e delle ribonucleoproteine negli ovociti e nelle cellule nutrici di « Simocephalus vetulus » (« Cladocera, Daphnidae »), *124*.
Ricci G., Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota I, *192*.
— Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota II, *347*.
Ricci R. e Trivero G., Sullo spettro di decadimento del $^{214}_{83}Bi$, *44*.
Romeo A., Capitò L. e Magni L., Su alcune reazioni della detiobenzil-penicillina, *240*.
Ruggiero A. e Ferro R., Ortogalliti di elementi delle terre rare, *48*.
— — Ortocobaltiti di elementi delle terre rare, *254*.
Russo A., Il potere germinale dei tessuti somatici nei vegetali illustrato 30 anni fa in « Ginkgo biloba » L. conifera superstite del periodo carbonifero, *12*.
— Un errore di Weismann ed il potere germinale del soma fattore essenziale per lo sviluppo dei tumori, *322*.

S

Segre B., Sulle ovali nei piani lineari finiti, *141*.
— Commemorazione del Socio Guido Fubini, *276*.
Simonetta M., Favini G. e Carrà S., Influenza del nitrogruppo sulla mobilità degli alogeni nei composti alifatici. Nota I, *375*.
Spadolini I. e Giachetti A., L'azione della acetilcolinesterasi sul cuore isolato di mammifero (« Cavia cobaja »), *183*.
— — e Spadolini L., L'azione dell'acetilcolina sul ciclo dell'eccitabilità del miocardio in rapporto ai processi di sommazione meccanica delle contrazioni, 177.
Spadolini L., vedi Spadolini I.
Stefani R., I° Contributo alla conoscenza della cariologia negli Insetti Embiotteri: La digametia maschile tipo XO in « Haploembia Solieri » Ramb, *82*.

T

Tallini G., Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria Kähleriana, *204*.
Terracini A. Commemorazione del Socio Gino Loria, *402*.
Tonzig S. e Trezzi F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. – XI. Meccanismo competitivo dell'interazione acido ascorbico-acido indolacetico, *324*.
Trezzi F., vedi Tonzig S.
Tricomi F. G., Equazioni differenziali con punti di transizione (« turning points »), *137*.
Trivero G., vedi Ricci R.

V

Venanzi L., vedi Chatt J.
Vesentini E., Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietà covarianti d'immersione, *196*.

W

Wataghin G., Sulla teoria quantistica di interazioni non locali, *166*.

Z

Zannelli C., vedi Livrea G.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi matematica. — Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota I. CINQUINI S., *188*.

— Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota II. CINQUINI S., *339*.

— Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un procédé généralisé de Cantor. NIKODÝM O. M. e NIKODÝM S., *334*.

— A proposito di un problema isoperimetrico. PUCCI C., *345*.

— Equazioni differenziali con punti di transizione (« turning points »). TRICOMI F. G., *137*.

Astrofisica. — Su di un'ipotesi cosmogonica, MAJORANA Q., *150*.

Astronomia. — Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Le isofote coronali. Nota II. CIMINO M., *21*.

— Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18–19 gennaio 1954 in relazione al problema della luminescenza del suolo lunare. FORTINI T., *209*.

— Determinazione dell'oscuramento al bordo del Sole, eseguita a Monte Mario durante l'eclisse del 30 giugno 1954. GIANNUZZI M. A., *352*.

B

Biologia. — Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – II. Osservazioni sulla istogenesi delle cellule di Purkinje. BAFFONI G. M., *70*.

— Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – III. Fenomeni involutivi in neuroni di Purkinje durante il ciclo vitale del gatto. BAFFONI G. M., *269*.

— Neurosecrezione nel maschio di « Lacerta s. sicula » Raf. GHIARA G., *132*.

— L'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli. Comparazione tra Anuri ed Urodeli. Nota I. PERRI T. e NOTARNICOLA L., *77*.

— Osservazioni preliminari sul comportamento del nucleolo e delle ribonucleoproteine negli ovociti e nelle cellule nutrici di « Simocephalus vetulus » (« Cladocera, Daphnidae »). REGGIANI M. P., *124*.

C

Chimica. — Sullo spettro di assorbimento ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide. BONINO G. B. e MIRONE P., *167*.

— Associazione tramite legami idrogeno nei complessi amminici del platino bivalente. CHATT J., DUNCANSON A. e VENANZI L., *120*.

— Spettri d'assorbimento del pirrolo e dell'α–pirrolaldeide nella regione ultrarossa tra 400 e 700 cm^{-1}. MIRONE P. e BONINO C., *250*.

— Su alcune reazioni della detiobenzil–penicillina. ROMEO A., CAPITÒ L. e MAGNI L., *240*.

Chimica biologica. — Formazione di acido urico dall'acido dialurico ecc. e dall'uracile nel fegato isolato e sopravvivente di piccione (Columba Livia). CLEMENTI A., *5*.

— L'acido urico quale prodotto terminale del catabolismo degli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico e dell'uracile nel piccione e nel pollo. CLEMENTI A., *92*.

Chimica fisica. — Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi con un componente a struttura ramificata. DANUSSO F., *109*.

— Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli. DANUSSO F., *114*.

— Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli con glicol etilenico. DANUSSO F., *234*.

Chimica fisica. — Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli e polialcoli. DANUSSO F., *370*.
— Una teoria della reattività chimica applicata alla reazione di apertura dell'anello di cumarine-metilate. GIACOMETTI G., *379*.
— Influenza del nitrogruppo sulla mobilità degli alogeni nei composti alifatici. Nota I. SIMONETTA M., FAVINI G. CARRÀ S., *375*.
Chimica inorganica. — Il composto BaZn. FERRO R., *256*.
— Ortogalliti di elementi delle terre rare. RUGGIERO A. e FERRO R., *48*.
— Ortocobaltiti di elementi delle terre rare. RUGGIERO A. e FERRO R., *254*.
Chimica organica. — La trasposizione di Claisen degli esteri γ-fenossicrotonici. CANONICA L. e FIECCHI A., *385*.
— Sulla struttura dell'echinulina. QUILICO A., CARDANI C. e PIOZZI F., *315*.
Citologia. — I° Contributo alla conoscenza della cariologia negli Insetti Embiotteri: La digametia maschile tipo XO in « Haploembia Solieri » Ramb. STEFANI R., *82*.
Commemorazioni. — Commemorazione del Corrisp. Giorgio Valle. POLVANI G. Sarà pubblicata nel fasc. 1 del vol. XVIII (1955) dei « Rendiconti ».
— Commemorazione del Socio Guido Fubini. SEGRE B., *276*.
— Commemorazione del Socio Gino Loria. TERRACINI A., *402*.
Comunicazioni varie, *423*.
Congressi. *302*.
Cosmogonia. — Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia. AGOSTINELLI C., *216*.
— La temperatura del gas nella galassia primitiva. ARMELLINI G., *87*.

E

Embriologia. — Osservazioni sullo sviluppo e sul differenziamento morfologico della gonade nell'embrione di pollo. MARIN G., *51*.

F

Fisica. — Misure in lastre nucleari. Nota I. BONETTI A., DILWORTH C., LADU M. e OCCHIALINI G., *311*.
Fisica. — Sullo schema di decadimento del $^{212}_{84}$Po (ThC'). DEMICHELIS F., *46*.
— Sullo spettro di decadimento del $^{214}_{83}$Bi. RICCI R. e TRIVERO G., *44*.
Fisica matematica. — Sul calcolo della frequenza collisionale nella ionosfera. CAPRIOLI L. *365*.
— Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde piane nei corpi in moto. CARINI G., *358*.
— Velocità della luce nei corpi isotropi in moto. CLAUSER E., *362*.
— Su una nuova teoria di « relatività finale ». FANTAPPIÈ L., *158*.
— Multipli e onde di Schelkunoff. FERRARI I., *32*.
— Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto. LAMPARIELLO G., *37*.
— Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica. LAMPARIELLO G., *100*.
— L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto. LAMPARIELLO G., *222*.
— Sul teorema di reciprocità dello stato superconduttivo stazionario. MARZIANI M., *229*.
Fisica teorica. — Sulla teoria quantistica di interazioni non locali. WATAGHIN G., *166*.
Fisiologia. — Stimolatore a doppio impulso, alimentato con corrente continua. FOLICALDI G. e PUPILLI G. C., *332*.
— Ancora circa gli effetti di ripetute crisi convulsive da elettroshock sui processi costruttivi. LIVREA G., ZANNELLI C. e D'AGOSTINO-BARBARO A., *60*.
— L'azione della acetilcolinesterasi sul cuore isolato di mammifero (« Cavia cobaja ») SPADOLINI I. e GIACHETTI A., *183*.
— L'azione dell'acetilcolina sul ciclo della eccitabilità del miocardio in rapporto ai processi di sommazione meccanica delle contrazioni. SPADOLINI I., GIACHETTI A. e SPADOLINI L., *177*.
Fisiologia vegetale. — Azione inibente degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti di pisello (« Pisum sativum »). ARRIGONI O. e MARRÈ E., *390*.
— Azione delle auxine sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in estratti di pisello (« Pisum sativum ») e di giglio (« Lilium candidum »). MARRÈ E. e ARRIGONI O., *264*.

Fisiologia vegetale. — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. – XI. Meccanismo competitivo della interazione acido ascorbico – acido indolacetico. TONZIG S. e TREZZI F., *324*.

G

Geodesia. — Per una più precisa definizione delle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide. GULOTTA B., *26*.

Genetica. — Vitalità di eterozigoti per letali dominanti in « Drosophila melanogaster ». MORPURGO G., *394*.

Geometria. — Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota I. CHISINI O., *143*.

— Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota II. CHISINI O., *305*.

— Sulle ovali nei piani lineari finiti. SEGRE B., *141*.

— Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria Kähleriana. TALLINI G., *204*.

— Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietà covarianti d'immersione. VESENTINI E., *196*.

Geometria differenziale. Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali. MANARA C. F., *15*.

M

Meccanica. — A proposito del secondo principio di reciprocità. COLONNETTI G., *3*.

Mineralogia. — Sintesi e proprietà cristallografiche ottiche e strutturali del composto $CoCaSoO_4$, (tipo monticellite $MgCaSiO_4$). COLA M., *258*.

Mineralogia. — Sintesi, proprietà cristallografiche e strutturali del composto Co_2SiO_4 (tipo dell'olivina). GALLITELLI P. e COLA M., *172*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *303, 429*.

P

Patologia. — Il potere germinale dei tessuti somatici nei vegetali illustrato 30 anni fa in « Ginkgo biloba » L. conifera superstite del periodo carbonifero. RUSSO A., *12*.

Patologia comparata. — Un errore di Weismann ed il potere germinale del soma fattore essenziale per lo sviluppo dei tumori. I. – Premessa. RUSSO A., *322*.

Personale accademico, *295, 422*.

Plichi suggellati, *295, 426*.

Presentazione di libri, *295, 426*.

Presentazione di Note e Memorie, *301, 427*.

T

Teoria dei numeri. — Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. NOTA I. RICCI G., *192*.

— Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota II. RICCI G., *347*.

Topologia. — Omologia delle dilatazioni. GUGGENHEIMER H., *13*.

Z

Zoologia. — Osservazioni sul polimorfismo in « Chorthippus longicornis » Latr. (« Acridoidea, Orthoptera »). COLOMBO G. e AVIGLIANO V., *56*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1–2.

LUGLIO–AGOSTO 1954.

NOTE DI SOCI

COLONNETTI G., A proposito del secondo principio di reciprocità . . . . . Pag. 3
CLEMENTI A., Formazione di acido urico dall'acido dialurico e dall'uracile nel fegato isolato e sopravvivente di piccione (Columba Livia) 5
RUSSO A., Il potere germinale dei tessuti somatici nei vegetali illustrato 30 anni fa in « Ginkgo biloba » L. conifera superstite del periodo carbonifero 12

NOTE PRESENTATE DA SOCI

GUGGENHEIMER H., Omologia delle dilatazioni (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . Pag. 13
MANARA C. F., Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 15
CIMINO M., Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Le isofote coronali. Nota II (pres. dal Socio *G. Armellini*) 21
GULOTTA B., Per una più precisa definizione delle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide (pres. dal Socio *C. Mineo*) 26
FERRARI I., Multipoli e onde di Schelkunoff (pres. dal Corrisp. *D. Graffi*) 32
LAMPARIELLO G., Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 37
RICCI R. e TRIVERO G., Sullo spettro di decadimento del $^{214}_{83}$Bi (pres. dal Socio *E. Perucca*) 44
DEMICHELIS F., Sullo schema di decadimento del $^{212}_{84}$Po (ThC') (pres. dal Socio *E. Perucca*) 46
RUGGIERO A. e FERRO R., Ortogalliti di elementi delle terre rare (pres. dal Socio *L. Rolla*) 48
MARIN G., Osservazioni sullo sviluppo e sul differenziamento morfologico della gonade nell'embrione di pollo (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 51
COLOMBO G. e AVIGLIANO V., Osservazioni sul polimorfismo in « Chorthippus longicornis » Latr. (« Acridoidea, Orthoptera ») (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) . . . 56
LIVREA G., ZANNELLI C. e D'AGOSTINO–BARBARO A., Ancora circa gli effetti di ripetute crisi convulsive da elettroshock sui processi costruttivi (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) 60
BAFFONI G. M., Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – II. Osservazioni sulla istogenesi delle cellule di Purkinje (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 70
PERRI T. e NOTARNICOLA L., L'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli. Comparazione tra Anuri ed Urodeli. Nota I (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 77
STEFANI R., I° Contributo alla conoscenza della cariologia negli Insetti Embiotteri: La digametia maschile tipo XO in « Haploembia Solieri » Ramb. (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 82

FASCICOLO 3–4.

SETTEMBRE–OTTOBRE 1954.

NOTE DI SOCI

ARMELLINI G., La temperatura del gas nella galassia primitiva . . . . . Pag. 87
CLEMENTI A., L'acido urico quale prodotto terminale del catabolismo degli acidi isobarbiturico isodialurico e dialurico e dell'uracile nel piccione e nel pollo . . . 92

NOTE PRESENTATE DA SOCI

LAMPARIELLO G., Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) . . . . . Pag. 100
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi con un componente a struttura ramificata (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 109
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 114
CHATT J., DUNCANSON A. e VENANZI L., Associazione tramite legami idrogeno nei complessi amminici del platino bivalente (pres. dal Corrisp. *V. Caglioti*) 120
REGGIANI M. P., Osservazioni preliminari sul comportamento del nucleolo e delle ribonucleoproteine negli ovociti e nelle cellule nutrici di « Simocephalus vetulus » (« Cladocera, Daphnidae ») (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 124
GHIARA G., Neurosecrezione nel maschio di « Lacerta s. sicula » Raf. (pres. dal Socio *N. Beccari*) 132

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1954.

NOTE DI SOCI

TRICOMI F. G., Equazioni differenziali con punti di transizione (« turning points ») Pag. 137
SEGRE B., Sulle ovali nei piani lineari finiti 141
CHISINI O., Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota I 143
MAJORANA Q., Su di un'ipotesi cosmogonica 150
FANTAPPIÈ L., Su una nuova teoria di « relatività finale » 158
WATAGHIN G., Sulla teoria quantistica di interazioni non locali 166
BONINO G. B. e MIRONE P., Sullo spettro di assorbimento ultrarosso del sale sodico della 2–pirrolaldeide (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 167
GALLITELLI P. e COLA M., Sintesi, proprietà cristallografiche e strutturali del composto Co_2SiO_4 (tipo dell'olivina) (pres. dal Corrisp. *P. Gallitelli*) 172
SPADOLINI I., GIACHETTI A. e SPADOLINI L., L'azione dell'acetilcolina sul ciclo dell'eccitabilità del miocardio in rapporto ai processi di sommazione meccanica delle contrazioni (pres. dal Corrisp. *I. Spadolini*) 177

SPADOLINI I. e GIACHETTI A., L'azione della acetilcolinesterasi sul cuore isolato di mammifero («Cavia cobaja») (pres. dal Corrisp. *I. Spadolini*) . . . . . Pag. 183

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CINQUINI S., Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota I (pres. dal Socio *G. Sansone*) . . . . . Pag. 188
RICCI G., Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota I (pres. dal Socio *G. Sansone*) 192
VESENTINI E., Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietà covarianti d'immersione (pres. dal Socio *B. Segre*) 196
TALLINI G., Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria Kähleriana (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 204
FORTINI T., Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18-19 gennaio 1954 in relazione al problema della luminescenza del suolo lunare (pres. dal Socio *G. Armellini*) 209
AGOSTINELLI C., Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia (pres. dal Socio *G. Armellini*) 216
LAMPARIELLO G., L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 222
MARZIANI M., Sul teorema di reciprocità dello stato superconduttivo stazionario (pres. dal Corrisp. *D. Graffi*) 229
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli con glicol etilenico (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 234
ROMEO A., CAPITÒ L. e MAGNI L., Su alcune reazioni della detiobenzil-penicillina (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 240
MIRONE P. e BONINO C. (jr.), Spettri d'assorbimento del pirrolo e dell'α-pirrolaldeide nella regione ultrarossa tra 400 e 700 cm^{-1} (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) . . . 250
RUGGIERO A. e FERRO R., Ortocobaltiti di elementi delle terre rare (pres. dal Socio *L. Rolla*) 254
FERRO R., Il composto BaZn$_2$ (pres. dal Socio *L. Rolla*) 256
COLA M., Sintesi e proprietà cristallografiche ottiche e strutturali del composto $CoCaSiO_4$ (tipo monticellite $MgCaSiO_4$) (pres. dal Corrisp. *P. Gallitelli*) 258
MARRÈ E. e ARRIGONI O., Azione delle auxine sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in estratti di pisello («Pisum sativum») e di giglio («Lilium candidum») (pres. dal Socio *S. Tonzig*) 264
BAFFONI G. M., Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. – III. Fenomeni involutivi in neuroni di Purkinje durante il ciclo vitale del gatto (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 269

COMMEMORAZIONI

SEGRE B., Commemorazione del Socio Guido Fubini . . . . . Pag. 276

Personale accademico 295
Plichi suggellati 295
Presentazione di libri 295
Presentazione di Note e Memorie 301
Congressi 302
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 novembre 1954 303

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1954.

NOTE DI SOCI

CHISINI O., Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota II . . . . Pag. 305
BONETTI A., DILWORTH C., LADU M. e OCCHIALINI G., Misure in lastre nucleari (pres. dal Corrisp. *G. Occhialini*) 311
QUILICO A., CARDANI C. e PIOZZI F., Sulla struttura dell'echinulina (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 315
RUSSO A., Un errore di Weismann ed il potere germinale del soma fattore essenziale per lo sviluppo dei tumori. – I. Premessa 322
TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. – XI. Meccanismo competitivo dell'interazione acido ascorbico acido indolacetico (pres. dal Socio *S. Tonzig*) 324
FOLICALDI G. e PUPILLI G. C., Stimolatore a doppio impulso, alimentato con corrente continua (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) 332

NOTE PRESENTATE DA SOCI

NIKODÝM O. M. e NIKODÝM S., Sur l'extension des corps algébriques abstraits par un procédé généralisé de Cantor (pres. dal Corrisp. *A. Tonolo*) . . . . . Pag. 334
CINQUINI S., Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. Nota II (pres. dal Socio *G. Sansone*) 339
PUCCI C., A proposito di un problema isoperimetrico (pres. dal Socio *M. Picone*) . . 345
RICCI G., Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. Nota II (pres. dal Socio *G. Sansone*) 347
GIANNUZZI M. A., Determinazione dell'oscuramento al bordo del Sole, eseguita a Monte Mario durante l'eclisse del 30 giugno 1954 (pres. dal Socio *G. Armellini*) 352
CARINI G., Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde piane nei corpi in moto (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 358
CLAUSER E., Velocità della luce nei corpi isotropi in moto (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 362
CAPRIOLI L., Sul calcolo della frequenza collisionale nella ionosfera (pres. dal Corrisp. *D. Graffi*) 365
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di alcoli e polialcoli (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 370
SIMONETTA M., FAVINI G. e CARRÀ S., Influenza del nitrogruppo sulla mobilità degli alogeni nei composti alifatici. Nota I (pres. dal Socio *L. Cambi*) 375
GIACOMETTI G., Una teoria della reattività chimica applicata alla reazione di apertura dell'anello di cumarine-metilate (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 379
CANONICA L. e FIECCHI A., La trasposizione di Claisen degli esteri γ-fenossicrotonici (pres. dal Socio *L. Cambi*) 385
ARRIGONI O. e MARRÈ E., Azione inibente degli acidi indolacetico e naftalenacetico sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti di pisello (« Pisum sativum ») (pres. dal Socio *S. Tonzig*) 390
MORPURGO G., Vitalità di eterozigoti per letali dominanti in « Drosophila melanogaster » (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*) 394

COMMEMORAZIONI

TERRACINI A., Commemorazione del Socio Gino Loria . . . . . Pag. 402

Personale accademico 422
Comunicazioni varie 423
Plichi suggellati 426
Presentazione di libri 426
Presentazione di Note e Memorie 427
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 dicembre 1954 429

Indice per Autori 433
Indice per materie 436
Indici dei fascicoli 439

3 8198 304 935 008
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO